1 Campos conservativos

Definição Dado um campo vetorial $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dizemos que **a integral de linha de F é independente do caminho** se:

$$\text{dados } \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in A, \int_\gamma F \cdot d\mathbf{s} \text{ é o mesmo valor}$$

para qualquer curva $\gamma \subseteq A$ que vai de $\mathbf{p}_1$ a $\mathbf{p}_2$.

Neste caso pode-se usar a notação $\displaystyle\int_\gamma F \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_2} F \cdot d\mathbf{s}$

Nota. A integral de linha de F é independente do caminho em A $\iff$

$$\int_\gamma F \cdot d\mathbf{s} = 0 \textbf{ para toda curva } \gamma \subseteq A \textbf{ fechada} \quad \left(\oint_\gamma F \cdot d\mathbf{s} = 0\right).$$

De fato,

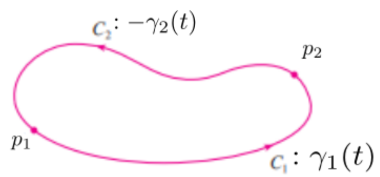


Figura 1: Stewart, Cálculo, vol. 2

($\Longrightarrow$): Sejam γ fechada em A, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ em γ tome γ_1 e γ_2 de $\mathbf{p}_1$ a $\mathbf{p}_2$ tais que $\gamma = \gamma_1 \cup -\gamma_2$. Então,

$$\int_\gamma F \cdot d\mathbf{s} = \int_{\gamma_1} F \cdot d\mathbf{s} + \int_{-\gamma_2} F \cdot d\mathbf{s} = \int_{\gamma_1} F \cdot d\mathbf{s} - \int_{\gamma_2} F \cdot d\mathbf{s} = 0$$

($\Longleftarrow$): Sejam γ_1 e γ_2 de $\mathbf{p}_1$ a $\mathbf{p}_2$ e tome $\gamma = \gamma_1 \cup -\gamma_2$ que é fechada. Então,

$$0 = \int_\gamma F \cdot d\mathbf{s} = \int_{\gamma_1} F \cdot d\mathbf{s} + \int_{-\gamma_2} F \cdot d\mathbf{s} = \int_{\gamma_1} F \cdot d\mathbf{s} - \int_{\gamma_2} F \cdot d\mathbf{s}$$

PROBLEMA: verificar infinitas integrais de linha não é muito bom!

Lembrete: TFC ($n=1$): Se $F : A = [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tem primitiva φ, isto é, $F = \varphi'$ em (a,b), então

$$\int_a^b F = \varphi(b) - \varphi(a).$$

. . . .

Sejam $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\gamma : [a,b] \to A$ tal que $\gamma(a) = \mathbf{p}_1$ e $\gamma(b) = \mathbf{p}_2$.
Se $F = \varphi' = \nabla\varphi$ **em** A, então

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} &= \int_\gamma \nabla\varphi \cdot d\mathbf{s} \\
&= \int_a^b \nabla\varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
&\overset{\text{Regra Cadeia}}{=} \int_a^b \frac{d}{dt}\left(\varphi(\gamma(t))\right) dt \\
&\overset{\text{TFC}}{=} \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) \\
&= \varphi(\mathbf{p_2}) - \varphi(\mathbf{p_1}).
\end{aligned}$$

. . . .

Teorema 1.1 (Teorema Fundamental para integrais de linha)**.**
Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ **um aberto e** $F : A \to \mathbb{R}^n$ **um c.v. contínuo**. **Se existir**

$$\varphi : \mathbf{A} \to \mathbb{R} \quad \textit{tal que} \quad F = \nabla\varphi \ \textit{em}\ A$$

então

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \varphi(\mathbf{p}_2) - \varphi(\mathbf{p}_1),$$

para qualquer curva $\gamma \subseteq A$ que vai de $\mathbf{p}_1$ a $\mathbf{p}_2$.

Consequentemente, a integral de linha de F é independente do caminho.

Definição Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um c.v. contínuo. Dizemos que **F é conservativo (c.v.c.) em A quando existe $\varphi : A \to \mathbb{R}$ tal que**

$$F = \nabla\varphi \quad \textbf{em } A.$$

A função φ é dita **potencial de F** (ou primitiva de F) em A.

Observação. Se φ é potencial de F, então $\varphi + c$ também é, $\forall\, c \in \mathbb{R}$.

Nota. O Teorema 1.1 pode ser reescrito como:

F é um c.v.c. em um aberto A $\Longrightarrow$ a integral de linha de F é independente do caminho em A.

Observação. **Quando um c.v. contínuo é conservativo??**

- Para $n = 1$, toda função contínua F tem primitiva (potencial): basta considerar
$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} F(t)\, dt \quad (x_0 \text{ fixo}).$$

- Para $n > 1$, toda função contínua F tem potencial?

Exemplos. Considere $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $a > 0$.

1. $F(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}\widehat{i} + \dfrac{y}{x^2+y^2}\widehat{j}$ possui função potencial em A??

2. $F(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\widehat{i} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\widehat{j}$ possui função potencial em A??

   Se consideramos $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, quanto vale $\displaystyle\int_\gamma F \cdot d\mathbf{s}$??

Para $n > 1$, como saber quando existe uma função potencial para um campo vetorial?
Para $n > 1$, uma função potencial para um campo vetorial tem forma similar ao caso $n = 1$?

Geogebra Wolfram

Definição Um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ é **conexo por caminhos** quando quaisquer dois pontos de A podem ser ligados por um caminho inteiramente contido em A.

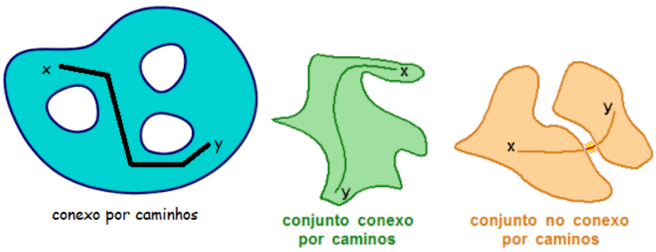


Figura 2: Figuras da internet

. . . .

$(n = 2)$

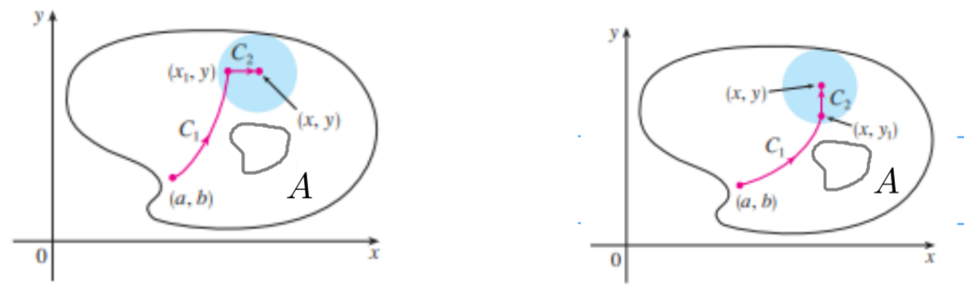
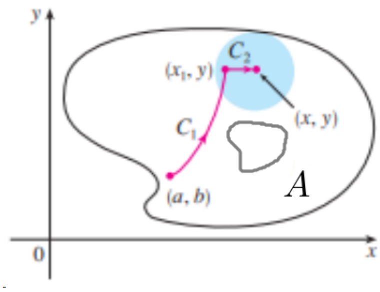


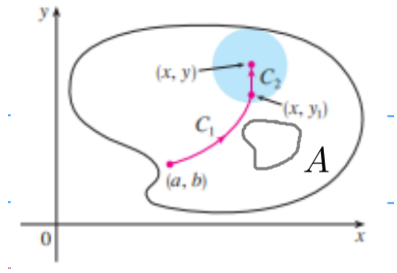
Figura 3: Stewart, Cálculo, vol. 2

- A conexo por caminhos
- $\mathbf{p}_0 = (a, b) \in A$ fixo
- Para cada $\mathbf{p} = (x, y) \in A$, a função abaixo está bem definida **se a integral de linha de F é independente do caminho**

$$\varphi(x, y) := \int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}} F \cdot d\mathbf{s}$$

- **queremos calcular o gradiente de φ:** $\nabla\varphi = (\varphi_x, \varphi_y)$
- A aberto $\Longrightarrow$ existe uma bola aberta B de centro $\mathbf{p}$ contida em A
- tome $x_1 < x$ tal que $(x_1, y) \in B$ *(tome $y_1 < y$ tal que $(x, y_1) \in B$)*





- C_1: caminho de $\mathbf{p}_0$ a (x_1, y) *(C_1: caminho de $\mathbf{p}_0$ a (x, y_1))*
- C_2: segmento de (x_1, y) a $\mathbf{p}$ *(C_2: segmento de (x, y_1) a $\mathbf{p}$)*
- $\varphi(x, y) = \displaystyle\int_{C_1} F \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_2} F \cdot d\mathbf{s}$
- $\displaystyle\int_{C_1} F \cdot d\mathbf{s}$ não depende de x $\left(\displaystyle\int_{C_1} F \cdot d\mathbf{s} \text{ não depende de } y\right)$
- $\varphi_x(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x} \displaystyle\int_{C_2} F \cdot d\mathbf{s}$ $\left(\varphi_y(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y} \displaystyle\int_{C_2} F \cdot d\mathbf{s}\right)$
- $F = (P, Q)$
- $C_2 : \gamma(t) = (t, y), \quad t \in [x_1, x]$ $(C_2 : \gamma(t) = (x, t), \quad t \in [y_1, y])$
- $$\begin{aligned} \varphi_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} F \cdot d\mathbf{s} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{x_1}^{x} [P(t, y)1 + Q(t, y)0] dt \right) \\ &= P(x, y) \end{aligned}$$ $$\left(\begin{aligned} &\varphi_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{C_2} F \cdot d\mathbf{s} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{y_1}^{y} [P(x, t)0 + Q(x, t)1] dt \right) \\ &= Q(x, y) \end{aligned} \right)$$
- **$\nabla \varphi(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p})$ para $\mathbf{p} \in A$**
- **φ é função potencial de F em A**
- **F é conservativo em A**

. . . .

Teorema 1.2. *Sejam* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ **um conjunto aberto conexo por caminhos e** $F : A \to \mathbb{R}^n$ **um c.v. contínuo. Se**

a integral de linha de F **é independente do caminho em** A**,**

então uma função potencial φ **de** F **é**

$$\varphi(\mathbf{p}) := \int_{\mathbf{p_0}}^{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}, \quad \mathbf{p} \in \mathbf{A},$$

onde $\mathbf{p}_0 \in A$ **é um ponto fixado.**

Consequentemente, F **é conservativo em** A.

Além disso, se ψ *é outra função potencial de* F*, então* $\varphi - \psi = const.$

Nota. • F **é um c.v.c. em um aberto** $A \Longrightarrow$ **a integral de linha de** F **é independente do caminho em** A.

• F **é um c.v.c. em um aberto conexo por caminhos** $A \Longleftrightarrow$ **a integral de linha de** F **é independente do caminho em** A.

PROBLEMA: ainda precisamos verificar infinitas integrais de linha para saber se é conservativo!!

Queremos condição mais simples que permita concluir que um c.v. é conservativo!!

Observação. Seja $F : A \to \mathbb{R}^n$ um c.v. contínuo com derivadas contínuas em um conjunto aberto $A \subseteq \mathbb{R}^n$: $F(x_1, \ldots, x_n) = (F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_n(x_1, \ldots, x_n))$.
Se $F = \nabla\varphi$ em A (ou seja, F é c.v.c. em A), **então**

$$\frac{\partial\ F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) \underset{Calculo\,2}{\overset{T.Schwarz}{=}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i},$$

para todo $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Em particular,

- $n = 2$: $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

- $n = 3$: $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Lembrando: O **rotacional** de $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, é:

$$rotF := \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\widehat{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\widehat{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\widehat{k}$$

Se $n = 2$, $rotF := \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\widehat{k}$, ou simplesmente, $rotF := \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$

Nota. Nos casos $n = 2$ ou $n = 3$, podemos reescrever a Observação anterior como:

Se F é um c.v.c. de classe C^1 em A, então $rotF = \overrightarrow{0}$ em A.

Continuamos na próxima aula!!