Conteúdo

1 Derivada

Lembrete: A derivada de $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ em $\mathbf{p}$ foi definida por

$$f'(\mathbf{p}) := \nabla f(\mathbf{p}) \cong \left(\frac{\partial f1}{\partial x_1}(\mathbf{p}) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{p}) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{p})\right)_{1\times n}.$$

Se $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \geq 1)$ é tal que

$$\mathbf{f}(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

então dizemos que **f é diferenciável** (resp., **derivável**) em $\mathbf{p}$ quando cada função $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, é diferenciável (resp., derivável) em $\mathbf{p}$. A **derivada de f em p** é definida como sendo a aplicação linear $\mathbf{f}'(\mathbf{p}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ representada pela matriz $m \times n$ (chamada **Matriz Jacobiana**):

$$\mathbf{f}'(\mathbf{p}) := \begin{bmatrix} \nabla f_1(\mathbf{p}) \\ \vdots \\ \nabla f_j(\mathbf{p}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{p}) \end{bmatrix}_{m\times n} := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \\ & & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}_{m\times n}$$

Outras notações para a matriz Jacobiana: $\nabla \mathbf{f} = J_{\mathbf{f}} = \frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$ (Wikipédia)

2 Regra da Cadeia

Do Cálculo 1, sabemos que: se $y = f(x)$ e $x = g(t)$ são funções diferenciáveis, então

$$\mathbf{\frac{dy}{dt}} = \frac{d}{dt}(f \circ g)(t) = f'(g(t))g'(t) = \frac{df}{dx}(g(t))\frac{dg}{dt}(t) = \mathbf{\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}}$$

2.1 Função (real) de várias variáveis composta com Curva

Se

- $\gamma : D_\gamma \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é uma curva
- $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com $Im(\gamma) \subseteq D_f$ é uma função de várias variáveis
- t_0 ponto interior de D_γ
- $\mathbf{p} = \gamma(t_0)$ ponto interior de D_f
- γ é diferenciável em t_0, i.e.,

$$\exists \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = \gamma'(t_0)$$

- f é diferenciável em $\mathbf{p} = \gamma(t_0)$, i.e.,

$$\lim_{\mathbf{x} \to \gamma(t_0)} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\gamma(t_0)) - \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot (\mathbf{x} - \gamma(t_0))}{\|\mathbf{x} - \gamma(t_0)\|} = 0,$$

então:

$F := f \circ \gamma : D_\gamma \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **é diferenciável em** t_0 **e vale**

$$F'(t_0) = (f \circ \gamma)'(t_0) = \underbrace{\nabla f}_{f'}(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0).$$

Quando $n = 2$: $z = f(x, y)$; $\gamma(t) = (x(t), y(t))$: $x = x(t)$ e $y = y(t)$ temos:

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}(t)$$

2.2 Função (real) de várias variáveis composta com Função (vetorial) de várias variáveis

Se $(m, n \geq 1)$

- $\mathbf{g} : D_{\mathbf{g}} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma função de várias variáveis a valores vetoriais
- $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, com $Im(\mathbf{g}) \subseteq D_f$, é uma função de várias variáveis a valores reais
- $\mathbf{p}_0$ é ponto interior de $D_{\mathbf{g}}$
- $\mathbf{p} = \mathbf{g}(p_0)$ é ponto interior de D_f
- $\mathbf{g}$ é diferenciável em $\mathbf{p}_0$
- f é diferenciável em $\mathbf{p} = \mathbf{g}(\mathbf{p}_0)$,

então $F := f \circ \mathbf{g} : D_{\mathbf{g}} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ **é diferenciável em $\mathbf{p}_0$ e vale**

$$F'(\mathbf{p}_0) = (f \circ \mathbf{g})'(\mathbf{p}_0) = f'(\mathbf{g}(\mathbf{p}_0)) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{p}_0)$$

Escrevendo:

$$\begin{array}{ll} f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, & f = f(x_1, \ldots, x_n) \\ \mathbf{g} : D_{\mathbf{g}} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, & \mathbf{g} = \mathbf{g}(u_1, \ldots, u_m) = (g_1(u_1, \ldots, u_m), \ldots, g_n(u_1, \ldots, u_m)) \\ F = f \circ g : D_{\mathbf{g}} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, & F = F(u_1, \ldots, u_m) \end{array}$$

$$f' = \nabla f \cong \text{matriz } 1 \times n$$

$$\mathbf{g}' = \nabla \mathbf{g} \cong \text{matriz } n \times m$$

$$F' = \nabla F \cong \text{matriz } 1 \times m$$

$$f'(\mathbf{g}(\mathbf{p}_0)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{g}(\mathbf{p}_0)) \ \cdots \ \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{g}(\mathbf{p}_0)) \ \cdots \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{g}(\mathbf{p}_0)) \right)_{1\times n}$$

$$\mathbf{g}'(\mathbf{p}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1}(\mathbf{p}_0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_k}(\mathbf{p}_0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_m}(\mathbf{p}_0) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_j}{\partial u_1}(\mathbf{p}_0) & \cdots & \frac{\partial g_j}{\partial u_k}(\mathbf{p}_0) & \cdots & \frac{\partial g_j}{\partial u_m}(\mathbf{p}_0) \\ \\ \frac{\partial g_n}{\partial u_1}(\mathbf{p}_0) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial u_k}(\mathbf{p}_0) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial u_m}(\mathbf{p}_0) \end{pmatrix}_{n\times m}$$

$$F'(\mathbf{p}_0) = f'(\mathbf{g}(\mathbf{p}_0)) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{p}_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}(\mathbf{p}_0) \ \cdots \ \frac{\partial F}{\partial u_k}(\mathbf{p}_0) \ \cdots \ \frac{\partial F}{\partial u_m}(\mathbf{p}_0) \right)_{1\times m}$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u_k}(\mathbf{p}_0) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{g}(\mathbf{p}_0))\frac{\partial g_1}{\partial u_k}(\mathbf{p}_0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{g}(\mathbf{p}_0))\frac{\partial g_j}{\partial u_k}(\mathbf{p}_0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{g}(\mathbf{p}_0))\frac{\partial g_n}{\partial u_k}(\mathbf{p}_0) \\ &= \nabla f(\mathbf{g}(\mathbf{p}_0)) \cdot \text{“}\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{p}_0)}{\partial u_k}\text{”} \end{aligned}$$

$n, m = 2$**:** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: $f = f(x, y)$, $\mathbf{g}(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v))$

$(f \circ \mathbf{g})(u, v) = f(\mathbf{g}(u, v)) = f(g_1(u, v), g_2(u, v)) = F(u, v)$

$f = f(x, y)$, onde $x = g_1(u, v)$ e $y = g_2(u, v) \implies f = F(u, v)$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(g_1(u, v), g_2(u, v))\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(u, v), g_2(u, v))\frac{\partial y}{\partial u}(u, v)$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(g_1(u, v), g_2(u, v))\frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(u, v), g_2(u, v))\frac{\partial y}{\partial v}(u, v)$$

3 Interpretação Geométrica do Vetor Gradiente

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável e $\mathbf{p} \in D$ um ponto de acumulação de D. Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ uma curva regular tal que $\gamma(t_0) = \mathbf{p}$, contida num conjunto de nível de f: $f(\mathbf{x}) = c$. Então:

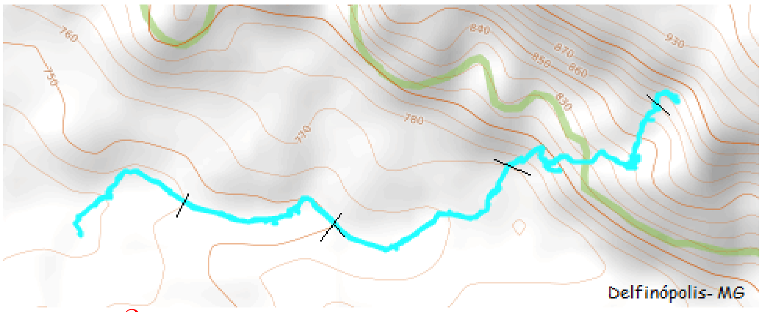
$$\nabla f(\mathbf{p}) \cdot \gamma'(t_0) = 0,$$

isto é: $\nabla f(\mathbf{p})$ é perpendicular a (qualquer curva no) conjunto de nível.

$n = 2$:

• $\nabla f(\mathbf{p})$ é um **vetor normal (perpendicular) à curva de nível $f(\mathbf{x}) = c$ em $\mathbf{p}$**. A **reta tangente à curva de nível** $f(\mathbf{x}) = c$ em $\mathbf{p}$ é dada por:

$$\nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0.$$



$\nabla f(\mathbf{p})$ indica a direção de maior crescimento de f

$n = 3$:

• $\nabla f(\mathbf{p})$ é um **vetor normal (perpendicular) à qualquer curva na superfície de nível $f(\mathbf{x}) = c$ em $\mathbf{p}$**. O **plano tangente à superfície de nível** $f(\mathbf{x}) = c$ em $\mathbf{p}$ é dado por:

$$\nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$$

ou seja, fazendo $\mathbf{p} = (a, b, c)$ e $\mathbf{x} = (x, y, z)$,

$$f_x(a,b,c)(x-a) + f_y(a,b,c)(y-b) + f_z(a,b,c)(z-c) = 0. \tag{3.1}$$

OBS.: Se $F(x,y,z) = f(x,y) - z$, então o gráfico de f é a superfície de nível $F(x,y,z) = 0$. Se f é diferenciável em (a,b), então as Equações 2.1 do Slide 9 e 3.1 acima coincidem. O vetor gradiente $\nabla F(a,b,f(a,b))$ é normal ao plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a,b,f(a,b))$.

4 Derivação implícita

A função $y = g(x)$ é **definida implicitamente** pela equação $f(x, y) = 0$ quando

$$f(x, g(x)) = 0, \quad x \in D_g.$$

Em Cálculo 1: *$y = g(x)$ tal que $y^2 + 2xy^3 = 0$, $y' =?$:*

$$2yy' + 2y^3 + 6xy^2y' = 0 \Longrightarrow y' = \frac{-2y^3}{2y + 6xy^2}, \quad \textit{desde que } 2y + 6xy^2 \neq 0$$

Agora também podemos usar a Regra da Cadeia para funções de várias variáveis:

Se f e g são funções diferenciáveis tais que:

. . . .

- $F = f(x, y), \quad x = x \quad y = g(x), \quad \textit{onde} \quad f(x, g(x)) = 0, \quad x \in D_g.$

Então,

$$\frac{d}{dx}\left[f(x, g(x))\right] = 0$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}g'(x) = 0,$$

o que implica

$$\boxed{y' = g'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}, \quad \text{desde que } f_y(x, g(x)) \neq 0.}$$

. . . .

- $F = f(x,y,z), \quad x = x, \quad y = y, \quad z = g(x,y), \quad onde \quad f(x,y,g(x,y)) = 0.$

Então,

$$\frac{\partial}{\partial y}[f(x,y,g(x,y))] = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

o que implica

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y(x,y,g(x,y))}{f_z(x,y,g(x,y))}, \quad \text{desde que } f_z(x,y,g(x,y)) \neq 0.}$$

4.1 Teorema da Função Implícita, caso $f(x,y) = 0$

Sejam

- $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto
- $f = f(x,y)$ **uma função de classe** $\mathcal{C}^1(D)$
- $(a,b) \in D$.

Se

$$f(a,b) = 0, \qquad e \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0,$$

então a equação $f(x,y) = 0$ define y como função de x, $y = g(x)$, numa vizinhança de (a,b),
isto é, exitem intervalos abertos $I \ni a$ e $J \ni b$ tais que

- para cada $x \in I$ existe um único $g(x) \in J$ com $f(x,g(x)) = 0$.

Além disso, a função $g : I \to J$ **é diferenciável** e vale

$$y' = g'(x) = -\frac{f_x(x,g(x))}{f_y(x,g(x))}, \quad x \in I.$$

4.2 Teorema da Função Implícita, caso $f(x, y, z) = 0$

Sejam

- $D \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto
- $f = f(x, y, z)$ **uma função de classe** $\mathcal{C}^1(D)$
- $(a, b, c) \in D$.

Se

$$f(a, b, c) = 0, \qquad e \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) \neq 0,$$

então a equação $f(x, y, z) = 0$ define z como função de x, y, $z = g(x, y)$, numa vizinhança de (a, b, c),

isto é, exitem uma bola aberta $B \ni (a, b)$ e um intervalo aberto $J \ni c$ tais que

- para cada $(x, y) \in B$ existe um único $g(x, y) \in J$ com $f(x, y, g(x, y)) = 0$.

Além disso, a função $g : B \to J$ **é diferenciável** e vale

$$g_x(x, y) = -\frac{f_x(x, y, g(x, y))}{f_z(x, y, g(x, y))}, \quad g_y(x, y) = -\frac{f_y(x, y, g(x, y))}{f_z(x, y, g(x, y))}, \quad (x, y) \in B.$$

. . . .

Se

$$f(a, b, c) = 0, \qquad e \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) \neq 0,$$

então a equação $f(x, y, z) = 0$ define x como função diferenciável de y, z, $x = g(y, z)$, numa vizinhança $B' \times J' \ni (b, c) \times \{a\}$,

$$g_y(y, z) = -\frac{f_y(x, y, g(y, z))}{f_x(x, y, g(y, z))}, \quad g_z(y, z) = -\frac{f_z(x, y, g(y, z))}{f_x(x, y, g(y, z))}, \quad (y, z) \in B'.$$

Se

$$f(a, b, c) = 0, \qquad e \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) \neq 0,$$

então a equação $f(x, y, z) = 0$ define y como função diferenciável de x, z, $y = g(x, z)$, numa vizinhança $B_1 \times J_1 \ni (a, c) \times \{b\}$,

$$g_x(x, z) = -\frac{f_x(x, y, g(x, z))}{f_y(x, y, g(x, z))}, \quad g_z(x, z) = -\frac{f_z(x, y, g(x, z))}{f_y(x, y, g(x, z))}, \quad (x, z) \in B_1.$$