1 Campos conservativos: recordação

Seja $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um c.v. contínuo.

F é conservativo (c.v.c.) em $A \overset{aberto}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ quando existe $\varphi : A \to \mathbb{R}$ tal que

$$F = \nabla\varphi \quad \text{em } A.$$

Nota.

integral de linha de F é independente do caminho em $A \iff$

$$\int_\gamma F \cdot d\mathbf{s} = 0 \text{ para toda curva } \gamma \subseteq A \text{ fechada} \quad \left(\oint_\gamma F \cdot d\mathbf{s} = 0\right).$$

Nota. (TF)

F é um c.v.c. em um aberto $A \implies$ a integral de linha de F é independente do caminho em A.

Nota.

F é um c.v.c. em um aberto conexo por caminhos $A \iff$ a integral de linha de F é independente do caminho em A.

Nota. Nos casos $n = 2$ ou $n = 3$:

F é um c.v.c. de classe C^1 em um aberto $A \implies rot F = \overrightarrow{0}$ em A.

Exemplo. Considere $F(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\overrightarrow{i} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\overrightarrow{j}$ em $A = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

1. Qual o rotacional de F em A?

   Note que: F atua sobre trajetórias circulares. *Geogebra*

Slide 09: $\displaystyle\int_\gamma F \cdot d\mathbf{s} = 2\pi \neq 0$, $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Logo, a integral de linha de F não é independente do caminho

Portanto F não é c.v.c. em A.

$rot F = \overrightarrow{0}$ é condição <u>necessária</u> mas <u>não é suficiente</u> para F ser c.v.c.

2 Campos Conservativos: uma condição suficiente

Definição Um campo $F : A \to \mathbb{R}^n$ contínuo e com derivadas contínuas, com $A \subseteq \mathbb{R}^n$, é dito **Irrotacional** quando tem todas as derivadas cruzadas iguais:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \text{para todo } i \neq j$$

Observação. **Se** $n = 2$ **ou** $n = 3$, F irrotacional $\iff rot(F) = 0$.

A razão para o nome *rotacional* é que o vetor rotacional está associado com rotações. Uma conexão será explicada no Exercício 37. Outra ocorre quando **F** representa um campo de velocidade em mecânica dos fluidos (veja o Exemplo 3 na Seção 16.1). Partículas perto de (x, y, z) no fluido tendem a rodar em torno do eixo que aponta na direção de rot **F** (x, y, z), e o comprimento do vetor rotacional é a medida de quão rápido as partículas se movem em torno desse eixo (veja a Figura 1). Se rot **F** = **0** no ponto P, então o fluido é isento de rotações em P e **F** é chamado **irrotacional** em P. Em outras palavras, não há nenhum turbilhão ou redemoinho em P. Se rot **F** = **0**, uma pequena roda de pás move-se com o líquido, mas não roda em torno do seu eixo. Se rot **F** ≠ **0**, a roda com pás giraria em torno de seu eixo. Veremos mais detalhes sobre essa explanação na Seção 16.8, como consequência do Teorema de Stokes.

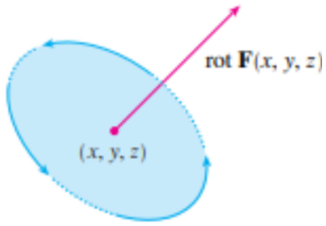

FIGURA 1

Figura 1: Stewart, Cálculo, vol. 2

Nota. F **é um c.v.c. de classe** C^1 **em um aberto** $A \implies F$ **é irrotacional em** A.

Resumindo: $F : A \to \mathbb{R}^n$ **c.v. de classe** C^1**, com** $A \subseteq \mathbb{R}^n$ **um conjunto aberto, ser irrotacional é condição necessária para ser conservativo!**

$$A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aberto, } F \text{ de classe } C^1\text{: } F \text{ c.v.c. em } A \implies F \text{ irrotacional em } A$$

Porém a condição não é suficiente!!

$$A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aberto, } F \text{ de classe } C^1\text{: } F \text{ c.v.c. em } A \not\Leftarrow F \text{ irrotacional em } A$$

Queremos condições que permitam concluir que ser irrotacional é condição suficiente para ser conservativo!!

Definição 2.1. Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito **simplesmente conexo** se é conexo por caminhos e vale uma das seguintes condições equivalentes:

- toda curva fechada contida em A pode ser deformada a um ponto sem sair de A,
- dadas duas curvas contidas em A que conectam dois pontos dados, uma pode ser deformada até a outra sem sair de A,
- toda curva fechada contida em A é a borda de uma superfície contida em A.

Exemplos

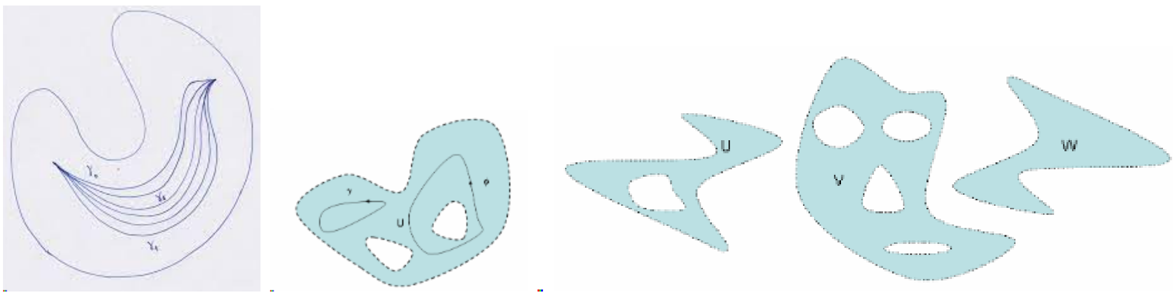

Figura 2: Domínio público, internet: o primeiro conjunto e W são simplesmente conexos

- São **simplesmente conexos**:
  - $\mathbb{R}^n$,
  - $\mathbb{R}^2$ menos uma semirreta,
  - $\mathbb{R}^3$ menos um ponto,
  - $\mathbb{R}^3$ menos um semiplano ou uma semirreta,...
- **Não são simplesmente conexos**:
  - $\mathbb{R}^2$ menos um ponto,
  - $\mathbb{R}^3$ menos uma reta

. . . .

Caso particular ($n = 2$): Considere A satisfazendo a propriedade (P): existe $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0) \in A$ tal que para todo $\mathbf{p} = (x, y) \in A$, a poligonal com vértices $\mathbf{p}_0$, (x_0, y) e $\mathbf{p}$ está contida em A:

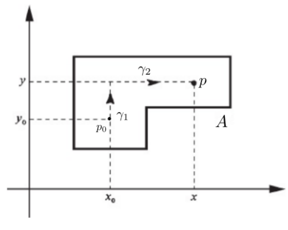

Figura 3: Guidorizzi, vol. 3. Um conjunto A satisfazendo (P) é **simplesmente conexo**

- $F = (P, Q)$ **irrotacional**, i.e., $rotF = 0 \iff P_y = Q_x$
- $\varphi(\mathbf{p}) := \int_\gamma F \cdot d\mathbf{s}$, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$; $\gamma_1 : \begin{cases} x = x_0 \\ y = t, t \in [y_0, y] \end{cases}$ $\quad \gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = y, t \in [x_0, x] \end{cases}$
- $\varphi(x, y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, t)dt + \int_{x_0}^{x} P(t, y)dt$
- $\varphi_x(x, y) = P(x, y)$
- *Para a derivada em relação a y precisamos: Dada $f(x, y)$ contínua e com derivadas contínuas em $I \times [a, b]$, seja $F(x) := \int_a^b f(x, y)\, dy$. Então F é derivável em I e vale $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy$.*

$$\begin{aligned} \varphi_y(x, y) &= Q(x_0, y) + \int_{x_0}^{x} P_y(t, y)dt \\ &\overset{rotF=0}{=} Q(x_0, y) + \int_{x_0}^{x} Q_x(t, y)dt \\ &= Q(x_0, y) + \left. Q(t, y) \right|_{t=x_0}^{x} = Q(x, y) \end{aligned}$$

- $\nabla\varphi = F$ em A e **F é c.v.c. em A.**

. . . .

Teorema 2.2. *Seja* $F : A \to \mathbb{R}^n$ *um* **campo contínuo e com derivadas contínuas, com** $A \subseteq \mathbb{R}^n$ **um conjunto simplesmente conexo.** *Então,*

F é conservativo em A se e só se F é irrotacional em A.

Nota.

F é um c.v.c. de classe C^1 em um aberto simplesmente conexo A $\iff$ F é irrotacional em A.

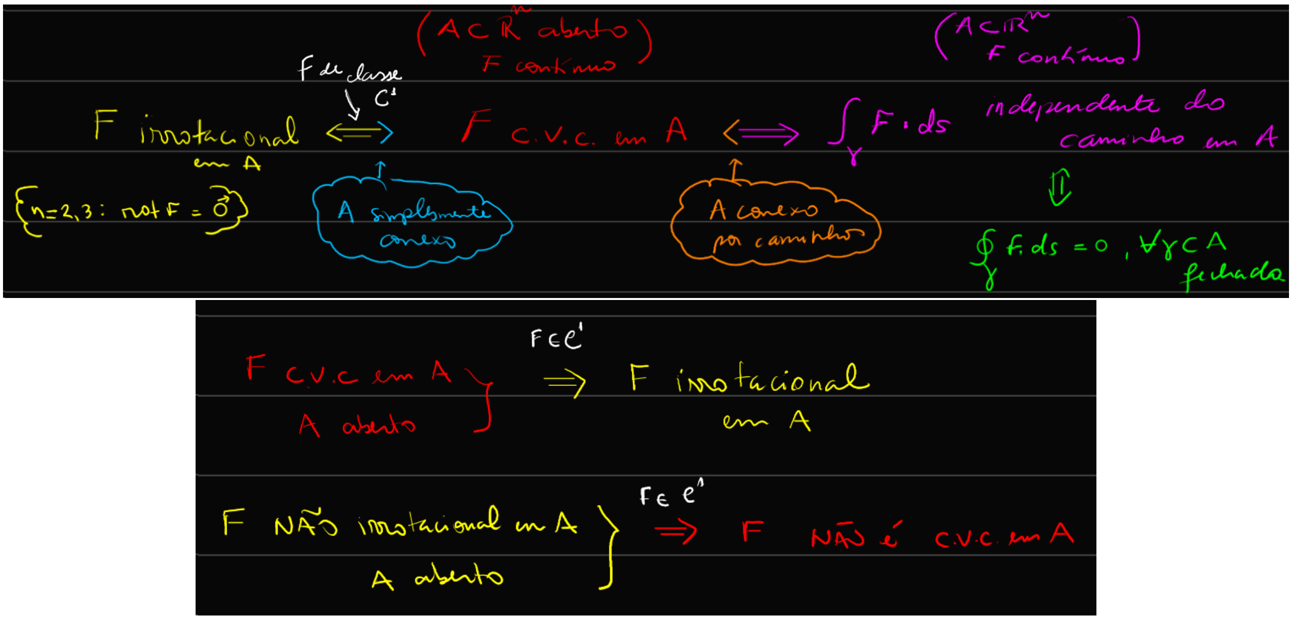

Figura 4: Resumo de todas **'Nota'**

Como decidir se F é c.v.c. em um conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^n$? Quando buscar uma função potencial?

- **F irrotacional em A que é simplesmente conexo $\Longrightarrow$ F é um c.v.c. em A**

  Neste caso temos certeza que existe uma função potencial de F em A.

- **F irrotacional em A que não é simpl. conexo $\Longrightarrow$ F pode ou não ser c.v.c. em A**

  Neste caso tentamos:

- ou encontrar uma função potencial φ de F em A, ou seja, encontrar uma função $\varphi : A \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\varphi(x,y) = F(x,y)$ para todo $(x,y) \in A$ (e portanto, F será c.v.c. em A);
- ou encontrar um caminho fechado $\gamma \subset A$ tal que $\oint_\gamma F \cdot d\mathbf{s} \neq 0$ (e portanto F não será c.v.c. em A);
- ou encontrar dois pontos $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ em A e dois caminhos γ_1, γ_2 contidos em A de $\mathbf{p}_1$ a $\mathbf{p}_2$ tais que $\oint_{\gamma_1} F \cdot d\mathbf{s} \neq \oint_{\gamma_2} F \cdot d\mathbf{s}$ (e portanto F não será c.v.c. em A).

Estratégia para encontrar uma função potencial φ para um c.v.c.

$$\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) :$$

Note que (se existe) obrigatoriamente deve ocorrer:

$$\varphi_x = P \qquad \text{e} \qquad \varphi_y = Q.$$

1. Integrar P em relação a x. Isso resulta em uma função da forma $\varphi(x,y) = g(x,y) + h(y)$, onde $h(y)$ é desconhecida.
2. Tome a derivada parcial de $\varphi(x,y) = g(x,y) + h(y)$ em relação a y, que resulta na função $g_y(x,y) + h'(y)$.
3. Use a equação $g_y(x,y) + h'(y) = Q(x,y)$ para encontrar $h'(y)$.
4. Integre $h'(y)$ para encontrar $h(y)$.
5. Qualquer função da forma $\varphi(x,y) = g(x,y) + h(y) + C$, onde C é uma constante, é uma função potencial para $\vec{F}$.

Analogamente, se $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$:

$$\varphi_x = P, \qquad \varphi_y = Q, \qquad \varphi_z = R.$$

1. Integrando P em x: $\varphi(x,y,z) = g(x,y,z) + h(y,z)$, onde $h(y,z)$ é desconhecida.
2. Use $\varphi_y = g_y(x,y) + h_y(y,z) = Q$ para encontrar $h_y(y,z)$.
3. Integrando em relação a y, obtenha $h(y,z) = f(y,z) + r(z)$, onde $r(z)$ é desconhecida.
4. Use $\varphi_z = g_z + f_z + r_z = R$ para encontrar $r_z(z)$.
5. Integre para encontrar $r(z)$.
6. Qualquer função da forma $\varphi(x,y,z) = g(x,y,z) + f(y,z) + r(z) + C$, onde C é uma constante, é uma função potencial para $\vec{F}$.

Analogamente, podemos iniciar o passo 1 integrando primeiramente Q (ou R) em relação a y (resp. a z).

Aplicações

O **campo eletrostático** (campo elétrico em condições estacionárias)

$$E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

satisfaz a eq. de Maxwell $rotE = 0$.
Logo é conservativo e admite um potencial $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $E = \nabla\phi$.
Logo

- o **trabalho feito por E sobre uma carga q que vai de $\mathbf{p}_1$ a $\mathbf{p}_2$** é

$$q\int_{\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_2} E \cdot d\mathbf{s} = q\left[\phi(\mathbf{p}_2) - \phi(\mathbf{p}_1)\right]$$

- o **trabalho necessário para fazer a carga q ir de $\mathbf{p}_1$ a $\mathbf{p}_2$ contra o campo elétrico** é

$$-q\int_{\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_2} E \cdot d\mathbf{s} = q\left[\phi(\mathbf{p}_1) - \phi(\mathbf{p}_2)\right]$$

CUIDADO: Em geral na fisica se usa a definição trocada de sinal: $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $E = -\nabla V$ (**Potencial eletrostático**). Dessa forma

$$q\int_{\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_2} E \cdot d\mathbf{s} = q\left[V(\mathbf{p}_1) - V(\mathbf{p}_2)\right]$$

$U = qV$ é a **Energia eletrostática** da carga q no campo.

O **campo magnetostático** (campo magnético em condições estacionárias)

$$B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

satisfaz a eq. de Maxwell $rotB = \mu_0\mathbf{j}$, logo é irrotacional onde não há densidade de corrente.

Eq. de Maxwell

Sugestão de Exercícios:

- Lista 5 do prof. Eugenio Massa.
- Listas no e-disciplinas: Integral de Linha de um Campo Vetorial Parte II