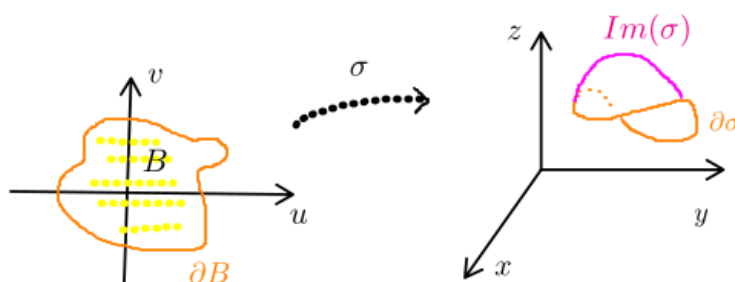


1 Teorema de Stokes no espaço

1.1 Superfícies com fronteira e orientação: noção intuitiva

Seja $\sigma : B \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada. Então,

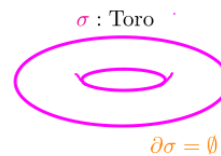
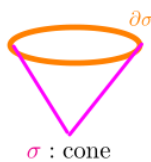
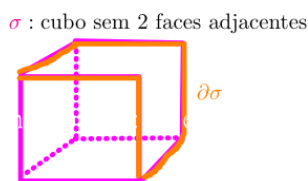
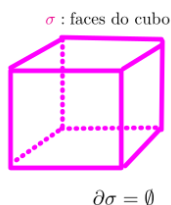
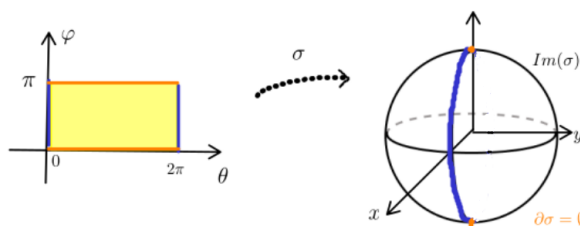
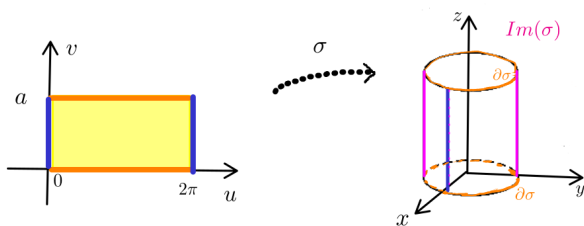
- a **fronteira (bordo)** $\partial\sigma$ da superfície $Im(\sigma)$ é constituída por curvas fechadas, simples, regulares por partes;
- as curvas da fronteira são percorridas uma única vez;
- $\partial\sigma \subset \sigma(\partial B)$.



Exemplos:

$$(1) \sigma : \begin{cases} x = r \cos u \\ y = r \sin u \\ z = v, \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, a] \end{cases}$$

$$(2) \sigma : \begin{cases} x = R \cos \theta \sin \varphi \\ y = R \sin \theta \sin \varphi \\ z = R \cos \varphi, \quad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi] \end{cases}$$



Dizemos que a superfície $Im(\sigma)$ e sua fronteira $\partial\sigma$ têm **orientação coerente** ou que $\partial\sigma$ está **orientada positivamente**, e denotaremos por $\partial^+\sigma$, quando:

“ $Im(\sigma)$ está sempre a esquerda de quem andar na $\partial\sigma$ na direção e sentido de $\hat{\mathbf{t}}$ com a cabeça na direção e sentido de $\hat{\mathbf{n}}$ ”

Analogamente: o vetor $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{t}} \wedge \hat{\mathbf{n}}$ aponta para fora da superfície (ou Regra da mão direita).

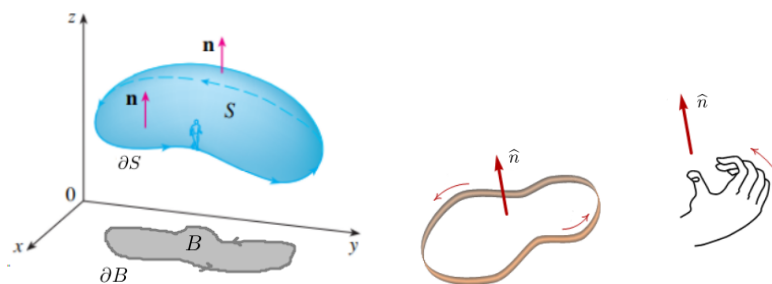


Figura 1: Stewart, vol. 2, e internet

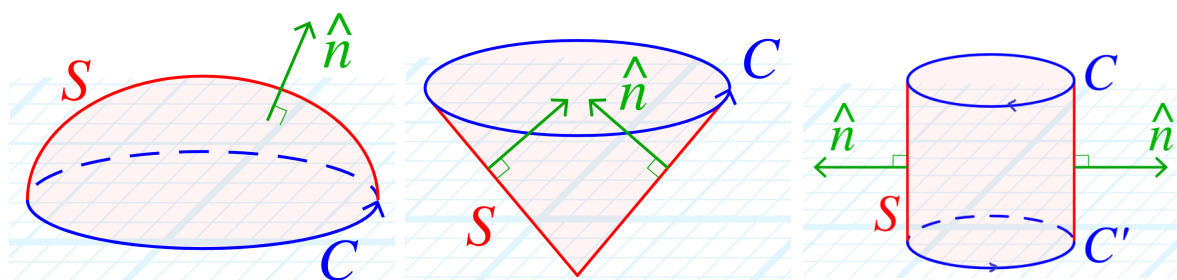


Figura 2: Coert Vonk's homepage

Lembrete: Hipóteses do Teorema de Green para o conjunto B e sua fronteira ∂B (H-TG):

Dado um aberto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ consideremos um conjunto $B \subseteq A$ com as seguintes propriedades:

- B é compacto (fechado e limitado),
- $int(B) = B' \neq \emptyset$ (interior não vazio),
- a fronteira de B é uma (ou mais) curva fechada, simples, regular por partes.
- $\partial^+ B$ a fronteira de B orientada positivamente, isto é: de forma que “ B esteja sempre a esquerda de quem olha na direção e sentido de $\hat{\mathbf{t}}$ ” (analogamente, tal que $\hat{\mathbf{t}} \wedge \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{n}}_{ext}$)

Importante: Seja $\sigma : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ superfície parametrizada regular. Se ∂B está orientada positivamente e a superfície está orientada com o campo normal dado por:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|},$$

então

$$\partial^+ \sigma = \sigma(\partial^+ B).$$

Exemplo: $\sigma(\theta, \varphi) = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)$, $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

1.2 Teorema de Stokes no espaço

Lembrete: Teorema de Stokes no plano:

$$\int_{\partial^+ B} F \cdot d\mathbf{s} \stackrel{T.S.}{=} \iint_B \text{rot } F \cdot \hat{\mathbf{k}} = \iint_B [\text{rot } F \cdot \hat{\mathbf{n}}] \stackrel{F=(P,Q,0)}{=} \int_{\sigma} \text{rot } F \cdot dS,$$

onde $Im(\sigma)$ é a porção do plano- xy limitado por ∂B e então $\partial\sigma = \partial B$.

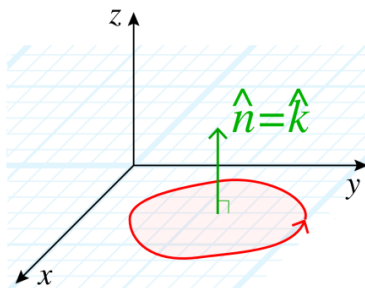


Figura 3: Figura de [Coert Vonk's homepage](#)

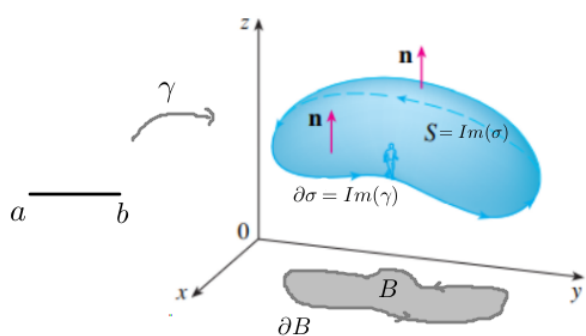
Se σ é uma superfície parametrizada em \mathbb{R}^3 cuja fronteira $\partial\sigma$ (que é a imagem de uma curva em \mathbb{R}^3) está orientada positivamente, então

$$\underbrace{\int_{\partial^+ \sigma} F \cdot d\mathbf{s}}_{\text{integral de linha de c.v.}} = ???$$

Seja

- $F = (P, Q, R) : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um c.v. de classe C^1
- $B \subset \mathbb{R}^2$ satisfazendo H-TG
- $f : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2
- $\sigma : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$ tal que
 - $Im(\sigma) \subset A$
 - σ está orientada por $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_t\|}$

(portanto, $\partial\sigma = Im(\gamma)$ e σ têm orientação coerente)



$$\sigma : \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y), \quad (x, y) \in B \end{cases}$$

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = f(x(t), y(t)), \quad t \in [a, b] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial^+\sigma} F \cdot ds &= \int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \int_a^b [P(\gamma(t))x'(t) + Q(\gamma(t))y'(t) + R(\gamma(t))z'(t)]dt \\ &\stackrel{\text{RegraCadeia}}{=} \int_a^b \{P(\star)x'(t) + Q(\star)y'(t) + R(\star)[f_x(\cdot)x'(t) + f_y(\cdot)y'(t)]\}dt \\ &= \int_a^b \{[P(\star) + R(\star)f_x(\cdot)]x'(t) + [Q(\star) + R(\star)f_y(\cdot)]y'(t)\}dt \\ &= \int_{\partial^+B} [P + Rf_x]dx + [Q + Rf_y]dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \dots\dots\dots \\
 & F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \\
 & \sigma : \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y), \quad (x, y) \in B \end{cases} \qquad \begin{aligned} & \sigma_x \wedge \sigma_y = (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1) \\ & \|\sigma_x \wedge \sigma_y\| = \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} \\ & \hat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma_x \wedge \sigma_y}{\|\sigma_x \wedge \sigma_y\|} \end{aligned} \\
 & \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

integral de linha de c.v.

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial^+ \sigma} F \cdot d\mathbf{s} &= \int_{\partial^+ B} [P + Rf_x]dx + [Q + Rf_y]dy \\
 &\stackrel{T.Green}{=} \iint_B \frac{\partial}{\partial x}[Q + Rf_y] - \frac{\partial}{\partial y}[P + Rf_x]dxdy \\
 &\stackrel{RegraCadeia}{=} \iint_B [Q_x 1 + Q_y 0 + Q_z f_x + (R_x + R_z f_x)f_y + Rf_{yx}] \\
 &\qquad\qquad\qquad - \iint_B [P_y 1 + P_z f_y + (R_y + R_z f_y)f_x + Rf_{xy}] \\
 &\stackrel{f \in C^2}{=} \iint_B [Q_x + Q_z f_x + R_x f_y - P_y - P_z f_y - R_y f_x] \\
 &= \iint_B [(Q_z - R_y)f_x + (R_x - P_z)f_y + (Q_x - P_y)] \\
 &= \iint_B [(R_y - Q_z)(-f_x) + (P_z - R_x)(-f_y) + (Q_x - P_y)] \\
 &= \iint_B rot F \cdot (-f_x, -f_y, 1) \\
 &= \iint_B rot F \cdot \frac{\sigma_x \wedge \sigma_y}{\|\sigma_x \wedge \sigma_y\|} \|\sigma_x \wedge \sigma_y\| \\
 &= \underbrace{\int_{\sigma} [rot F \cdot \hat{\mathbf{n}}] d\sigma}_{\text{integral de superfície de função escalar}} = \underbrace{\int_{\sigma} rot F \cdot d\sigma}_{\text{integral de superfície de c.v. fluxo do rot } F}
 \end{aligned}$$

Teorema (Teorema de Stokes em \mathbb{R}^3). *Seja $B \subset \mathbb{R}^2$ tal que*

- *B é compacto (fechado e limitado),*
- *$B' \neq \emptyset$,*
- *a fronteira de B é a imagem de uma curva fechada, simples, regular por partes de classe C^1 .*

Seja $\sigma : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada, regular com derivadas parciais de segunda ordem contínuas e orientada com o campo normal $\hat{\mathbf{n}}$.

Seja $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $Im(\sigma) \subseteq A$ um c.v. contínuo com derivadas contínuas.

Se $\partial\sigma$ está orientada positivamente (σ e $\partial\sigma$ têm orientação coerente), então

$$\oint_{\partial^+\sigma} F \cdot ds = \iint_{\sigma} [\text{rot}F \cdot \hat{\mathbf{n}}] d\sigma = \iint_{\sigma} \text{rot}F \cdot dS.$$

Nota. Se ∂B está orientada positivamente (como em T-HG), então a orientação da fronteira $\partial\sigma$ de σ dada por $\sigma(\partial^+ B)$ juntamente com a orientação da superfície dada por $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_t\|}$ proporcionam a orientação coerente na superfície.

Sugestão de Exercícios:

- [Lista 7](#) do prof. Eugenio Massa: 9, 10, 11, 12, 13.
- Listas no e-disciplinas: Teorema de Stokes