1 Teorema de Green (Teoremas de Gauss e Stokes no plano)

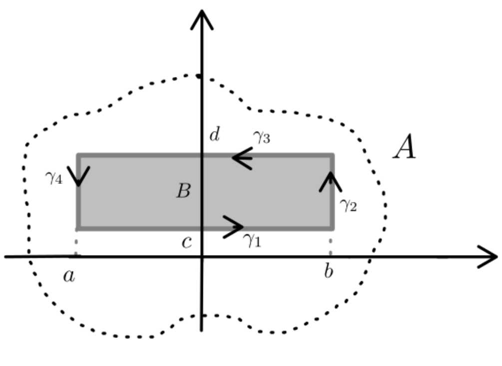


Figura 1: $\int_{\partial B} F \cdot d\mathbf{s} = ??$

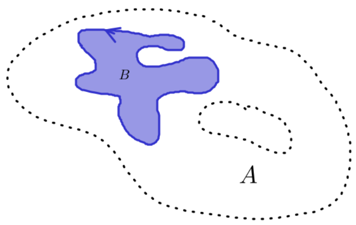
- $B = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, com $B \subset A$ e A um aberto
- γ fronteira de B orientada no sentido anti-horário: **positivamente**, $\partial^+ B$
- $F = (P, Q)$ c.v. contínuo com derivadas contínuas em A que contém B
- $\displaystyle\int_\gamma F \cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} F \cdot ds = \sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} Pdx + Qdy$
- $\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = c, \quad t \in [a, b] \end{cases}$ $\qquad \gamma_2 : \begin{cases} x = b \\ y = t, \quad t \in [c, d] \end{cases}$
- $\gamma_3 = -\tilde{\gamma}_3, \ \tilde{\gamma}_3 : \begin{cases} x = t \\ y = d, \quad t \in [a, b] \end{cases}$ $\qquad \gamma_4 = -\tilde{\gamma}_4, \ \tilde{\gamma}_4 : \begin{cases} x = a \\ y = t, \quad t \in [c, d] \end{cases}$
-

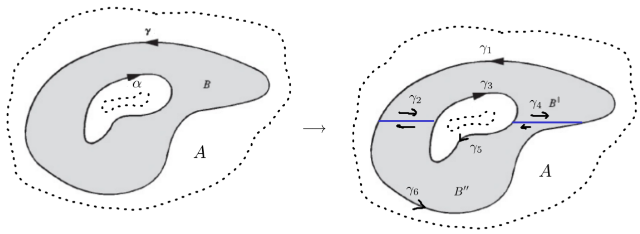
$$\begin{aligned}
\int_\gamma F \cdot d\mathbf{s} &= \int_{\gamma_1} Pdx + \int_{\gamma_2} Qdy - \int_{\tilde{\gamma}_3} Pdx - \int_{\tilde{\gamma}_4} Qdy \\
&= \int_a^b P(t, c)dt + \int_c^d Q(b, t)dt - \int_a^b P(t, d)dt - \int_c^d Q(a, t)dt
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
\int_\gamma F\cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b P(t,c)dt + \int_c^d Q(b,t)dt - \int_a^b P(t,d)dt - \int_c^d Q(a,t)dt \\
&= \int_c^d [Q(b,t)-Q(a,t)]dt - \int_a^b [P(t,d)-P(t,c)]dt \\
&= \int_c^d [Q(b,v)-Q(a,v)]dv - \int_a^b [P(u,d)-P(u,c)]du \\
&= \int_c^d \left[\int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x}(u,v)du\right] dv - \int_a^b \left[\int_c^d \frac{\partial P}{\partial y}(u,v)dv\right] du \\
&\overset{T.Fubini}{=} \int_a^b \int_c^d \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(u,v) - \frac{\partial P}{\partial y}(u,v)\right] dvdu \\
&\overset{T.Fubini}{=} \iint_B \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]
\end{aligned}$$

- Portanto, se F é um c.v. de classe C^1 em A que contém B, então
$$\oint_\gamma F\cdot d\mathbf{s} = \oint_{\partial^+ B} Pdx + Qdy = \iint_B \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]$$

. . . .





$$\begin{aligned}
\iint_B \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dA &= \iint_{B'} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dA + \iint_{B''} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dA \\
&= \oint_{\partial^+ B'} Pdx + Qdy + \oint_{\partial^+ B''} Pdx + Qdy \\
&= \left[\int_{\gamma_1} Pdx + Qdy + \int_{\gamma_2} Pdx + Qdy + \int_{\gamma_3} Pdx + Qdy + \int_{\gamma_4} Pdx + Qdy\right] \\
&+ \left[\int_{\gamma_5} Pdx + Qdy - \int_{\gamma_2} Pdx + Qdy + \int_{\gamma_6} Pdx + Qdy - \int_{\gamma_4} Pdx + Qdy\right] \\
&= \int_{\gamma_1} Pdx + Qdy + \int_{\gamma_6} Pdx + Qdy + \int_{\gamma_3} Pdx + Qdy + \int_{\gamma_5} Pdx + Qdy \\
&= \int_\gamma Pdx + Qdy + \int_\alpha Pdx + Qdy = \int_{\partial^+ B} Pdx + Qdy
\end{aligned}$$

Hipóteses para o conjunto B e sua fronteira ∂B (H-TG):

Dado um aberto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ consideremos um conjunto $B \subseteq A$ com as seguintes propriedades:

- B é compacto (fechado e limitado),
- $int(B) = B' \neq \emptyset$ (interior não vazio),
- a fronteira de B é uma (ou mais) curva fechada, simples, regular por partes.
- $\partial^+ B$ a fronteira de B orientada positivamente, isto é: de forma que "B esteja sempre a esquerda de quem olha na direção e sentido de $\widehat{\mathbf{t}}$" (analogamente, tal que $\widehat{\mathbf{t}} \wedge \widehat{k} = \widehat{\mathbf{n}}_{ext}$)

Teorema 1.1 (**Teorema de Green**). *Seja $A \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto e $B \subseteq A$ como em H-TG.*

Sejam $P, Q : A \to \mathbb{R}$ contínuas com derivadas contínuas.

Então

$$\iint_B \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \oint_{\partial^+ B} P dx + Q dy$$

Aplicação:

Várias combinações para P e Q podem ser consideradas de forma que

$$Q_x - P_y = 1,$$

as mais tradicionais são:

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = x$$

$$P(x, y) = -y, \quad Q(x, y) = 0$$

$$P(x, y) = -\tfrac{y}{2}, \quad Q(x, y) = \tfrac{x}{2}.$$

Assim,

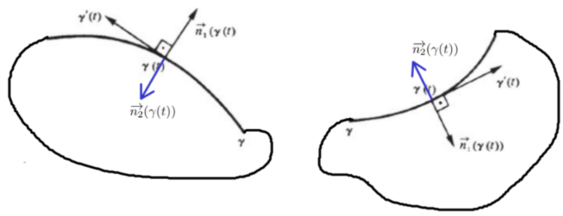
$$|B|_2 = \iint_B 1\, dxdy = \oint_{\partial^+ B} x\, dy = \oint_{\partial^+ B} -y\, dx = \frac{1}{2} \oint_{\partial^+ B} x\, dy - y\, dx.$$

Reformulações do Teorema de Green:

Lembrete 1: Se $F = (P, Q)$,

$$div\, F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

Se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, então



$$\widehat{\mathbf{t}}(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}(x'(t), y'(t)), \qquad \widehat{\mathbf{n_1}}(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}(y'(t), -x'(t)), \quad \widehat{\mathbf{n_2}}(t) = -\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}(y'(t), -x'(t))$$

e o fluxo de F através de γ é dado por (ver Slide 8: Integral de linha de campo vetorial)

$$\int_\gamma [\, F \cdot \widehat{\mathbf{n}}\,]\, ds = (\pm) \int_\gamma P(x,y)dy - Q(x,y)dx$$

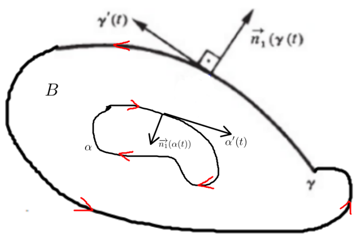


Figura 2: $^*B$ com fronteira orientada positivamente: $\widehat{\mathbf{n}}_{ext} = \widehat{\mathbf{n_1}}$ ("normal exterior a B")

$$\oint_{\partial^+ B} [\, F \cdot \widehat{\mathbf{n}}_{ext}\,]\, ds \overset{\widehat{\mathbf{n}}_{ext}=\widehat{\mathbf{n_1}}}{\underset{*}{=}} \oint_{\partial^+ B} -Q(x,y)dx + P(x,y)dy \overset{T.Green}{=} \iint_B \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \iint_B div\, F$$

Reformulação 1) Teorema de Gauss em $\mathbb{R}^2$ (ou teorema do divergente)

Considerando $F : A \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto e $B \subseteq A$ como em (H-TG),

$$\iint_B div\, F = \oint_{\partial^+ B} [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}_{ext}]\, ds,$$

onde $\widehat{\mathbf{n}}_{ext}$ é o vetor normal unitário exterior ao conjunto B.

Lembrete 2:

$$F = (P, Q); \qquad rot\, F = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\widehat{k}$$

Reformulação 2) Teorema de Stokes em $\mathbb{R}^2$

Considerando $F : A \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto e $B \subseteq A$ como em (H-TG).

$$\iint_B rot\, F \cdot \widehat{k} = \oint_{\partial^+ B} F \cdot d\mathbf{s}.$$

Sugestão de Exercícios:

- Lista 6 do prof. Eugenio Massa.
- Listas no e-disciplinas: Teorema de Green - Parte I e Parte II