Conteúdo

1 Máximos e mínimos

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ com $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{p} \in D$:

- $\mathbf{p}$ é **ponto de máximo global (absoluto) (PMA) de f** se

$$\forall\, \mathbf{x} \in D \text{ vale } f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{p})$$

  – $f(\mathbf{p})$ é o **valor máximo global (absoluto) (VMA) de f**.

- $\mathbf{p}$ é **ponto de máximo local (PML) de f** se

$$\exists\, \delta : \forall\, \mathbf{x} \in D \cap B_\delta(\mathbf{p}) \text{ vale } f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{p})$$

  – $f(\mathbf{p})$ é o **valor máximo local (VML) de f**.

- $\mathbf{p}$ é **ponto de mínimo global (absoluto) (pma) de f** se

$$\forall\, \mathbf{x} \in D \text{ vale } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{p})$$

  – $f(\mathbf{p})$ é o **valor mínimo global (absoluto) (vma) de f**.

- $\mathbf{p}$ é **ponto de mínimo local (pml) de f** se

$$\exists\, \delta : \forall\, \mathbf{x} \in D \cap B_\delta(\mathbf{p}) \text{ vale } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{p})$$

  – $f(\mathbf{p})$ é o **valor mínimo local (vml) de f**.

- $\mathbf{p}$ é **ponto de extremo (p.e.) (local ou global) de f** se for ponto de máximo ou de mínimo (local ou global) de f.

1.1 Máximos e Mínimos interiores (livres)

Seja $\mathbf{p}$ um ponto interior do domínio da função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Teorema (Análogo do T. de Fermat).
Seja $\mathbf{p}$ um ponto de extremo.

- Se f é derivável em $\mathbf{p}$ na direção $\widehat{\mathbf{v}}$ **então** $D_{\widehat{\mathbf{v}}}f(\mathbf{p}) = 0$.
- Se f é derivável em $\mathbf{p}$ **então** $\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$.

Geometricamente $(n = 2)$:
se $\mathbf{p}$ é ponto de extremo de f e $F(x, y, z) = z - f(x, y)$, então $\nabla F(\mathbf{p}) = (0, 0, 1)$ é normal ao plano tangente ao gráf. de f em $(\mathbf{p}, f(\mathbf{p}))$, o que implica que o plano tangente ao gráfico de f em $(\mathbf{p}, f(\mathbf{p}))$ é paralelo ao plano xy.

Dizemos que

- $\mathbf{p}$ é **ponto crítico (pc) de f** se vale $\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$.

Consequências:

- $\mathbf{p}$ *ponto de extremo* $\Longrightarrow$ $\mathbf{p}$ *é ponto crítico;*
- $\nabla f(p) \neq \mathbf{0} \Longrightarrow$ $\mathbf{p}$ *não é ponto de extremo;*
- $\mathbf{p}$ *ponto crítico* $\not\Rightarrow$ $\mathbf{p}$ *é ponto de extremo.*

Dizemos que

- p é **ponto de sela de f** se for um ponto crítico mas nem máximo nem mínimo:

$$\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0} \text{ e } \forall\, \delta > 0 : \exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D \cap B_\delta(\mathbf{p}) \text{ tais que } f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{p}) > f(\mathbf{y})$$

RESUMO: Possíveis pontos de extremo:

- pontos *interiores do domínio* que sejam *críticos*,
- pontos *onde f não é derivável*,
- pontos *na borda do domínio*,
- pontos *onde f não é contínua*.

1.1.1 Critério da derivada segunda

. . . .

Em Cálculo 1 ($n = 1$): se p é um pc tal que $f'(p) = 0$, vale:
• Se $f''(p)$ é positiva então p é ponto de mínimo local
• Se $f''(p)$ é negativa então p é ponto de máximo local
• Se f'' é "*indefinida*"(isto é, muda de sinal em torno de p) então p é ponto de inflexão
• Se $f''(p)$ é nula então nada podemos dizer

. . . .

Para $n \geq 2$, consideramos a Matriz Hessiana de f em $\mathbf{p}$:

$$H_f(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{p}) & \dots & f_{x_1x_n}(\mathbf{p}) \\ \dots & f_{x_ix_j}(\mathbf{p}) & \dots \\ f_{x_nx_1}(\mathbf{p}) & \dots & f_{x_nx_n}(\mathbf{p}) \end{bmatrix}$$

(OBS: ela é simétrica se $f \in \mathcal{C}^2(B_\delta(\mathbf{p}))$).

Teorema.
Se $f \in \mathcal{C}^2(B_\delta(\mathbf{p}))$ e $\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ vale:
• Se $H_f(\mathbf{p})$ é **definida positiva** então $\mathbf{p}$ é ponto de mínimo local
• Se $H_f(\mathbf{p})$ é definida negativa então $\mathbf{p}$ é ponto de máximo local
• Se $H_f(\mathbf{p})$ é *indefinida* então $\mathbf{p}$ é ponto de sela
• Se $H_f(\mathbf{p})$ é semidefinida então nada podemos dizer

---

Geometricamente: $H_f(\mathbf{p})$ permite saber se, perto de $\mathbf{p}$, o gráfico de f está acima do seu plano tangente em $\mathbf{p}$, abaixo dele, ou o cruza.

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ simétrica a função da forma

$$Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_jx_i$$

é chamada **forma quadrática em n variáveis**. Dizemos

- **a matriz A é definida positiva**
  se $Q(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- **a matriz A é definida negativa**
  se $Q(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} < 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- **a matriz A é** *indefinida*
  se existem $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$: $Q(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} > 0$ e $Q(\mathbf{y}) = A\mathbf{y}\cdot\mathbf{y} < 0$
- **a matriz A é** semidefinida **positiva**
  se $Q(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ mas existe $\mathbf{z} \neq \mathbf{0} : Q(\mathbf{z}) = A\mathbf{z}\cdot\mathbf{z} = 0$
- **a matriz A é** semidefinida **negativa**
  se $Q(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} \leq 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ mas existe $\mathbf{z} \neq \mathbf{0} : Q(\mathbf{z}) = A\mathbf{z}\cdot\mathbf{z} = 0$

Condição necessária e suficiente para a matriz A ser definida:

- $det(A_k) > 0$ para todo $k = 1, ..n \iff A$ definida positiva.
- $(-1)^k det(A_k) > 0$ para todo $k = 1, ..n \iff A$ definida negativa.

onde A_k é a matriz $k \times k$ com as primeiras k linhas e k colunas de A.

Condição para $n = 2$: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

- $det(A) = ac - b^2 > 0$ e $a > 0 \iff A$ é **definida positiva**;
- $det(A) = ac - b^2 > 0$ e $a < 0 \iff A$ é definida negativa;
- $det(A) = ac - b^2 < 0 \iff A$ *indefinida*;
- $det(A) = ac - b^2 = 0$ e a *ou* $c > 0 \iff A$ é semidefinida positiva;
- $det(A) = ac - b^2 = 0$ e a *ou* $c < 0 \iff A$ é semidefinida negativa;
- $a = b = c = 0 \iff A$ é semidefinida positiva e negativa.

Caso $n = 2$: $\mathbf{p} = (a, b)$

$$H_f(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} f_{xx}(\mathbf{p}) & f_{xy}(\mathbf{p}) \\ f_{yx}(\mathbf{p}) & f_{yy}(\mathbf{p}) \end{bmatrix}$$

Teorema. Sejam $f \in \mathcal{C}^2(B_\delta((a,b)))$ e $\det H_f(a,b) = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b)$.

Se $\nabla f(a,b) = \mathbf{0}$ então vale:

- Se $\det H_f(a,b) > 0$ **e** $f_{xx}(a,b) > 0$ então $\mathbf{p}$ é ponto de mínimo local
- Se $\det H_f(a,b) > 0$ e $f_{xx}(a,b) < 0$ então $\mathbf{p}$ é ponto de máximo local
- Se $\det H_f(a,b) < 0$ então $\mathbf{p}$ é ponto de sela
- Se $\det H_f(a,b) = 0$ então nada podemos dizer

Uma demonstração do Teorema acima pode ser encontrada em: **"O Hessiano em duas e várias variáveis"**, do Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira - IME - USP (veja Teorema 6).

1.2 Máximos e Mínimos Absolutos

Definição

- Um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito **compacto** quando é fechado e limitado.

Teorema (Teorema de Weiestrass em $\mathbb{R}^n$).
Seja $f : D \to \mathbb{R}$ contínua, sendo D compacto, **então**

$$\textbf{existem } \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D : \; f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_2) \; \forall \mathbf{x} \in D.$$

Consequência: Se f é contínua em um compacto D e ∇f existe nos pontos interiores de D, então os pontos de máximo e mínimo absolutos de f estão entre os pontos críticos e os pontos de máximos e mínimos de f restrita à fronteira de D.
O **maior valor** dentre os valores de f calculada nos p.c. e nos pontos de máximos da fronteira é o **Valor Máximo Absoluto**.
O **menor valor** dentre os valores de f calculada nos p.c. e nos pontos de mínimos da fronteira é o **Valor Mínimo Absoluto**.

2 Método dos Multiplicadores de Lagrange

2.1 Um vínculo

Objetivo: encontrar pontos de extremo de f no conjunto $N = \{\mathbf{x} \in A : \; g(\mathbf{x}) = 0\}$, onde $f, g \in \mathcal{C}^1(A)$ e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto.

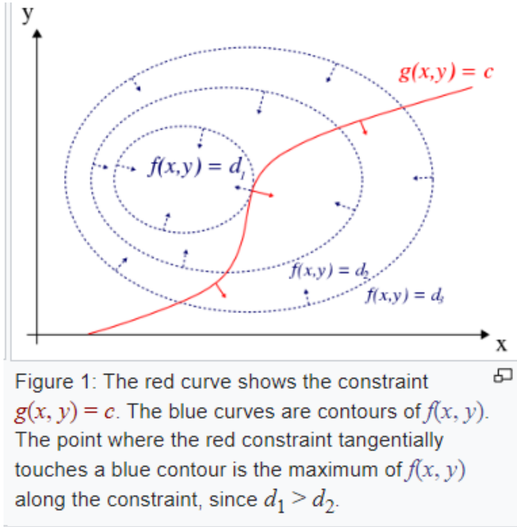

Figura 1: Wikipedia

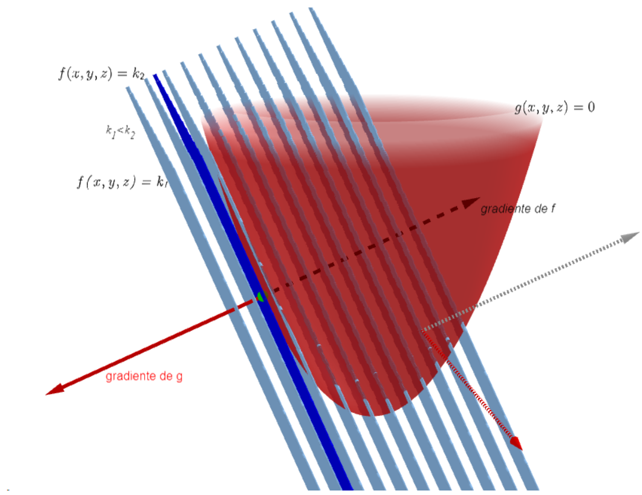

Figura 2: Geogebra

Teorema.
Sejam $f, g \in \mathcal{C}^1(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $N = \{\mathbf{x} \in A : \; g(\mathbf{x}) = 0\}$.
Se $\mathbf{p} \in N$ é ponto de extremo de f no conjunto N e $\nabla g(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$, **então** existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(\mathbf{p}) = \lambda \nabla g(\mathbf{p})$.

2.2 Dois ou mais vínculos

Objetivo: encontrar pontos de extremo de f em $N = \{\mathbf{x} \in A : \; g_i(\mathbf{x}) = 0 : \; i = 1, .., k\}$, onde $f, g_i \in \mathcal{C}^1(A), \; i = 1, .., k$, e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto.

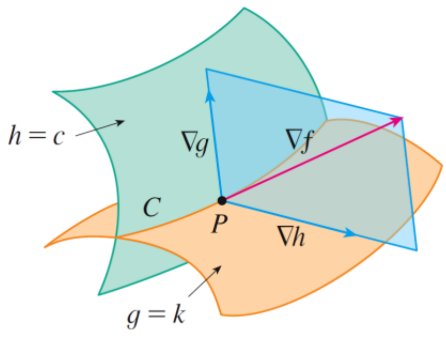

Figura 3: Stewart, Cálculo, vol. 2

Teorema.
Sejam $f, g_i \in \mathcal{C}^1(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $N = \{\mathbf{x} \in A : \; g_i(\mathbf{x}) = 0 : \; i = 1, .., k\}$.

Se $\mathbf{p} \in N$ é ponto extremal de f no conjunto N e os vetores $\nabla g_i(\mathbf{p})$, $i = 1, .., k$ são linearmente independentes, **então**

existem $\lambda_1, .., \lambda_k \in \mathbb{R}$ tais que $\nabla f(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{p})$.

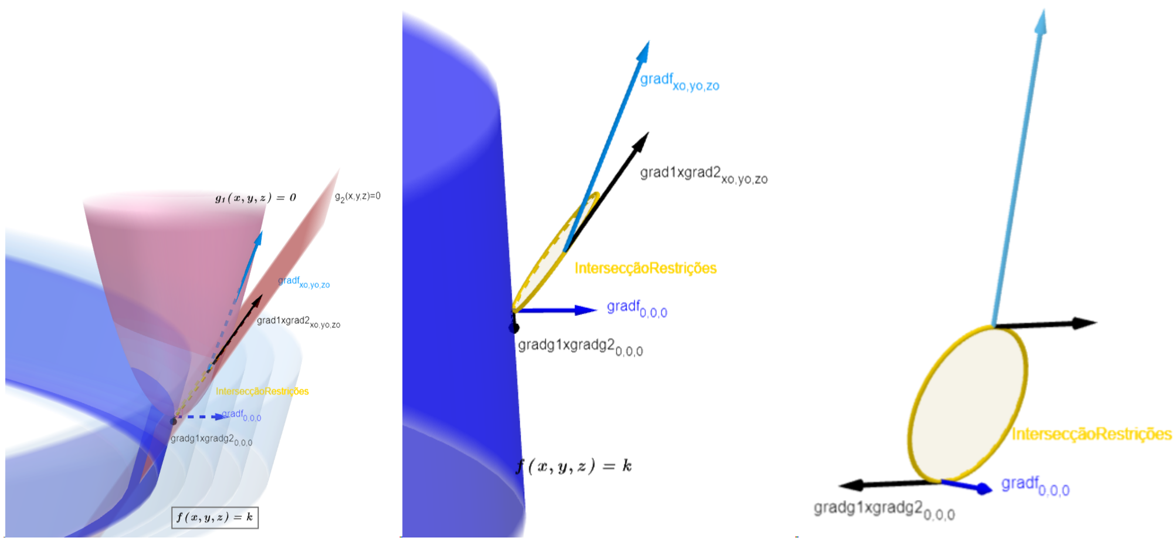

Figura 4: Geogebra: $\nabla f(\mathbf{p}) \perp (\nabla g_1(\mathbf{p}) \wedge \nabla g_2(\mathbf{p}))$

Consequência: Encontrando as soluções $(\mathbf{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ do sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x}) = 0 \\ \vdots \\ g_k(\mathbf{x}) = 0 \end{cases}$$

determina-se os candidatos $\mathbf{x}$ a pontos de máximo ou mínimo de f sujeita às condições $g_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, .., k$.

Se f é contínua e N é compacto, então o **valor máximo absoluto** (resp. valor mínimo absoluto) de f em N é o **maior** (resp. menor) valor dentre os valores $f(\mathbf{x})$.

Se f não é contínua ou N não é compacto, não existe regra geral!!