1 Teorema de Gauss no espaço

Seja $F = (P, Q, R) : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um c.v. contínuo com derivadas parciais contínuas.

. . . .

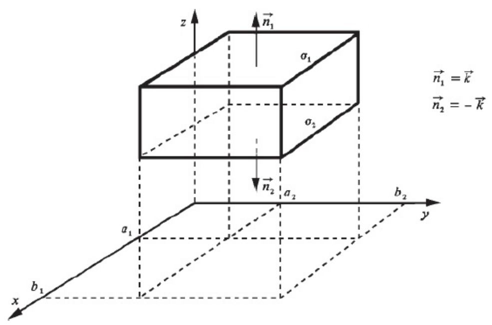
Lembrete: *Teorema de Gauss no plano (Teorema de Green-Slide 11):*
$B \subseteq A = domF \subset \mathbb{R}^2$ *como em H-TG:*

$$\int_{\partial^+ B} [F \cdot \widehat{n}_{ext}] ds = \iint_B div\, F dx dy$$

. . . .

Sejam $V = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [c, d] \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^3$ e $\sigma : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ superfície parametrizada regular por partes tal que $Im(\sigma) = \partial V$.

$$\int_{\partial V} [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}_{ext}]\, dS = \int_{\sigma} [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}_{ext}]\, dS???$$



Guidorizzi, vol. 3: $\int_\sigma F \cdot d\sigma = \int_\sigma [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}_{ext}]\, ds =?$

$$\sigma_1 : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = d \end{cases} \qquad \sigma_2 : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = c, \ (u, v) \in B \end{cases}$$

onde $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

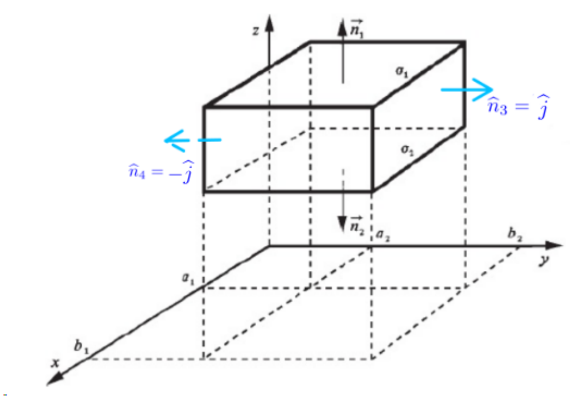
- $\displaystyle\int_{\sigma_1} F \cdot dS = \int_{\sigma_1} [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}_1]\, dS = \iint_B F(u, v, d) \cdot (0, 0, 1) du dv = \iint_B R(u, v, d) du dv$

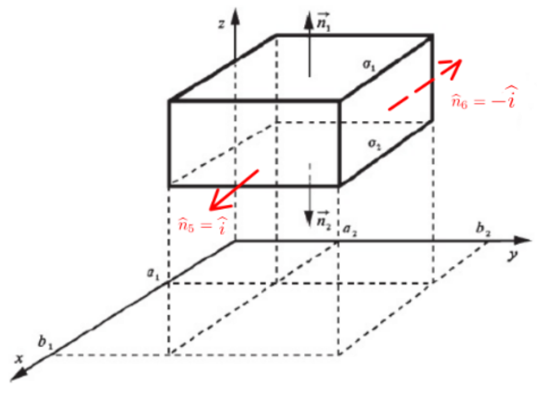
- $\displaystyle\int_{\sigma_2} F \cdot dS = \int_{\sigma_2} [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}_2]\, dS = \iint_B F(u, v, c) \cdot (0, 0, -1) du dv = \iint_B -R(u, v, c) du dv$

- $\displaystyle\int_{\sigma_1} F \cdot dS + \int_{\sigma_2} F \cdot dS = \iint_B [R(u, v, d) - R(u, v, c)] du dv$

$$= \iint_B \left[\int_c^d \frac{\partial}{\partial z} R(u, v, z) dz \right] du dv = \iiint_V \frac{\partial}{\partial z} R(u, v, z) dz du dv$$

Considerando as outras 4 faces de V e com contas similares obtemos:





- $\displaystyle\int_{\sigma_3} F \cdot \widehat{j} dS + \int_{\sigma_4} F \cdot (-\widehat{j}) dS = \iiint_V \frac{\partial}{\partial y} Q(u,v,z) dz du dv$
- $\displaystyle\int_{\sigma_5} F \cdot \widehat{i} dS + \int_{\sigma_6} F \cdot (-\widehat{i}) dS = \iiint_V \frac{\partial}{\partial x} P(u,v,z) dz du dv$

Portanto,

$$\int_\sigma F \cdot d\sigma = \int_\sigma [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}_{ext}]\, dS = \sum_{i=1}^{6} \int_{\sigma_i} [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}_i]\, dS = \iiint_V divF dx dy dz$$

. . . .

Quais as condições que um conjunto V de $\mathbb{R}^3$ deve satisfazer para valer o Teorema de Gauss no espaço?

. . . .

Hipóteses para o conjunto $V \subset \mathbb{R}^3$ e sua fronteira ∂V: :

Dado um aberto $A \subseteq \mathbb{R}^3$ consideremos um conjunto $V \subseteq A$ com as seguintes propriedades:

- V é compacto (fechado e limitado),
- $int(V) = V' \neq \emptyset$ (interior não vazio),
- a fronteira (bordo) ∂V de V é composta de um número finito de superfícies regulares por partes: $\partial V = \cup_{i=i}^{n} Im(\sigma_i)$ (união disjunta). Chamamos de **superfície fechada** a fronteira de V ;
- existe campo normal unitário em cada σ_i tal que $\widehat{\mathbf{n}}_i$ aponta para fora de V;
- a fronteira $\partial^+ V$ de V está orientada positivamente, isto é: orientada pelo campo normal unitário exterior $\widehat{\mathbf{n}}_{ext}$, composto pelos campos normais $\widehat{\mathbf{n}}_i$, que aponta para fora de V.

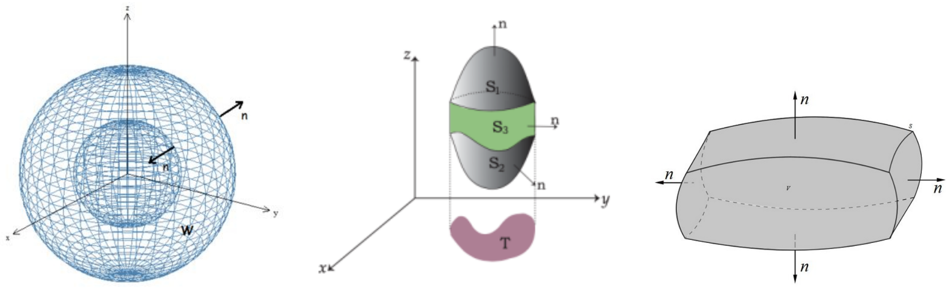


Figura 1: Figuras da internet e Notas de aula de Marcos Pérez

Teorema 1.1 (**Teorema de Gauss em $\mathbb{R}^3$**). *Seja $V \subseteq \mathbb{R}^3$ uma região compacta satisfazendo as condições acima*.*
Seja $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $V \subseteq A$ um campo contínuo com derivadas parciais contínuas.
Então

$$\iiint_V div F\, dV = \iint_{\partial^+ V} [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}_{ext}]\, d\sigma\,.$$

* Vale para regiões bastante gerais. Suponhamos que V possa ser decomposta em um número finito de regiões que podem ser vistas na forma

$$V = \{(x_1, x_2) \in B,\ f(x_1, x_2) \leq x_3 \leq g(x_1, x_2)\}$$

onde f, g são contínuas com derivadas contínuas em B e B é como no Teorema de Green. Isso para qualquer (todas) ordem das variáveis!

Chamamos de **superfície fechada** a borda de uma região assim.

2 Campos solenoidais

Seja $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um c.v. regular derivável com derivadas contínuas.

Lembrete: *Se $F = \nabla\varphi$ para algum $\varphi : A \to \mathbb{R}$ (F é* **conservativo***), isso implica:*

- $\displaystyle\int_\gamma F \cdot d\vec{s}$ *não depende do caminho (só dos extremos: $= \varphi(\mathbf{p}_2) - \varphi(\mathbf{p}_1)$)*
- $\displaystyle\oint_\gamma F \cdot d\vec{s} = 0$ *(em curvas fechadas)*
- $rotF = 0$ *(campo* **irrotacional***)*

viceversa,

- *se $rotF = 0$ e A é simplesmente conexo então $F = \nabla\varphi$.*
- *se $rotF = 0$ mas A não é simplesmente conexo então F poderia não ser conservativo.*

Se $F = rotG$ para algum $G : A \to \mathbb{R}^3$, isso implica (nas condições dos T. Stokes e Gauss):

1. $\displaystyle\iint_\sigma F \cdot d\vec{S}$ não depende da superfície (só da borda: $= \int_{\partial^+\sigma} G \cdot d\vec{s}$)

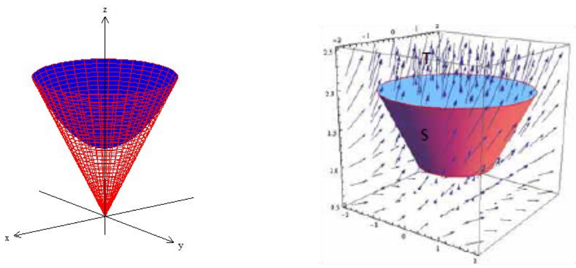


Figura 2: Figuras da internet

2. $\displaystyle\oiint_\sigma F \cdot d\vec{S} = 0$ (em superfícies fechadas)
3. $divF = 0$ (campo **solenoidal**)

viceversa,

- se $divF = 0$ e A é fortemente conexo então valem (a) e (b) e $F = rotG$.
- se $divF = 0$ mas A não é fortemente conexo então (a) e (b) poderiam não valer e logo F não seria o rotacional de um campo.

Nesta situação G é dito **potencial-vetor** do campo solenoidal F.
Existem infinitos: $G + \nabla\psi$ também é.

Definição 2.1. Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^3$ é dito **fortemente conexo** se é conexo por caminhos e vale uma das seguintes condições equivalentes:

- toda superfície fechada contida em A pode ser deformada a um ponto sem sair de A,
- dadas duas superfícies contidas em A que tenham a mesma borda, uma pode ser deformada até a outra sem sair de A,
- toda superfície fechada contida em A é a borda de uma região contida em A.

Exemplos.

- São fortemente conexos:
  - $\mathbb{R}^3$
  - $\mathbb{R}^3$ menos uma reta
  - $\mathbb{R}^3$ menos um semiplano
  - Paralelepípedos,...
- Não são fortemente conexos:
  - $\mathbb{R}^3$ menos um ponto.

Sugestão de Exercícios:

- Lista 7 do prof. Eugenio Massa: 14 a 23.
- Listas no e-disciplinas: Teorema da Divergência
- Listas no e-disciplinas: Revisão para P2, partes I e II
