Conteúdo

1 Teorema do Valor Médio e consequências **1**

2 Polinômio de Taylor **2**
2.1 Lembrete: Polinômio de Taylor em uma variável 2
2.2 Polinômio de Taylor para funções de várias variáveis 3
2.2.1 Encontrando as derivadas $g^{(j)}(0)$ e o polinômio de Taylor 3

3 Taylor: alguns casos particulares úteis **6**

1 Teorema do Valor Médio e consequências

Lembrete de Cálculo 1: Teorema do valor médio.

Seja f contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), então existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Consequência: Se $f' \equiv 0$ em (a,b), então f é constante em (a,b).

Teorema (Teorema do valor médio para funções de várias variáveis). Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $f \in \mathcal{C}^1(A)$, $\mathbf{p} + t\mathbf{h} \in A$ para todo $t \in [0,1]$, então existe $t \in (0,1)$ tal que

$$f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p}+t\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}.$$

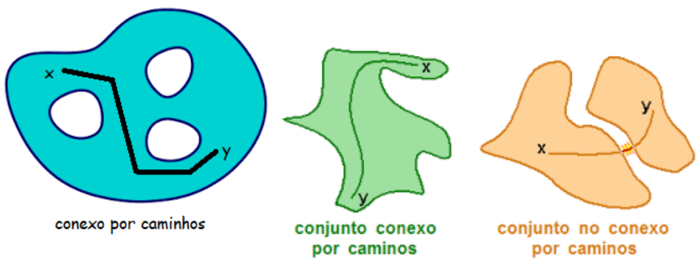
Equivalentemente:

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{q}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})$$

para algum $\mathbf{q}$ no segmento entre $\mathbf{p}$ e $\mathbf{x}$.

Algumas consequências:

- Seja $f \in \mathcal{C}^1(A)$ com $\nabla f \equiv 0$ em A, onde A é aberto e conexo por caminhos. **Então, f é constante em A.**



- Seja A aberto, $f \in \mathcal{C}^1(A)$, $\mathbf{p} + t\mathbf{h} \in A$ para todo $t \in [0,1]$. Então

$$|f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p})| \leq C\|\mathbf{h}\|,$$

onde $C = max\{\|\nabla f(\mathbf{p} + t\mathbf{h})\|, \quad t \in [0,1]\}$

2 Polinômio de Taylor

2.1 Lembrete: Polinômio de Taylor em uma variável

- Se $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função k vezes derivável em $t_0 \in I$,

$$T^k_{f,t_0}(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(t_0)}{j!}(t-t_0)^j$$

é chamado **Polinômio de Taylor de ordem k, de f, no ponto t_0**.

Teorema (**P.d.T. com resto de Peano**).
Se $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função k vezes derivável em t_0, **então**

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - T^k_{f,t_0}(t)}{(t-t_0)^k} = 0\,.$$

Em outras palavras,

$$E^k_{f,t_0}(t) := f(t) - T^k_{f,t_0}(t) = o((t-t_0)^k) \text{ quando } t \to t_0\,.$$

Além disso, T^k_{f,t_0} é o único polinômio de grau no máximo k com esta propriedade.

Teorema (**P.d.T. com resto de Lagrange**).
Se $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função $k+1$ vezes derivável em $V_\delta(t_0)$, para algum $\delta > 0$ então dado $t \in V_\delta(t_0) \setminus \{t_0\}$ existe c_t entre t e t_0 tal que

$$E^k_{f,t_0}(t) = f(t) - T^k_{f,t_0}(t) = \frac{f^{(k+1)}(c_t)}{(k+1)!}(t-t_0)^{k+1}\,.$$

Se $|f^{(k+1)}(t)| \leq M$, $t \in V_\delta(t_0)$, então

$$|E^k_{f,t_0}(t)| \leq \frac{M}{(k+1)!}|t-t_0|^{k+1} \quad t \in V_\delta(t_0).$$

2.2 Polinômio de Taylor para funções de várias variáveis

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $f \in \mathcal{C}^{k+1}(A)$, $\gamma(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{h} \in A$ para todo $t \in [0,1]$.

Defina $g(t) = (f \circ \gamma)(t) = f(\mathbf{p} + t\mathbf{h})$ (que é $k+1$ vezes derivável em $[0,1]$):
Então

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) &= g(1) = T^k_{g,0}(1) + \frac{g^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}1^{k+1} \\ &= \sum_{\mathbf{j}=\mathbf{0}}^{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{g^{(j)}(0)}}{\mathbf{j}!} + \frac{\mathbf{g^{(k+1)}(c)}}{\mathbf{(k+1)!}} \\ &= \text{“}\mathbf{T^k_{f,p}(p+h)} + \mathbf{E^k_{f,p}(p+h)}\text{”}, \end{aligned}$$

sendo $c \in (0,1)$.

- $T^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h})$ é o polinômio de Taylor de ordem k de f em $\mathbf{p}$
- $E^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h})$ é o resto de Lagrange

2.2.1 Encontrando as derivadas $g^{(j)}(0)$ e o polinômio de Taylor

Usando a Regra da Cadeia, temos:

$$\begin{aligned} g(t) &= f(\mathbf{p}+t\mathbf{h}) \\ g'(t) &= \nabla f(\mathbf{p}+t\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{p}+t\mathbf{h})h_i \\ g''(t) &= \overbrace{(\nabla f(\mathbf{p}+t\mathbf{h}))'}^{\mathbf{J_{\nabla f}(p+\mathit{t}h)\cdot h}} \cdot \mathbf{h} = \sum_{i=1}^{n} (\nabla f_{x_i}(\mathbf{p}+t\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h})h_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{p}+t\mathbf{h})h_j h_i \\ g'''(t) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (\nabla f_{x_i x_j}(\mathbf{p}+t\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h})h_j h_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f_{x_i x_j x_k}(\mathbf{p}+t\mathbf{h})h_k h_j h_i \\ \cdots &\;\cdots\; \cdots \\ \cdots &\;\cdots\; \cdots \\ g^{(k)}(t) &= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} f_{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}}(\mathbf{p}+t\mathbf{h})h_{i_1}h_{i_2}\ldots h_{i_k} \end{aligned}$$

Interpretando a forma quadrática $(\mathbf{J}_{\nabla \mathbf{f}}(\mathbf{p}+t\mathbf{h})\cdot\mathbf{h}\cdot\mathbf{h})$ acima: caso $n=2$:

$$H_f(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{p}) & f_{x_1x_2}(\mathbf{p}) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{p}) & f_{x_2x_2}(\mathbf{p}) \end{bmatrix}$$

$$H_f(\star)\mathbf{h} = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\star) & f_{x_1x_2}(\star) \\ f_{x_2x_1}(\star) & f_{x_2x_2}(\star) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\star)h_1 + f_{x_1x_2}(\star)h_2 \\ f_{x_2x_1}(\star)h_1 + f_{x_2x_2}(\star)h_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H_f}(\star)\mathbf{h}\cdot\mathbf{h} = \begin{cases} \underbrace{\mathbf{h}^t\mathbf{H_f}(\star)\mathbf{h}}_{matrizes} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}_{1\times 2} \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\star)h_1 + f_{x_1x_2}(\star)h_2 \\ f_{x_2x_1}(\star)h_1 + f_{x_2x_2}(\star)h_2 \end{bmatrix}_{2\times 1} \\ \qquad ou \\ (f_{x_1x_1}(\star)h_1 + f_{x_1x_2}(\star)h_2, f_{x_2x_1}(\star)h_1 + f_{x_2x_2}(\star)h_2)\cdot(h_1,h_2) \end{cases}$$

$$= f_{x_1x_1}(\star)h_1h_1 + f_{x_1x_2}(\star)h_2h_1 + f_{x_2x_1}(\star)h_1h_2 + f_{x_2x_2}(\star)h_2h_2$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f_{x_ix_j}(\star)h_jh_i$$

Definimos a Matriz Hessiana de f em $\mathbf{p}$:

$$H_f(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{p}) & f_{x_1x_2}(\mathbf{p}) & \cdots & f_{x_1x_n}(\mathbf{p}) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{p}) & f_{x_2x_2}(\mathbf{p}) & \cdots & f_{x_2x_n}(\mathbf{p}) \\ \vdots & & \vdots & \\ \cdots & & f_{x_ix_j}(\mathbf{p}) & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \\ f_{x_nx_1}(\mathbf{p}) & f_{x_nx_2}(\mathbf{p}) & \cdots & f_{x_nx_n}(\mathbf{p}) \end{bmatrix}$$

(OBS: ela é simétrica se $f \in \mathcal{C}^2(B_\delta(\mathbf{p}))$). Assim

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{x_ix_j}(\star)h_jh_i = H_f(\star)\mathbf{h}\cdot\mathbf{h}$$

O Polinônio de Taylor de ordem k de f em $\mathbf{p}$ pode ser escrito como:

$$T^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h}) = \sum_{j=0}^{k} \frac{g^{(j)}(0)}{j!}$$

- $T^1_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}$
  $T^1_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{p})$

- $T^2_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} H_f(\mathbf{p})\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}$
  $T^2_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{p}) + \frac{1}{2} H_f(\mathbf{p})(\mathbf{x}-\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{p})$

- ...

- $T^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h})$ =polin de grau até k, nas variáveis $h_1, .., h_n$, com coeficientes que dependem das derivadas de f de ordem até k, em $\mathbf{p}$.

O Erro pode ser escrito como:

$$E^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h}) = \frac{g^{(k+1)}(\mathrm{c_h})}{(k+1)!} = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_{k+1}=1}^{n} f_{x_{i_1} x_{i_2} .. x_{i_{k+1}}}(\mathbf{p} + \mathrm{c_h}\mathbf{h}) h_{i_1} h_{i_2} \ldots h_{i_{k+1}} \ :$$

$$E^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_{k+1}=1}^{n} f_{x_{i_1} x_{i_2} .. x_{i_{k+1}}}(\mathbf{p} + \mathrm{c_h}(\mathbf{x}-\mathbf{p}))(x_{i_1} - p_{i_1}) \ldots (x_{i_{k+1}} - p_{i_{k+1}}) \ :$$

Esta expressão é o **resto na forma de Lagrange**: é calculado usando as derivadas $(k+1)$-ésimas de f, em um **ponto** c_h **(incógnito)** ao longo do segmento entre $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}+\mathbf{h}$

$$f(\mathbf{x}) = T^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{x}) + E^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{x})$$

Se $f \in \mathcal{C}^{k+1}(A)$, existe $\delta > 0$ tal que todas as derivadas $(k+1)$-ésimas são limitadas em $\overline{B_\delta(\mathbf{p})}$.

Logo, se $\|\mathbf{h}\| < \delta$

$$|E^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h})| \leq C\,\|\mathbf{h}\|^{k+1}$$

concluímos

$$\lim_{\|\mathbf{h}\|\to 0} \frac{E^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^k} = 0$$

equivalentemente,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \frac{E^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|^k} = 0.$$

Este é o análogo do teorema do **resto na forma de Peano**.

3 Taylor: alguns casos particulares úteis

Teorema (**Caso** $k = 1$**).**
Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $f \in \mathcal{C}^2(A)$, $\gamma(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{h} \in A$ para todo $t \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) &= f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p})\cdot\mathbf{h} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{p}+c_{\mathbf{h}}\mathbf{h})h_j h_i \\ &= \underbrace{f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p})\cdot\mathbf{h}}_{T^1_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p})} + \underbrace{\frac{1}{2}H_f(\mathbf{p}+c_{\mathbf{h}}\mathbf{h})\mathbf{h}\cdot\mathbf{h}}_{E^1_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h})}, \end{aligned}$$

sendo $c_{\mathbf{h}} \in (0,1)$.

Caso $n=2$: ponha $\mathbf{p}=(a,b)$, $\mathbf{h}=(r,s)$, $\mathbf{q}_t=\mathbf{p}+t\mathbf{h}=(a+tr,b+ts)$

$$\begin{aligned}
g(t) &= f(\mathbf{q}_t)\\
g'(t) &= \nabla f(\mathbf{q}_t)\cdot\mathbf{h} = f_x(\mathbf{q}_t)r+f_y(\mathbf{q}_t)s\\
g''(t) &= H_f(\mathbf{q}_t)\mathbf{h}\cdot\mathbf{h} = f_{xx}(\mathbf{q}_t)r^2+2f_{xy}(\mathbf{q}_t)rs+f_{yy}(\mathbf{q}_t)s^2\\
g'''(t) &= \overbrace{(H_f(\mathbf{p}+t\mathbf{h}))'\mathbf{h}}^{\mathbf{J_{H_f}}(\mathbf{p}+t\mathbf{h})\mathbf{h}\cdot\mathbf{h}}\cdot\mathbf{h} = f_{xxx}(\mathbf{q}_t)r^3+3f_{xxy}(\mathbf{q}_t)r^2s+3f_{xyy}(\mathbf{q}_t)rs^2+f_{yyy}(\mathbf{q}_t)s^3\\
\cdots &\ \cdots\ \cdots\\
g^{(k)}(t) &= \sum_{i=0}^{k}\begin{pmatrix}k\\ i\end{pmatrix}\frac{\partial^k f}{\partial x^i\partial y^{k-i}}(\mathbf{q}_t)r^is^{k-i}
\end{aligned}$$

Teorema (Caso $n=2$).
Seja $A\subseteq\mathbb{R}^2$ aberto, $f\in\mathcal{C}^{k+1}(A)$, $\gamma(t)=\mathbf{p}+t\mathbf{h}\in A$ para todo $t\in[0,1]$.

$$\begin{aligned}
f(a+r,b+s) &= \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}\sum_{i=0}^{j}\begin{pmatrix}j\\ i\end{pmatrix}\frac{\partial^j f}{\partial x^i\partial y^{j-i}}(a,b)r^is^{j-i}+\\
&\quad+\frac{1}{(k+1)!}\sum_{i=0}^{k+1}\begin{pmatrix}k+1\\ i\end{pmatrix}\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^i\partial y^{k+1-i}}(a+cr,b+cs)r^is^{k+1-i},
\end{aligned}$$

sendo $c\in(0,1)$ (depende de r,s).

Teorema (Caso $n=2,k=1$).
Seja A aberto, $f\in\mathcal{C}^2(A)$, $\gamma(t)=\mathbf{p}+t\mathbf{h}\in A$ para todo $t\in[0,1]$.

$$\begin{aligned}
f(a+r,b+s) &= f(a,b)+f_x(a,b)r+f_y(a,b)s+\\
&\quad+\frac{1}{2}f_{xx}(a+cr,b+cs)r^2+f_{xy}(a+cr,b+cs)rs+\frac{1}{2}f_{yy}(a+cr,b+cs)s^2,
\end{aligned}$$

sendo $c\in(0,1)$ (depende de r,s).

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+ \\ &+\frac{1}{2}f_{xx}(\overline{x},\overline{y})(x-a)^2+f_{xy}(\overline{x},\overline{y})(x-a)(y-b)+\frac{1}{2}f_{yy}(\overline{x},\overline{y})(y-b)^2\,, \end{aligned}$$

sendo $(\overline{x},\overline{y})$ um ponto no segmento entre (a,b) e (x,y).

Ou ainda,

$$f(x,y)=T^1_{f,(a,b)}(x,y)+E^1_{f,(a,b)}(x,y), \qquad (x,y)\in A,$$

onde

$$T^1_{f,(a,b)}(x,y)=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b),$$

$$E^1_{f,(a,b)}(x,y)=\frac{1}{2!}\left[f_{xx}(\overline{x},\overline{y})(x-a)^2+2f_{xy}(\overline{x},\overline{y})(x-a)(y-b)+f_{yy}(\overline{x},\overline{y})(y-b)^2\right].$$

Teorema (Caso $n=2, k=2$:). *Se $f\in\mathcal{C}^3(A)$*

$$f(x,y)=T^2_{f,(a,b)}(x,y)+E^2_{f,(a,b)}(x,y), \qquad (x,y)\in A,$$

onde

$$\begin{aligned} T^2_{f,(a,b)}(x,y) &= f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+ \\ &+\frac{1}{2!}\left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2+2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E^2_{f,(a,b)}(x,y) &= \frac{1}{3!}\big[f_{xxx}(\overline{x},\overline{y})(x-a)^3+3f_{yxx}(\overline{x},\overline{y})(x-a)^2(y-b)+ \\ &+3f_{yyx}(\overline{x},\overline{y})(x-a)(y-b)^2+f_{yyy}(\overline{x},\overline{y})(y-b)^3\big]. \end{aligned}$$

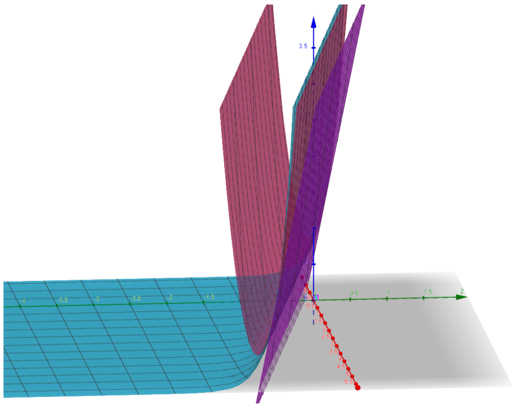
Observação.

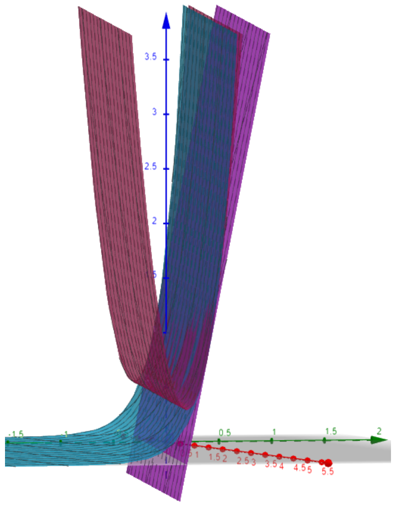
$$f(x,y)\approx T^k_{f,(a,b)}(x,y), \qquad (x,y)\approx(a,b)$$

$$(\text{pois } E^k_{f,(a,b)}(x,y)=o(||(x-a,y-b)||^k), \text{ quando } (x,y)\to(a,b))$$

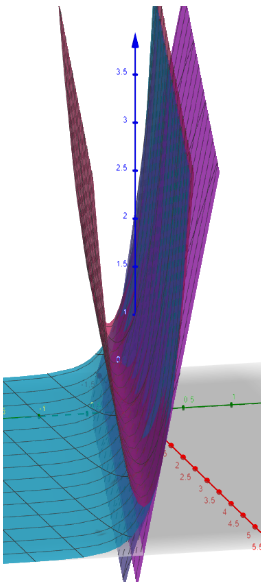
(para $k=1$, compare com diferencial, Slide 8, pag. 7, e plano tangente, Slide 9, pag. 4.)

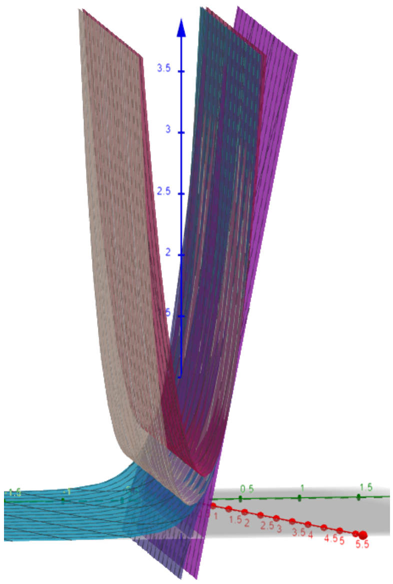
$$\mathbf{f(x,y) = e^{x+5y}}; \quad \mathbf{T^1_{f,(0,0)} = 1 + 5y + x}, \quad \mathbf{T^2_{f,(0,0)} = 1 + x + 5y + \frac{(x+5y)^2}{2}},$$





$$T^3_{f,(0,0)} = 1 + x + 5y + \frac{(x+5y)^2}{2} + \frac{(x+5y)^3}{3!},$$
$$T^4_{f,(0,0)} = 1 + x + 5y + \frac{(x+5y)^2}{2} + \frac{(x+5y)^3}{3!} + \frac{(x+5y)^4}{4!} :$$





$$T^5_{f,(0,0)} = 1 + x + 5y + \frac{(x+5y)^2}{2} + \frac{(x+5y)^3}{3!} + \frac{(x+5y)^4}{4!} + \frac{(x+5y)^5}{5!},$$
$$T^6_{f,(0,0)} = 1 + x + 5y + \frac{(x+5y)^2}{2} + \frac{(x+5y)^3}{3!} + \frac{(x+5y)^4}{4!} + \frac{(x+5y)^5}{5!} + \frac{(x+5y)^6}{6!} :$$