

1 Superfícies

Definição. Chamamos de **Superfície parametrizada em \mathbb{R}^n** uma função contínua

$$\sigma : B \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (n \geq 3).$$

- **Superfície:** a imagem de σ ,

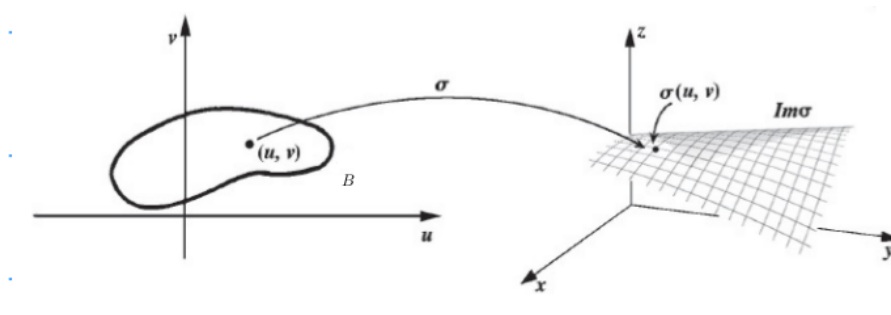


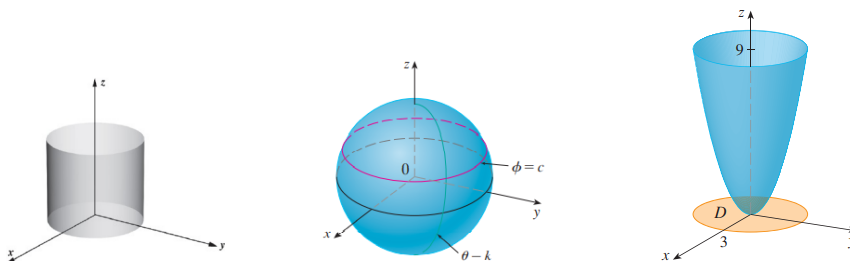
Figura 1: Guidorizzi, vol. 3 ($n = 3$)

- **equação paramétrica/vetorial da superfície (parametrização):** a lei $n = 3$:

$$\sigma : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in B \qquad \sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in B$$

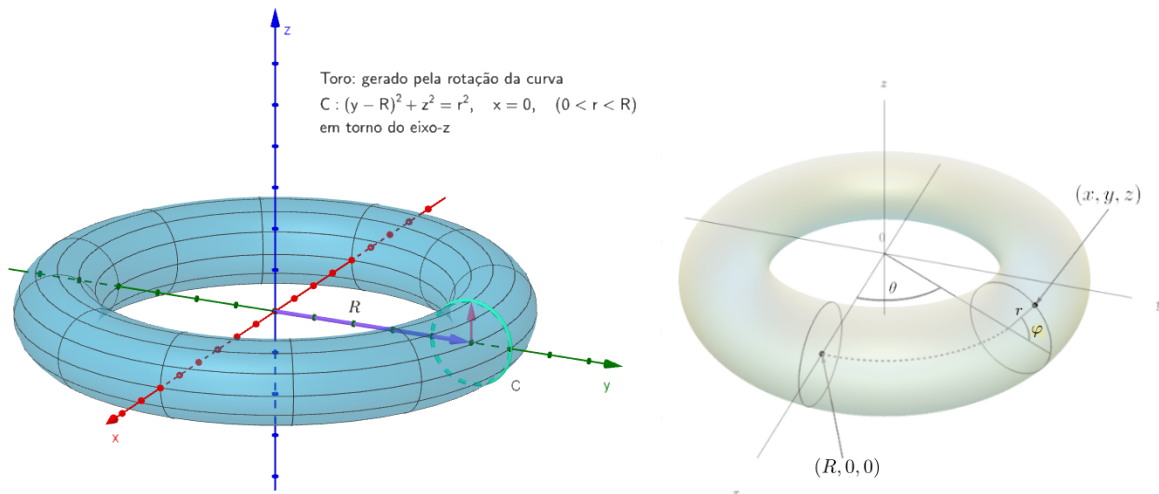
Exemplos: superfícies

1. $\sigma(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$
2. $\sigma(\varphi, \theta) = R(\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)$, $(\varphi, \theta) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ ($R > 0$)
3. $\sigma(u, v) = (u, v, f(u, v))$, $(u, v) \in B \subset \mathbb{R}^2$, onde $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ contínua.

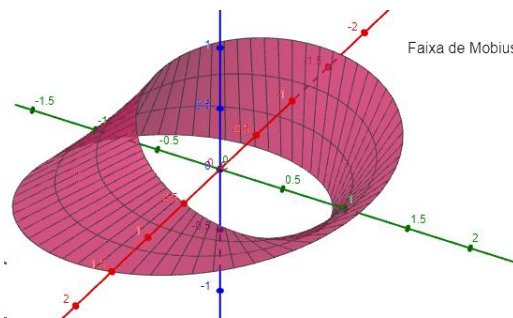


Figuras do Guidorizzi e Stewart

4. $\sigma(\varphi, \theta) = (\varphi, \theta) \mapsto (\cos(\theta)[R + r \cos(\varphi)], \sin(\theta)[R + r \cos(\varphi)], r \sin(\varphi))$,
 $(\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ ($0 < r < R$)



5. $\sigma(u, v) = (\cos u(1 + v \cos(u/2)), \sin u(1 + v \cos(u/2)), v \sin(u/2))$,
 $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$



6. $\sigma(u, v) = (\cos u(1 + v \cos u), \sin u(1 + v \cos u), v \sin u)$,
 $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

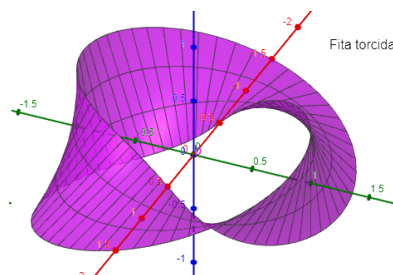


Figura 2: Toro, Faixa de Möbius, Fita torcida (Figuras geradas no Geogebra e da internet)

Hiperplano Tangente: $\sigma : B \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$)

Seja $B' = \text{int}(B)$ o interior do conjunto $B \subset \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{p}_0 = (u_0, v_0) \in B'$.

Se σ é contínua com derivadas parciais contínuas em \mathbf{p}_0 e $\sigma_u(\mathbf{p}_0), \sigma_v(\mathbf{p}_0) \neq 0$ então

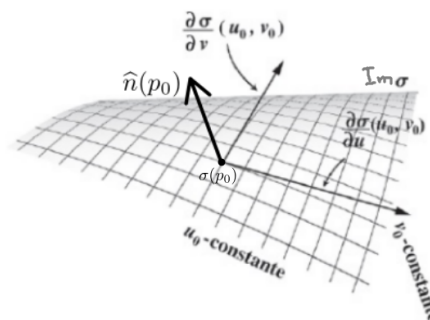
- $\sigma_u(\mathbf{p}_0)$ é um **vetor tangente à superfície**, no ponto $\sigma(\mathbf{p}_0)$.
- $\sigma_v(\mathbf{p}_0)$ é um **vetor tangente à superfície**, no ponto $\sigma(\mathbf{p}_0)$.
- se $\sigma_u(\mathbf{p}_0), \sigma_v(\mathbf{p}_0)$ são linearmente independentes então definem um hiperplano que passa pelo ponto $\sigma(\mathbf{p}_0)$:

$$\pi(s, t) = \sigma(\mathbf{p}_0) + \sigma_u(\mathbf{p}_0)s + \sigma_v(\mathbf{p}_0)t, \quad (s, t \in \mathbb{R}). \quad (\text{equação vetorial})$$

$\pi : \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \sigma(\mathbf{p}_0)) = 0$ é equação geral de um hiperplano passando por $\sigma(\mathbf{p}_0)$ e tendo \mathbf{a} como vetor normal

Se $n = 3$, então $\sigma_u(\mathbf{p}_0), \sigma_v(\mathbf{p}_0)$ são linearmente independentes se e somente se $\sigma_u(\mathbf{p}_0) \wedge \sigma_v(\mathbf{p}_0) \neq 0$. Portanto

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p}_0) = \frac{\sigma_u(\mathbf{p}_0) \wedge \sigma_v(\mathbf{p}_0)}{\|\sigma_u(\mathbf{p}_0) \wedge \sigma_v(\mathbf{p}_0)\|}$$



é um **vetor unitário perpendicular à superfície**, no ponto $\sigma(\mathbf{p}_0)$.

Neste caso, uma equação do plano tangente à superfície no ponto $\sigma(\mathbf{p}_0)$ é:

$$\pi : \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p}_0) \cdot (\mathbf{x} - \sigma(\mathbf{p}_0)) = 0, \quad (\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

Definição. Dizemos que a superfície é **regular** se σ é contínua com derivadas parciais contínuas, e as derivadas parciais σ_u, σ_v são linearmente independentes em cada ponto $(u, v) \in B$.¹

Neste caso, o plano π é o **hiperplano tangente à superfície**, no ponto $\sigma(\mathbf{p}_0)$.

Nota. σ regular \implies superfície ($\text{Im}\sigma$) admite plano tangente em todo ponto.

A recíproca é verdadeira?

¹ $\text{Im}\sigma$ possui vetor normal em todos pontos, exceto possivelmente nos pontos da fronteira

Exemplos: superfícies regulares, planos tangentes

1. Esfera de raio $R > 0$: [Wolfram](#)

$$\begin{aligned}\sigma &: [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 : \\ (\varphi, \theta) &\mapsto R(\cos(\theta)\sin(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\varphi))\end{aligned}$$

$$\sigma_\varphi = R(\cos(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\cos(\varphi), -\sin(\varphi))$$

$$\sigma_\theta = R(-\sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta)\sin(\varphi), 0)$$

$$\sigma_\varphi \wedge \sigma_\theta = R^2(\cos(\theta)\sin^2(\varphi), \sin(\theta)\sin^2(\varphi), \cos(\varphi)\sin(\varphi))$$

$$\|\sigma_\varphi \wedge \sigma_\theta\| = R^2 \sin(\varphi)$$

.....
A esfera é regular?²

A esfera tem plano tangente em todos seus pontos?

O que ocorre em $\sigma(\theta, 0) = (0, 0, a)$ e $\sigma(\theta, \pi) = (0, 0, -a)$??

.....

Nota. superfície ($Im\sigma$) admite plano tangente em todo ponto $\nRightarrow \sigma$ regular

.....

2. Gráfico de $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ com $A \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\sigma : A \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$$

$$\sigma_x = (1, 0, f_x(x, y))$$

$$\sigma_y = (0, 1, f_y(x, y))$$

$$\sigma_x \wedge \sigma_y = (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1)$$

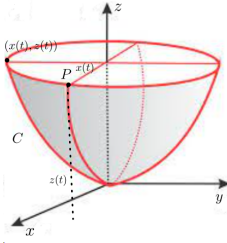
$$\|\sigma_x \wedge \sigma_y\| = \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}$$

Portanto, a superfície é regular se f é de classe C^1 em A .

²outros autores podem definir superfície regular de forma distinta o que pode incluir superfícies que neste contexto não são regulares

3. **Superfícies de revolução:** S obtida pela rotação da curva C em torno do eixo- z

$$C : \gamma(t) = (x(t), z(t)), \quad t \in [a, b] \quad (x \geq 0);$$



$P = (x, y, z) \in S \iff P$ pertence a uma circunferência de raio $x(t)$ na altura $z(t)$.

Uma parametrização para S é:

$$\sigma(t, \theta) = (x(t) \cos \theta, x(t) \sin \theta, z(t)), \quad t \in [a, b], \theta \in [0, 2\pi].$$

$$\sigma_t = (x'(t) \cos(\theta), x'(t) \sin(\theta), z'(t))$$

$$\sigma_\theta = (-x(t) \sin(\theta), x(t) \cos(\theta), 0)$$

$$\sigma_t \wedge \sigma_\theta = (-x(t)z'(t) \cos(\theta), -x(t)z'(t) \sin(\theta), x(t)x'(t))$$

$$\|\sigma_t \wedge \sigma_\theta\| = x(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (z'(t))^2} = x(t)|\gamma'(t)|$$

Portanto, a superfície de revolução é regular se γ é regular de classe C^1 e $x > 0$.

4. **Toro de raios $r < R$:** [Wolfram](#)

$$\sigma : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\varphi, \theta) \mapsto (\cos(\theta)[R + r \cos(\varphi)], \sin(\theta)[R + r \cos(\varphi)], r \sin(\varphi))$$

$$\sigma_\varphi = (-\cos(\theta)r \sin(\varphi), -\sin(\theta)r \sin(\varphi), r \cos(\varphi))$$

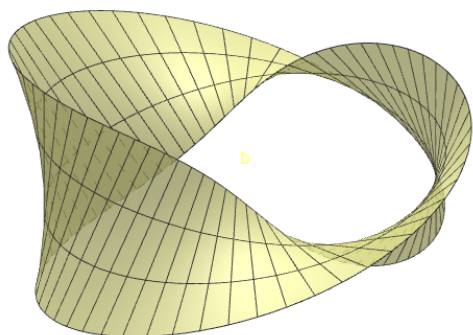
$$\sigma_\theta = (-\sin(\theta)[R + r \cos(\varphi)], \cos(\theta)[R + r \cos(\varphi)], 0)$$

$$\sigma_\varphi \wedge \sigma_\theta = r[R + r \cos(\varphi)](-\cos(\theta) \cos(\varphi), -\sin(\theta) \cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

$$\|\sigma_\varphi \wedge \sigma_\theta\| = r[R + r \cos(\varphi)]$$

Portanto, o toro é uma superfície regular.

fita torcida (orientável) / fita de Moebius (não orientável)
 são regulares? (verifique!) Wolfram: vetor normal a Moebius



”quero

andar só pelo lado de fora”

Dizemos que uma superfície é **orientável** quando é possível escolher versor normal unitário \hat{n} em cada ponto da superfície de modo que \hat{n} varie continuamente sobre a superfície (dizemos **superfície orientada pelo campo normal \hat{n} unitário** ou que \hat{n} é uma **orientação da superfície**).

Dada uma superfície parametrizada $\sigma : B \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, os vetores

$$\hat{n}_1(\mathbf{p}_0) = \frac{\sigma_u(\mathbf{p}_0) \wedge \sigma_v(\mathbf{p}_0)}{\|\sigma_u(\mathbf{p}_0) \wedge \sigma_v(\mathbf{p}_0)\|}, \quad \hat{n}_2 = -\hat{n}_1$$

são vetores unitários normais a $Im(\sigma)$. Portanto, a superfície é orientável se \hat{n}_1 é contínuo em $int(B)$.

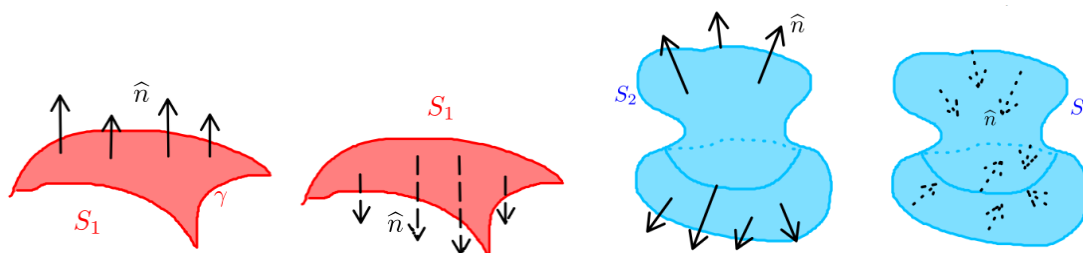


Figura 3: É comum dizer: em S_1 o campo normal aponta “para cima” (componente \hat{k} de \hat{n} positiva) ou “para baixo” (componente \hat{k} negativa). Em S_2 o campo normal aponta “para fora” (usualmente chamada **orientação positiva** e \hat{n} de **normal exterior**) ou “para dentro”.

Nota.

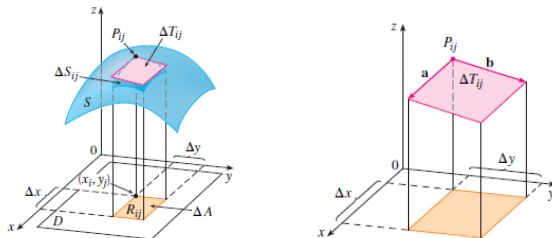
S_1 possui fronteira (bordo) que é uma curva em \mathbb{R}^3 : $\partial S_1 = \gamma$.

S_2 não possui fronteira: $\partial S_1 = \emptyset$.

S_2 é uma superfície **fechada** (é a fronteira de uma região “sólida” em \mathbb{R}^3).

2 Área de uma superfície

Lembrete: Área da superfície dada por gráfico de função escalar de duas variáveis: $\sigma : A \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$, ver [Slide 4- Aplicações de integral múltipla](#):



$$\mathbf{a} := (1, 0, f_x(x_i^*, y_j^*))\Delta_i x = \sigma_x(x_i^*, y_j^*)\Delta_i x, \quad \mathbf{b} := (0, 1, f_y(x_i^*, y_j^*))\Delta_j y = \sigma_y(x_i^*, y_j^*)\Delta_j y$$

Temos $\Delta S_{ij} = A(S_{ij}) \approx A(T_{ij}) = \Delta T_{ij}$. A área do paralelogramo é:

$$\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\| = \sqrt{f_x^2(x_i^*, y_j^*) + f_y^2(x_i^*, y_j^*) + 1} \Delta_i x \Delta_j y = \|\sigma_x(x_i^*, y_j^*) \wedge \sigma_y(x_i^*, y_j^*)\| \Delta_i x \Delta_j y$$

A área da superfície é:

$$A(S) = \iint_A \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} \, dx dy = \iint_A \|\sigma_x(x, y) \wedge \sigma_y(x, y)\| \, dx dy$$

Seja $\sigma : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular onde $B \subseteq \mathbb{R}^2$ é mensurável.

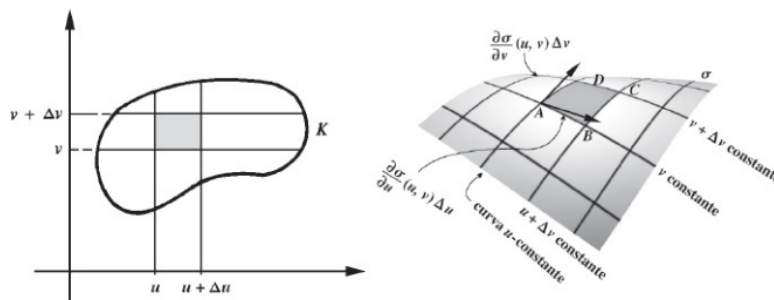


Figura 4: Guidorizzi, vol. 3

Analogamente ao caso de superfícies que são gráficos de funções, aproximamos a área $A(S_{ij})$ do “paralelogramo curvilíneo” $ABCD$ pela área do paralelogramo determinado pelos vetores $\mathbf{a} = \sigma_u(u_i^*, v_j^*)\Delta_i u$ e $\mathbf{b} = \sigma_v(u_i^*, v_j^*)\Delta_i v$ (que está contido no plano tangente). Temos que $A(S_{ij}) \approx \|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\|$.

Definição. A **área da imagem de σ** é dada por

$$A_\sigma = \iint_B \|\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v)\| \, du \, dv.$$

Sugestão de Exercícios:

- [Lista 7](#) do prof. Eugenio Massa: 1, 2, 3, 4, 5.
- Listas no e-disciplinas: Superfícies Parametrizadas