1 Integrais de superfície

Seja $\sigma : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular onde B é mensurável.

Lembrete: *área da imagem de σ é:* $A_\sigma = \int_B \|\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)\| \, du\, dv.$

1.1 Integral de superfície de função escalar

Seja $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ contínua com $Im(\sigma) \subseteq A$.

. . . .

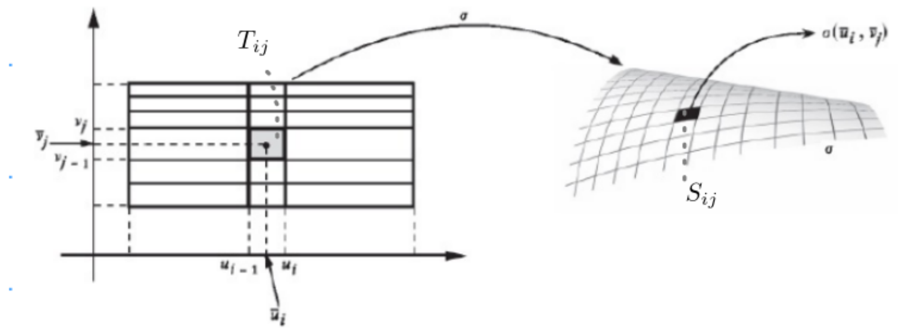


Figura 1: Guidorizzi, vol. 3: supondo B um retângulo

- $P = \{(u_i, v_j) : i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$ partição de B
- $\Delta_{ij} S$ = área de $S_{ij} \approx \|\sigma_u(u_i, v_j) \wedge \sigma_v(u_i, v_j)\| \, \Delta_i u \Delta_j v$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\sigma(u_i, v_j))\Delta_{ij} S \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\sigma(u_i, v_j)) \, \|\sigma_u(u_i, v_j) \wedge \sigma_v(u_i, v_j)\| \, \Delta_i u \Delta_j v$
- $\displaystyle\boxed{\int_\sigma f\, dS = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\sigma(u_i, v_j))\Delta_{ij} S} = \iint_B f(\sigma(u,v)) \, \|\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)\| \, dudv$

. . . .

A **integral de superfície f sobre a superfície σ** é definida por:

$$\int_\sigma f \, d\sigma := \iint_B f(\sigma(u,v)) \, \|\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)\| \, du\, dv.$$

Outras notações:

$$\int_{\sigma} f\, d\sigma = \int_{\sigma} f\, dS = \iint_{\sigma} f\, dS = \iint_{\sigma} f\, d\sigma$$

Nota.

1. $\displaystyle\int_{\sigma} 1\, d\sigma =$ área da imagem de σ
2. se $f(x, y, z)$ representa a densidade superficial de massa no ponto $(x, y, z) \in Im\sigma$, então a massa da superfície é dada por $M = \displaystyle\int_{\sigma} f\, d\sigma$.
3. Dizemos que uma superfície é **regular por partes** se pode ser decomposta em um número finito de superfícies regulares: $Im(\sigma) = \cup_{i=1}^{n} Im(\sigma_i)$ (união disjunta).

   Neste caso,

$$\int_{\sigma} f dS = \sum_{i=1}^{n} \int_{\sigma_i} f dS.$$

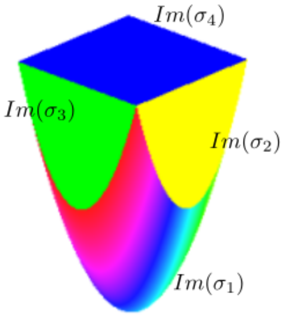


Figura 2: Figura da internet

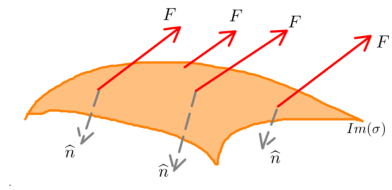
1.2 Integral de superfície de campo vetorial

Sejam $B \subseteq \mathbb{R}^2$ é mensurável ($|\partial B|_2 = 0$ e $int(B) \neq \emptyset$) e $\sigma : B \to \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada pelo campo normal $\widehat{\mathbf{n}}$ unitário.

Seja $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um c.v. contínuo com $Im(\sigma) \subseteq A$.

O **fluxo de F através da superfície σ na direção do normal $\widehat{\mathbf{n}}$ (integral de superfície de F sobre σ)** é definido por:

$$\int_\sigma F \cdot d\sigma := \int_\sigma [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}]\, d\sigma.$$



Outras notações:

$$\int_\sigma [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}]\, d\sigma = \int_\sigma [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}]\, dS = \int_\sigma F \cdot d\mathbf{S} = \int_\sigma F \cdot d\vec{\sigma} = \iint_\sigma F \cdot d\vec{\sigma}$$

Se a superfície parametrizada σ é regular, o campo normal unitário dado por

$$\widehat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|}$$

induz uma orientação na superfície. Neste caso,

$$\int_\sigma [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}]\, d\sigma = \int_B F(\sigma(u,v)) \cdot \frac{\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)}{\|\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)\|} \|\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)\|\, du\, dv = \int_B F(\sigma(u,v)) \cdot [\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)]\, du\, dv.$$

Atenção: o fluxo na direção oposta de $\widehat{\mathbf{n}}$ terá sinal oposto.

Nota. Se σ é uma superfície parametrizada regular por partes, $Im(\sigma) = \cup_{i=1}^{n} Im(\sigma_i)$ (união disjunta), então

$$\int_\sigma F \cdot dS = \sum_{i=1}^{n} \int_{\sigma_i} F \cdot dS,$$

onde o campo normal $\widehat{\mathbf{n}}$ da superfície $Im(\sigma)$ coincide com o campo normal $\widehat{\mathbf{n}}_i$ da superfície $Im(\sigma_i)$ para cada $i = 1, \ldots, n$ (isto é, $\widehat{\mathbf{n}}(\sigma_i(u, v)) = \widehat{\mathbf{n}}_i(\sigma_i(u, v))$ para todo (u, v))

Resumo: Para calcular

- integrais de superfície de funções escalares $\displaystyle\int_\sigma f dS$:
  1. "parametrizar a superfície": encontrar $B \subset \mathbb{R}^2$ e função $\sigma : B \to \mathbb{R}^3$ tal que $Im(\sigma)$ seja a superfície desejada;
  2. encontrar o vetor normal $\sigma_u \wedge \sigma_v$;
  3. calcular a integral dupla $\displaystyle\iint_B f(\sigma(u, v))||\sigma_u \wedge \sigma_v||dA$.
- integrais de superfície de campos vetoriais $\displaystyle\int_\sigma F \cdot dS$:
  1. parametrizar a superfície;
  2. encontrar o vetor normal $\widehat{\mathbf{n}} = \sigma_u \wedge \sigma_v$;
  3. decidir se $\widehat{\mathbf{n}}$ fornece a orientação pedida:
     (a) se sim, calcular a integral de superfície da função escalar $F \cdot \dfrac{\widehat{\mathbf{n}}}{||\widehat{\mathbf{n}}||}$;
     (b) se não, calcular a integral de superfície da função escalar $F \cdot \left(-\dfrac{\widehat{\mathbf{n}}}{||\widehat{\mathbf{n}}||}\right)$, ou $\displaystyle\int_\sigma F \cdot dS$ tem o valor oposto do valor encontrado no item (a).
- em ambos casos, devemos entender que se σ é uma "superfície" não parametrizada, então deve-se calcular tais integrais sobre uma superfície parametrizada (ou união de superfícies parametrizadas) cuja imagem coincida com a "superfície" pedida.

Sugestão de Exercícios:

- Lista 7 do prof. Eugenio Massa: 6, 7, 8.
- Listas no e-disciplinas: Integrais de Superfície