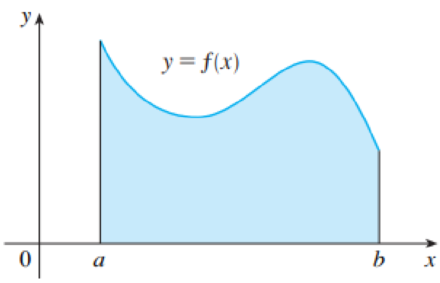
Conteúdo

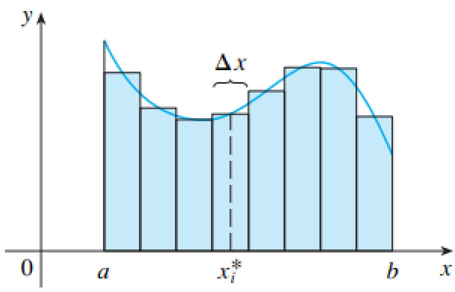
I.1 Integral de Riemann

I.1.1 Motivação

Qual a área da região limitada pelas curvas:

$$y = 0, \quad x = a, \quad x = b, \quad y = f(x)?$$





Fonte: Stewart, Cálculo, vol. 1 (Caso $f > 0$)

Simulação de valores aproximados da área da região:
- retângulos com base de mesmo comprimento
- retângulos com base de diferentes comprimentos

I.1.2 Caso (I): Integrais definidas

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **limitada** **(com** $[a, b] \subset \mathbb{R}$ **limitado)**

Partição de $[a, b]$: é um conjunto finito de pontos da forma:

$$\mathcal{P} = \{x_0, ..., x_n : \ a = x_0 < x_1 < x_2 < .. < x_{n-1} < x_n = b\} \ .$$

$$\Delta_i x := x_i - x_{i-1}; \qquad \|\mathcal{P}\| := \max\{\Delta_i x : i = 1, \ldots, n\}, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Defina a Soma de Riemann (irregular) (regular) (Wikipédia):

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$$

Considere o limite

$$\lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$$

- quando o limite acima **existe**, é um número real $L \in \mathbb{R}$, **e é independente da escolha dos pontos** ξ_i em $[x_{i-1}, x_i]$, isto é:

  $$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0;\ \forall \mathcal{P}, \|\mathcal{P}\| < \delta, \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \text{ temos } \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x - L \right| < \varepsilon,$$

  dizemos que

  - f é **Riemann integrável no sentido próprio em** $[a, b]$,
  - L é a **integral definida (de Riemann) de** f **em** $[a, b]$:

  $$L = \int_a^b f;$$

- se tal L não existir (ou depender da escolha dos $\xi' s$), dizemos que
  - f **não é Riemann integrável em** $[a, b]$**.**

Área

- Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$ a região do plano definida por
$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a,b], \quad 0 \le y \le f(x)\right\}$$
onde $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada, integrável e $f \ge 0$. Então,
$$\int_a^b f \ge 0$$
e a área da região R é dada por
$$\mathbf{A(R)} := \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}$$

Observação: Estamos interessados em estudar quando uma dada função é "integrável em um dado intervalo I"e como encontrar sua integral em I.

Neste curso, integrabilidade é no sentido de Riemann, e então dizer que "**f é integrável**" é equivalente a dizer que "**f é Riemann integrável**".

Primeiro estamos considerando o caso em que **f é uma função limitada definida em intervalo I fechado e limitado**: neste caso, dizemos que f é (ou não) **Riemann integrável no sentido próprio** em I. Neste contexto aprenderemos a encontrar sua integral em I chamada usualmente de **integral definida de f em I**.

Quando também considerarmos os casos em que a **função f pode ser não limitada em I ou pode estar definida em intervalo I não limitado**, então diremos que f é (ou não) **Riemann integrável no sentido impróprio** em I. Também aprenderemos a encontrar a integral de f em I, chamada usualmente de **integral imprópria de f em I**.

Definição I.1.1. Se f é integrável em $[a,b]$, definimos
$$\int_{\mathbf{b}}^{\mathbf{a}} \mathbf{f} := -\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f} \qquad e \qquad \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{a}} \mathbf{f} := \mathbf{0}\,.$$

I.1.3 Propriedades

- se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é limitada e integrável, e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ é tal que o conjunto $\{x \in [a, b] : \ f(x) \neq g(x)\}$ contém um número finito de pontos, **então g é integrável e $\int_a^b f = \int_a^b g$.**

Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções limitadas e integráveis em $[a, b]$. Então

- **$\alpha f + \beta g$ é integrável em $[a, b]$** e

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \left(\int_a^b f \right) + \beta \left(\int_a^b g \right) , \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} ,$$

- **$|f|$ é integrável em $[a, b]$** e

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| ,$$

- **fg é integrável em $[a, b]$,**
- Se **$f \geq g$ em $[a, b]$, então**

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g .$$

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ limitada.

- Se $[a, b] \subseteq D_f$ e f é integrável em $[a, b]$ e $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$, **então f é integrável em $[\alpha, \beta]$.**
- Se $[a, b], [b, c] \subseteq D_f$ e f é integrável em $[a, b]$ e em $[b, c]$, **então f é integrável em $[a, c]$ e vale**

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{c}} \mathbf{f} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f} + \int_{\mathbf{b}}^{\mathbf{c}} \mathbf{f}.$$

De fato, pela Definição I.1.1, a propriedade acima vale para quaisquer ordem de a, b, c.

Exemplo 1. Exercícios 1 e 2 em Slides de Exercícios.

I.1.4 Integrabilidade

Se f é limitada em $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$?

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R} \text{ dada por } f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Quando f (limitada) é integrável em $[a, b]$?

Teorema (integrabilidade das contínuas).
Se f é contínua em $[a, b]$ **então f é Riemann integrável em $[a, b]$.**

Teorema (integrabilidade das contínuas por partes).
Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é limitada e contínua exceto possivelmente em um número finito de pontos, **então f é Riemann integrável em $[a, b]$.**

Como calcular a integral definida de f?

Sejam I um intervalo aberto em $\mathbb{R}$ e $F : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Se $F' = f$ em I dizemos que **F é primitiva de f em I** e vale:

- se F é uma primitiva de f em I então $F + c$ $(\forall\, c \in \mathbb{R})$ também é
- se F, G são primitivas de f em I então $F - G = constante$.
  Escrevemos
  $$\int f = F + c, \ c \in \mathbb{R}.$$

$\displaystyle\int f$ = **integral indefinida de f** = "a primitiva na forma mais geral" de f = a família (conjunto) de todas as primitivas de f (num certo intervalo fixado)

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2. Exercício 3 em Slides de Exercícios.

I.1.5 Tabela de primitivas e derivadas

Acesse aqui.

I.1.6 Teorema Fundamental do Cálculo, partes 1 e 2

1^o Teorema Fundamental do Cálculo

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e $[a, b] \subset I$. Se $F : I \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de f em $[a, b]$. Então,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemplo 3. Exercício 4 em Slides de Exercícios.

Teorema do Valor Médio para integral ou Teorema da Média Integral

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é limitada ($m \leq f \leq M$ em $[a, b]$) e integrável, então

- $m \leq \dfrac{\int_a^b f}{b-a} \leq M$
- se f é também contínua, então **existe** $c \in (a, b)$ **tal que**

$$\frac{\int_a^\mathbf{b} \mathbf{f}}{\mathbf{b-a}} = \mathbf{f(c)} \quad \text{(chamado Valor Médio de } f \text{ em } [a,b])$$

2^o Teorema Fundamental do Cálculo

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e $c \in [a, b]$. Defina a **função integral** $F_c : [a, b] \to \mathbb{R}$ por

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

Então,

- F_c **é derivável em** $[a, b]$
- $F_c' = f$ **em** $[a, b]$, (*i.e, F_c é primitiva de f em $[a, b]$*).

Atenção:

- $\displaystyle\int_a^b f$ é um número,
- $\displaystyle\int f$ é uma família de funções,
- $\displaystyle\int_a^x f$ é uma função.

Derivação da função integral

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua (logo integrável em $[a, b]$) e $c \in [a, b]$.

Seja

$$\mathbf{F} : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbf{c}}^{\mathbf{x}} \mathbf{f}\,.$$

Então vale $\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ para todo $x \in [a, b]$. (2^o TFC)

Agora seja

$$\mathbf{G} : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{c}} \mathbf{f}\,.$$

Então vale $\mathbf{G}'(\mathbf{x}) = -\mathbf{f}(\mathbf{x})$ para todo $x \in [a, b]$.

Agora seja $g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ derivável e

$$\mathbf{G} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbf{c}}^{\mathbf{g}(\mathbf{x})} \mathbf{f}\,.$$

Então vale $\mathbf{G}'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{g}'(\mathbf{x})$ para todo $x \in [\alpha, \beta]$.

Agora sejam $g, h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ deriváveis e

$$\mathbf{G} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbf{h}(\mathbf{x})}^{\mathbf{g}(\mathbf{x})} \mathbf{f}\,.$$

Então vale $\mathbf{G}'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{g}'(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))\mathbf{h}'(\mathbf{x})$ para todo $x \in [\alpha, \beta]$.

Exemplo 4. Exercício 5 em Slides de Exercícios.

I.1.7 Área

- Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região do plano definida como

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [a, b], \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$$

onde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é limitada, integrável e $f \geq 0$.
Então a área da região R é dada por (definição)

$$\mathbf{A_R} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}$$

- Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região do plano definida como

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [a, b], \quad f(x) \leq y \leq 0\}$$

onde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é limitada, integrável e $f \leq 0$.
Então a área da região R é dada por

$$\mathbf{A_R} = -\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}$$

- Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região do plano definida como

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [a, b], \quad 0 \leq y \leq f(x) \; ou \; 0 \geq y \geq f(x)\}$$

onde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é limitada e integrável.
Então a área da região R é dada por

$$\mathbf{A_R} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} |\mathbf{f}|$$

- Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região do plano definida como

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [a, b], \quad f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

onde $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são limitadas, integráveis e $f \leq g$.
Então a área da região R é dada por

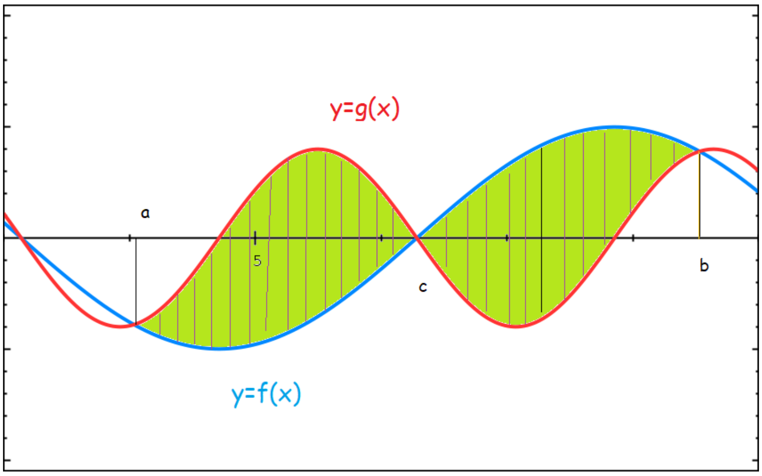
$$\mathbf{A_R} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{g} - \mathbf{f}$$

- Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região do plano definida como

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a, b], \quad f(x) \le y \le g(x) \ ou \ g(x) \le y \le f(x) \right\}$$

onde $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são limitadas e integráveis.
Então a área da região R é dada por

$$\mathbf{A_R} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} |\mathbf{g} - \mathbf{f}| = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} |\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})| \, \mathbf{dx}$$

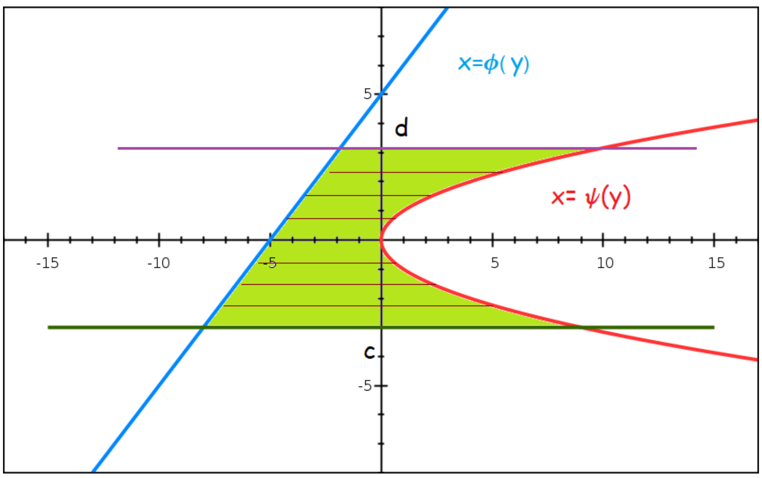


- Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região do plano definida como

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \in [c, d], \quad \phi(y) \le x \le \psi(y) \ ou \ \psi(y) \le x \le \phi(y) \right\}$$

onde $\phi, \phi : [c, d] \to \mathbb{R}$ são limitadas e integráveis.
Então a área da região R é dada por

$$\mathbf{A_R} = \int_{\mathbf{c}}^{\mathbf{d}} |\psi - \phi| = \int_{\mathbf{c}}^{\mathbf{d}} |\psi(\mathbf{y}) - \phi(\mathbf{y})| \, \mathbf{dy}$$



Exemplo 5. Exercício 6 em Slides de Exercícios.