

Conteúdo

H1Operadores compactos	Aula 26	H2
H1.1 Propriedades básicas		H3
H1.2 Demonstrações das propriedades básicas		H4
H2A Teoria de Riesz-Fredholm		H12
	Aula 27	H16
H3Espectro de Um Operador		H22
H3.1 Espectro do operador compacto		H26
H3.2 Operadores auto-adjuntos e seu espectro		H33
	Aula 28	H40
H4Decomposição Espectral de Operadores Compactos e Auto- Adjuntos		H41

H1 Operadores compactos

Aula 26

Lembrete: [Fol99, p.15-16]

Um conjunto E num espaço métrico (X, ρ) , é dito **totalmente limitado** se, para cada $\epsilon > 0$, E pode ser coberto por um número finito de bolas de raio ϵ .

$$E \text{ totalmente limitado} \xRightarrow{\neq} E \text{ limitado}$$

$$E \text{ totalmente limitado} \iff \bar{E} \text{ totalmente limitado}$$

Teorema H1.1. *Se E é um subconjunto de um espaço métrico (X, ρ) , as seguintes afirmativas são equivalentes:*

- (a) *E é completo e totalmente limitado*
- (b) **(A propriedade de Bolzano-Weierstrass)** *Toda sequência em E tem uma subsequência que converge para um ponto de E*
- (c) **(A propriedade de Heine-Borel)** *Se $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma cobertura de E por abertos de (X, ρ) , existe um conjunto finito $F \subset A$ tal que $\{V_\alpha\}_{\alpha \in F}$ cobre E .*

◁

Um conjunto E num espaço métrico (X, d) , é **compacto** se satisfaz as propriedades (a)-(c) do Teorema H1.1

$$\text{compacto} \xRightarrow{\neq \text{dim}=\infty} \text{fechado e limitado}$$

X e Y e.v.n. de Banach

Definição H1.2. Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in L(X, Y)$.

- T é dito **de posto finito** se sua imagem tem dimensão finita.
- T é dito **compacto** se $T(\overline{B_X})$ é precompacto, i.e., $\overline{T(\overline{B_X})}$ é compacto (na topologia forte).

Exercício A3.14. s.e.v. fechado de espaço completo é completo.

$\overline{T(\overline{B_X})}$ é compacto equivale (sendo em espaços métricos) a: (T. H1.1)

- se $\{x_n\} \subset X$ é seq. limitada, então $\{Tx_n\}$ possui uma subsequência convergente.

- $T(\overline{B_X})$ pode ser coberto por num. finito de bolas de raio ϵ dado (i.e., $T(\overline{B_X})$ é totalmente limitado)

Denotamos por $K(X, Y)$ e $L_f(X, Y)$, resp., os conjuntos dos operadores compactos e de posto finito, de X em Y .¹ ★

Observação H1.3. $L_f(X, Y) \subset K(X, Y)$ ★

$\overline{T(\overline{B_X})} \subset \text{Im}(T)$ é fechado e limitado ($|T(x)| \leq \|T\|$), em dimensão finita, compacto

H1.1 Propriedades básicas

Proposição H1.4. $K(X, Y)$ é um subespaço vetorial fechado de $L(X, Y)$. ◁

Corolário H1.5. Se $\{T_n\} \subseteq L_f(X, Y)$ e $T \in L(X, Y)$ são tais que $T_n \rightarrow T$ em $L(X, Y)$, então $T \in K(X, Y)$. ◁

Proposição H1.6. Se $T \in K(X, Y)$ e Y é um espaço de Hilbert, então existe uma sequência $\{T_n\} \subseteq L_f(X, Y)$ tal que $T_n \rightarrow T$ em $L(X, Y)$.^a ◁

^aMais em geral, a afirmação vale se Y é de Banach e possui uma base de Schauder

¹Escrevemos $K(X) = K(X, X)$.

Exemplo H1.7. ($1 \leq p \leq \infty$)

- $T : \ell_p \rightarrow \ell_p : x = (x_i) \mapsto Tx = (x_i/i)$ é compacto (veja ex 6.1 do [Bre11])



para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$T_k : \ell_p \rightarrow \ell_p : x = (x_i) \mapsto T_k(x) := (y_i^k)_i, \quad \text{onde} \quad y_i^k = \begin{cases} x_i/i, & i \leq k \\ 0, & i > k \end{cases}$$

T_k é linear, limitado de posto finito

$$\text{Im}(T_k) \subset [e_1, \dots, e_k]$$

$$\|T_k x\|_p^p = \sum_{i=1}^{\infty} |y_i^k|^p = \sum_{i=1}^k \frac{|x_i|^p}{i^p} \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p = \|x\|_p^p$$

$T_k \rightarrow T$ em $L(\ell_p, \ell_p)$

$$\|T_k x - Tx\|_p^p = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|x_i|^p}{i^p} \leq \frac{1}{(k+1)^p} \|x\|_p^p$$

$$\|T_k - T\|_p^p \leq \frac{1}{(k+1)^p} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$\therefore T$ é compacto

(Cor. H1.5)

H1.2 Demonstrações das propriedades básicas

Prova da Proposição H1.4. $K(X, Y)$ é um s.e.v. fechado de $L(X, Y)$.

- $K(X, Y)$ é um s.e.v.: $T, S \in K(X, Y), \lambda \in \mathbb{K} \implies T + S, \lambda T \in K(X, Y)$

Af. $K(X, Y)$ é fechado

- $\{T_n\} \subset K(X, Y)$ convergente, $T_n \rightarrow T$ em $L(X, Y)$

Queremos $T \in K(X, Y)$, i.e., $T(\overline{B_X})$ pode ser coberto por num. finito de bolas de raio ϵ dado

- $\epsilon > 0$
- $\exists n_0; \quad \|T_n - T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T_n(x) - T(x)\| < \frac{\epsilon}{2}, n \geq n_0$
- $T_{n_0}(\overline{B_X}) \subset \bigcup_{finita} B_{\epsilon/2}(y_i)$

Af. $T(\overline{B_X}) \subset \bigcup_{finita} B_{\epsilon}(y_i)$

- $x \in \overline{B_X}$
 $\|T(x) - y_i\| < \epsilon$ para algum y_i ?
- $T_{n_0}(x) \in B_{\epsilon/2}(y_i)$ para algum y_i , i.e.,

$$\|T_{n_0}(x) - y_i\| < \frac{\epsilon}{2}$$

- $\|T_{n_0}(x) - T(x)\| \leq \|T_{n_0} - T\| \|x\| < \frac{\epsilon}{2}$

$$\therefore \|T(x) - y_i\| \leq \|T(x) - T_{n_0}(x)\| + \|T_{n_0}(x) - y_i\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

□

Prova do Corolário H1.5. Se $\{T_n\} \subseteq L_f(X, Y)$ e $T \in L(X, Y)$; $T_n \rightarrow T$ em $L(X, Y)$, então $T \in K(X, Y)$.

- T_n de posto finito é compacto (Obs. H1.3)
- $T_n \rightarrow T$
- $K(X, Y)$ fechado (Prop. H1.4)
- $T \in K(X, Y)$

□

Prova da Proposição H1.6. Se $T \in K(X, Y)$ e Y é um espaço de Hilbert, então existe uma sequência $\{T_n\} \subseteq L_f(X, Y)$ tal que $T_n \rightarrow T$ em $L(X, Y)$.

- $\varepsilon = 1/n > 0, n \in \mathbb{N}$
- $T(\overline{B_X}) \subset \bigcup_{i \in I_n} B_{1/n}(y_i)$ (I_n finito) (T é compacto)
- $G_n := [y_i : i \in I_n] \subset Y$ é s.e.v. fechado ($\dim G_n < \infty$) convexo
- $T_n := P_{G_n} \circ T$
- T_n é linear e limitado e de posto finito

Teorema G3.9. Se H é um espaço de Hilbert e M é um subespaço vet. fechado, então $P_M : X \rightarrow M$ (projeção ortogonal) é um operador linear com $\|P_M\| = 1$

Proposição G3.5. $C \neq \emptyset$ subconjunto fechado e convexo de um espaço de Hilbert H

$$\|P_C x_1 - P_C x_2\| \leq \|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in H,$$

Observação G3.3. Se $x_0 \in C$, $P_C x_0 = x_0$

Af. $T_n \rightarrow T$ em $L(X, Y)$

Queremos $\|T_n - T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T_n(x) - T(x)\| \rightarrow 0$

- $x \in \overline{B_X}$
- $Tx \in B_{1/n}(y_i)$ para algum $i \in I_n$, i.e.,

$$\|Tx - y_i\| < \frac{1}{n}$$

■

$$\|T_n x - Tx\| \leq \|T_n x - y_i\| + \|y_i - Tx\|$$

$$\stackrel{\text{def. } T_n}{=} \left\| P_{G_n} T x - y_i \right\| + \|y_i - Tx\|$$

$$\stackrel{y_i \in G_n}{=} \stackrel{\text{Obs. G3.3}}{=} \|P_{G_n} T x - P_{G_n} y_i\| + \|y_i - Tx\|$$

$$\stackrel{\text{Prop. G3.5}}{\leq} \|Tx - y_i\| + \|y_i - Tx\| < \frac{2}{n}, \quad \forall n \quad \square$$

Resultado de Análise/Topologia:

Definição H1.8. Uma família $\mathcal{F}$ de funções é dita

- **equicontínua em x** se para todo $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança U de x tal que $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ para $y \in U$ e $f \in \mathcal{F}$,
- **equicontínua** se for equicontínua em todo ponto
- **pontualmente limitada** se $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ é limitado para todo x . ★

Teorema H1.9 [Arzelá-Ascoli]. *[Fol99, p.137] Se K é um espaço compacto e Hausdorff e $\mathcal{F}$ uma família equicontínua e pontualmente limitada em $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$, então $\mathcal{F}$ é totalmente limitada e seu fecho é compacto ($\mathcal{F}$ relativamente compacto).* ◁

Teorema H1.10. $T \in K(X, Y)$ se, e somente se, $T^* \in K(Y^*, X^*)$. ◁

Demonstração.

($\implies$) T compacto implica T^* compacto

Basta mostrar que para toda seq. $\{g_n\}$ em $\overline{B_{Y^*}}$, a seq. $\{T^*g_n\}$ em X^* possui subseq. convergente.

Queremos $\{T^*g_{n_k}\} \subset X^*$ convergente

Basta $\{T^*g_{n_k}\}$ de Cauchy (X^* é Banach)

Lembre: $T^*g(x) = g(Tx)$, $x \in D(T) = X$, $g \in D(T^*) = Y^*$ (C2.1)

- $\{g_n\} \subset \overline{B_{Y^*}} \subset Y^*$: $g_n : Y \rightarrow \mathbb{K}$; $\|g_n\|_{Y^*} \leq 1$
- $K := \overline{T(\overline{B_X})} \subset Y$ é compacto e Hausdorff (T é compacto, Y Ban., métr., Hausd.)
- $\mathcal{F} := \{\varphi_n := g_n|_K : K \rightarrow \mathbb{K}; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}(K)$

Af.1 $\mathcal{F}$ é pontualmente limitada

Af.2 $\mathcal{F}$ é equicontínua

- $\overline{\mathcal{F}}$ é compacto
- $\{\varphi_n\} \subset \overline{\mathcal{F}}$

(pag. A4) Em esp. métrico (X, d) : $C \subseteq X$ é **compacto** se e só se toda sequência em C tem uma subsequência convergente a um ponto de C

- $\exists \{\varphi_{n_k}\} = \{g_{n_k}|_K\}$ subseq. de $\{\varphi_n\}$ que convergente a $\varphi \in \mathcal{C}(K)$
- $\{\varphi_{n_k}\}$ é de Cauchy, i.e.,

$$\|\varphi_{n_k} - \varphi_{n_l}\|_\infty = \sup_{y \in K = \overline{T(\overline{B_X})}} |\varphi_{n_k}(y) - \varphi_{n_l}(y)| \rightarrow 0$$

Af.3 $\{T^*g_{n_k}\}$ de Cauchy

$$\begin{aligned} \|T^*g_{n_k} - T^*g_{n_l}\|_{X^*} &= \sup_{x \in \overline{B_X}} |T^*g_{n_k}(x) - T^*g_{n_l}(x)| \\ &= \sup_{x \in \overline{B_X}} |g_{n_k}(Tx) - g_{n_l}(Tx)| \\ &\stackrel{Tx \in K}{=} \sup_{x \in \overline{B_X}} |\varphi_{n_k}(Tx) - \varphi_{n_l}(Tx)| \\ &= \sup_{y \in T(\overline{B_X})} |\varphi_{n_k}(y) - \varphi_{n_l}(y)| \\ &\leq \sup_{y \in K = \overline{T(\overline{B_X})}} |\varphi_{n_k}(y) - \varphi_{n_l}(y)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Prova da Af. 1.: $\mathcal{F}$ é pontualmente limitada, de fato, equilimitada

$$\mathcal{F} := \{\varphi_n := g_n|_K : K \rightarrow \mathbb{K}; n \in \mathbb{N}\}$$

pontualmente limitada se $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ é limitado para todo x .

- para todo $y \in K \subset Y$ (K é comp., ltdo)

$$|\varphi_n(y)| \stackrel{y \in K}{=} |g_n(y)| \stackrel{y \in K}{\leq} \|g_n\|_{Y^*} \|y\| \leq 1 \|y\| = \|y\| \leq \text{const.}, \forall n$$

Prova da Af. 2.: $\mathcal{F}$ é equicontínua

equicontínua em x se $\forall \varepsilon > 0, \exists U \ni x; |f(y) - f(x)| < \varepsilon$ para $y \in U$ e $f \in \mathcal{F}$,
 equicontínua se for equicontínua em todo ponto

Queremos:

$\forall \epsilon > 0, \overset{?}{\exists} \delta; \underline{\|y - y'\| < \delta} \implies |\varphi_n(y) - \varphi_n(y')| < \epsilon, \forall y, y' \in K, \forall n$

$$|\varphi_n(y) - \varphi_n(y')| \stackrel{y, y' \in K}{=} |g_n(y) - g_n(y')| \stackrel{y, y' \in Y}{\leq} \underline{\|g_n\|_{Y^*}} \|y - y'\| \leq \underline{\|y - y'\|}$$

basta tomar $\delta = \epsilon$

($\Leftarrow$) T^* compacto implica T compacto

- $T^{**} : X^{**} \rightarrow Y^{**}$ é compacto (T^* compacto, passo anterior)
- $\overline{T^{**}(\overline{B_{X^{**}}})}$ é compacto

$T^{**}(\overline{B_{X^{**}}})$ pode ser coberto por num. finito de bolas de raio ϵ dado (Def.H1.2)

Queremos: $\overline{T(\overline{B_X})}$ compacto

$J_X : \underline{X} \rightarrow X^{**}, \quad J_Y : Y \rightarrow Y^{**}$ mergulhos canônicos (iso.isom.)

$$\underline{J_X(\overline{B_X})} \subset \overline{B_{X^{**}}} \implies T^{**}(J_X(\overline{B_X})) \subset T^{**}(\overline{B_{X^{**}}}) \implies$$

$$\overline{T^{**}(J_X(\overline{B_X}))} \subset \underbrace{\overline{T^{**}(\overline{B_{X^{**}}})}}_{\text{compacto}} \implies$$

$$\overline{T^{**}(J_X(\overline{B_X}))} \text{ compacto}$$

$T^{**}(J_X(\overline{B_X}))$ pode ser coberto por num. finito de bolas de raio ϵ dado

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{J_X} & X^{**} \xrightarrow{T^{**}} Y^{**} \\ & \searrow & \nearrow \\ & T^{**} \circ J_X & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \xrightarrow{J_Y} Y^{**} \\ & \searrow & \nearrow \\ & J_Y \circ T & \end{array}$$

Basta mostrar: $J_Y(T(\overline{B_X})) = T^{**}(J_X(\overline{B_X}))$

J_Y isometria $\implies T(\overline{B_X})$ compacto

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{J_X} & X^{**} \xrightarrow{T^{**}} Y^{**} \\ & \searrow T^{**} \circ J_X & \nearrow \\ & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \xrightarrow{J_Y} Y^{**} \\ & \searrow J_Y \circ T & \nearrow \\ & & \end{array}$$

- $\varphi \in Y^*$:

$$(T^{**}(J_X x))(\varphi) \stackrel{ppdd.adj.}{=} (J_X x(T^*))(\varphi) = J_X x(T^*(\varphi))$$

$$\stackrel{def.J_X}{=}_{x \in X} T^*(\varphi)(x)$$

$$\stackrel{ppdd.adj.}{=} \varphi(Tx)$$

$$\stackrel{def.J_Y}{=}_{Tx \in Y} J_Y(Tx)(\varphi)$$

$$\therefore T^{**}(J_X x) = J_Y(Tx), \forall x \in X$$

$$\therefore T^{**} \circ J_X \equiv J_Y \circ T$$

□

Proposição H1.11. Se $T \in L(X, Y)$ então

- T compacto implica “ $x_n \rightharpoonup x$ implica $Tx_n \rightarrow Tx$ ”
- se X é reflexivo e “ $x_n \rightharpoonup x$ implica $Tx_n \rightarrow Tx$ ” então T é compacto
- T é de posto finito se e só se T é contínuo de X_σ em Y_τ .

◁

Demonstração. Exercício (veja ex 6.7 do [Bre11]).

□

Exercícios

Exercício H1.12. Mostre que $T \circ S$ é compacto sempre que T, S são lineares e contínuos e um deles é compacto ★

Exercício H1.13. Faça os exercícios

- 6.1, 6.2 (use o [Teorema D3.9](#)), em particular:

- $T : \ell_p \rightarrow \ell_p : (x_i) \mapsto (x_i/i)$ é compacto

- $T : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1]) : f \mapsto \int_0^t f$ é compacto

- 6.3, 6.4, 6.5, 6.6 (use o sistema de Rademacher, ex 5.32), em particular,
 - se $V = \{x \in \ell_2 : \sum ix_i^2 < \infty\}$ com a norma $\|x\|_V^2 = \sum ix_i^2$ então $T : V \rightarrow \ell_2 : x \mapsto x$ é compacto.

Analogamente $T : \ell_2 \rightarrow W : x \mapsto x$ com $W = \{x \text{ seq.} : \sum x_i^2/i < \infty\}$ com a norma $\|x\|_W^2 = \sum x_i^2/i$.

Neste caso dizemos que $V \subseteq \ell_2 \subseteq W$ [com inclusão compacta](#)

- a inclusão de ℓ_p em ℓ_q ($p < q$) não é compacta (apenas contínua)
- a inclusão de $L^p(0, 1)$ em $L^q(0, 1)$ ($p > q$) não é compacta (apenas contínua).

- 6.7(pontos 1,2,4) e 6.8 (p. 170...) do [\[Bre11\]](#). ★

Exercício H1.14. Faça os exercícios 6.12 e 6.13 (p. 173...) do [\[Bre11\]](#). ★

Exercício H1.15. (!) Considere o [operador integral](#)

$$T : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1] : f \mapsto g(x) = \int_0^1 h(x, y)f(y) dy$$

onde $h \in L^2([0, 1]^2)$. Mostre que o operador é bem definido e [compacto](#). Encontre núcleos h em que T tem e não tem posto finito. ★

H2 A Teoria de Riesz-Fredholm

Para um funcional T linear limitado em espaço de dimensão finita, é conhecido que T é sobrejetor se só se T é injetor (alternativa c).

Um funcional linear limitado em espaço de dimensão infinita pode ser injetor sem ser sobrejetor (e vice-versa):

$$T : \ell_2 \rightarrow \ell_2 : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$$

Para operadores compactos, tem-se resultados bastante similares com aqueles de dimensão finita:

$$A_{n \times n} x = b$$

$\det A \neq 0$: existe única solução para todo b

$\det A = 0$: n condições sobre b para possuir solução

Teorema H2.1 [Alternativa de Fredholm]. ^a Se X é um espaço de Banach e $T \in K(X)$, então ^b

a) $\dim(N(I - T)) < \infty$,

b) $R(I - T)$ é fechada e portanto $R(I - T) = N(I - T^*)^\perp$,

c) $N(I - T) = \{0\}$ se, e somente se, $R(I - T) = X$,

d) $\dim(N(I - T)) = \dim(N(I - T^*))$. ◁

^aTodas alternativas dizem que T não perturba muito: $N(I) = \{0\}$ e $N(I - T)$ tem no máximo finitos; $R(I) = X$ fechada e $R(I - T)$ também fechada

^bDe fato, a [Alternativa de Fredholm](#) vale para $\lambda I - T$, $\lambda \neq 0$

A “Alternativa” seria entre (mutuamente exclusivas)

- (1) $I - T$ é sobre, ou seja, a equação $(I - T)x = y$ tem solução única para todo $y \in X$ (por c)
- (2) $I - T$ não é injetora, ou seja, a equação $(I - T)x = 0$ tem solução não trivial

Além disso, no caso (2) y pertence a imagem se satisfaz n condições lineares (por b, d: $\text{codim} R(I - T) = \text{codim} N(I - T^*)^\perp = \dim N(I - T^*) = n$).

Demonstração.

(a) $\dim N(I - T) < \infty$

- $Y = N(I - T) = \{x \in X : (I - T)x = 0\}$

Queremos $\dim Y < \infty$

Teorema de Riesz A5.7. Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ tal que $\bar{B}_1(0) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ é compacta. Então X tem dimensão finita.

Af.: $\overline{B_Y}$ é compacto, e logo $\dim Y < \infty$

Note

$$\overline{B_Y} = \{x \in Y : \|x\| \leq 1\} = \{x \in X : x = Tx \text{ e } \|x\| \leq 1\}$$

$$\therefore x \in \overline{B_Y} \implies x \in \overline{B_X} \text{ e } x = Tx \in T(\overline{B_X})$$

$$\therefore \overline{B_Y} \subset T(\overline{B_X})$$

- $T(\overline{B_X})$ é compacto (T compacto)

- $\overline{B_Y}$ é compacto

Exercícios D5 se $F \subseteq K$ com F fechado e K compacto então F é compacto

.....

(b) $R(I - T)$ é fechada e portanto $R(I - T) = N(I - T^*)^\perp$ ²

Teorema C3.7. Se $T \in L(X, Y)$ (espaços de Banach) então (veja seção C3)

(a) $N(T^*) = R(T)^\perp$, $N(T^*)^\perp = \overline{R(T)}$

(b) $N(T) = R(T^*)^\perp$, $N(T)^\perp \supseteq \overline{R(T^*)}$

(c) são equivalentes:

i) $R(T)$ é fechada

ii) $R(T^*)$ é fechada

Basta mostrar que $R(I - T)$ é fechada

$$^2(I - T)^* = (I - T^*)$$

- $y_n \in R(I - T)$: $y_n = x_n - Tx_n$, com $x_n \in X$

- $y_n \rightarrow y$

Queremos mostrar que $y \in R(I - T)$

- $d_n := d(x_n, N(I - T)) = \inf_{z \in N(I - T)} \|x_n - z\|$

- $\exists z_n \in N(I - T); \quad d_n = \|x_n - z_n\|$ (pois por a), $\dim N(I - T) < \infty$ verifique!

Af.1 $\|x_n - z_n\|$ é limitada, logo $\{x_n - z_n\}$ é limitada

- $\exists \{x_{n_k} - z_{n_k}\}$ tal que $T(x_{n_k} - z_{n_k}) \rightarrow l$ (T compacto)

$\overline{T(\overline{B_X})}$ é compacto equivale

-se $\{x_n\} \subset X$ é seq. limitada, então $\{Tx_n\}$ possui uma subsequência convergente. (Def.H1.2)

- para todo n ,

$$y_n = x_n - Tx_n = x_n - Tx_n - (z_n - Tz_n) = (x_n - z_n) - (Tx_n - Tz_n)$$

•

$$(x_{n_k} - z_{n_k}) = (Tx_{n_k} - Tz_{n_k}) + y_{n_k} \rightarrow l + y$$

•

$$y = \lim y_{n_k} = \lim [(x_{n_k} - z_{n_k}) - T(x_{n_k} - z_{n_k})] \stackrel{T \text{ cont}}{=} l + y - T(l + y) = (I - T)(l + y)$$

- $y \in R(I - T)$

Prova da Af.1: $\|x_n - z_n\|$ é limitada

- $\sup \|x_n - z_n\|$ não é limitada

- $\exists \|x_{n_k} - z_{n_k}\| \rightarrow \infty$

- $w_{n_k} := \frac{x_{n_k} - z_{n_k}}{\|x_{n_k} - z_{n_k}\|}$

- $\|w_{n_k}\| = 1$

- $\exists \{w_{n_{k_j}}\}$ tal que $T(w_{n_{k_j}}) \rightarrow p$ (T compacto)

•

$$\begin{aligned} w_{n_k} - Tw_{n_k} &= \frac{1}{\|x_{n_k} - z_{n_k}\|} \left(x_{n_k} - z_{n_k} - T(x_{n_k} - z_{n_k}) \right) \\ &= \frac{1}{\underbrace{\|x_{n_k} - z_{n_k}\|}_{\rightarrow 0}} \underbrace{y_{n_k}}_{\rightarrow y} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

•

$$w_{n_{k_j}} = w_{n_{k_j}} - Tw_{n_{k_j}} + Tw_{n_{k_j}} \rightarrow 0 + p = p$$

- $p \in N(I - T)$

$$(I - T)(p) = \lim(I - T)(w_{n_{k_j}}) = 0$$

- $d(p, N(I - T)) = 0$

•

$$\begin{aligned} d(w_{n_{k_j}}, N(I - T)) &= d\left(\frac{x_{n_{k_j}} - z_{n_{k_j}}}{\|x_{n_{k_j}} - z_{n_{k_j}}\|}, N(I - T)\right) \\ &= \inf \left\{ \left\| \frac{x_{n_{k_j}} - z_{n_{k_j}}}{\|x_{n_{k_j}} - z_{n_{k_j}}\|} - u \right\| : u \in N(I - T) \right\} \\ &\stackrel{z_{n_{k_j}} \in N(I - T)}{=} \frac{1}{\|x_{n_{k_j}} - z_{n_{k_j}}\|} \inf \left\{ \|x_{n_{k_j}} - v\| : v \in N(I - T) \right\} \\ &= \frac{1}{\|x_{n_{k_j}} - z_{n_{k_j}}\|} d(x_{n_{k_j}}, N(I - T)) \\ &= \frac{1}{\|x_{n_{k_j}} - z_{n_{k_j}}\|} \|x_{n_{k_j}} - z_{n_{k_j}}\| = 1 \end{aligned}$$

- fazendo $k \rightarrow \infty$, $d(p, N(I - T)) = 1$ $\Rightarrow \Leftarrow$

.....

Aula 27

(c) $N(I - T) = \{0\}$ se, e somente se, $R(I - T) = X$,

$(\implies)$

- $X_1 := R(I - T) \subset X$
- $\text{supor } X_1 \neq X : X_1 \subsetneq X$
- X_1 é s.e.v. fechado ($T \in K(X)$ + alternativa (b))
- X_1 é Banach (X Banach)
- $T(X_1) \subset X_1$

$$\begin{aligned} \blacksquare y \in T(X_1) : y &= Tx, \quad x \in X_1 = R(I - T) \\ \blacksquare \exists a \in X; x &= (I - T)(a) \\ y &= Tx = T(a - Ta) = Ta - T(Ta) = (I - T)(Ta) \in R(I - T) = X_1 \end{aligned}$$

- $T|_{X_1} : X_1 \rightarrow X_1$ é compacto ($T \in K(X)$)
- $X_2 := R(I - T|_{X_1}) \subsetneq X_1$

$$\begin{aligned} \blacksquare \exists y &\in X \setminus X_1 \\ \blacksquare z &:= (I - T)(y) \in R(I - T) = X_1 \\ \blacksquare \text{supor } X_2 &= X_1 \\ \blacksquare z &\in X_2 \\ \blacksquare \exists w &\in X_1; z = (I - T|_{X_1})(w) = (I - T)(w) \\ \blacksquare (I - T)(w) &= z = (I - T)(y) \implies w - y \in N(I - T) = \{0\} \\ &\quad (N(I - T) = \{0\}) \\ \blacksquare X_1 \ni w &= y \notin X_1 \implies \text{contradiction} \end{aligned}$$

- X_2 é s.e.v. fechado ($T|_{X_1} \in K(X_1)$ + alternativa (b))
- seq. est. dec. de subespaços fechados de X :

$$\dots \subsetneq X_{n+1} \subsetneq X_n \subsetneq \dots X_2 \subsetneq \boxed{X_1 \subsetneq X}$$

- $\exists y_n \in X_n$; $\|y_n\| = 1$ e $d(y_n, X_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$

Lemma de Riesz A5.6. Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ e $M = X_{n+1} \subsetneq X = X_n$ um subespaço vetorial fechado. Então, para cada $\theta \in (0, 1)$, existe $y \in X$ tal que

$$\|y\| = 1 \quad \text{e} \quad \text{dist}(y, M) := \inf_{x \in M} \|y - x\| \geq \theta.$$

- $\{y_n\}$ é uma seq. limitada em X

Af. $\{Ty_n\}$ não possui subseq. convergente $\rightarrow \leftarrow$

(T compacto)

Basta mostrar que $\{Ty_n\}$ não possui subseq. de Cauchy

(X Banach)

•

$$\begin{aligned} Ty_n - Ty_m &= -(y_n - Ty_n) + (y_m - Ty_m) + (y_n - y_m) \\ &= \underbrace{[-(y_n - Ty_n) + (y_m - Ty_m) + y_n]}_{v_{n,m}} - y_m \end{aligned}$$

$$\bullet \quad v_{m,n} := - \underbrace{(I - T)\left(\underbrace{y_n}_{X_n}\right)}_{X_{n+1} = R(I - T|_{X_n})} + \underbrace{(I - T)\left(\underbrace{y_m}_{X_m}\right)}_{X_{m+1} = R(I - T|_{X_m})} + \underbrace{y_n}_{X_n}$$

- $n > m$

$$X_{n+1} \subsetneq X_n \subseteq X_{m+1}$$

- $v_{n,m} \in X_{m+1}, \quad n > m$

$$\bullet \quad \|Ty_n - Ty_m\| = \|v_{n,m} - y_m\| \stackrel{\text{def. dist}}{\geq} d(y_m, X_{m+1}) \geq \frac{1}{2}, \quad \forall n > m$$

- $\{Ty_n\}$ não possui subseq. convergente

($\Leftarrow$): $N(I - T) = \{0\}$ se, e somente se, $\boxed{R(I - T) = X}$,

Teorema C3.7. Se $T \in L(X, Y)$ (espaços de Banach) então (veja seção C3)

- (a) $\boxed{N(T^*) = R(T)^\perp}$, $N(T^*)^\perp = \overline{R(T)}$
- (b) $\boxed{N(T) = R(T^*)^\perp}$, $N(T)^\perp \supseteq \overline{R(T^*)}$

- $\boxed{N(I - T^*) = R(I - T)^\perp} \quad \boxed{= X^\perp} = \{0\}$ (hipótese)
- T^* compacto (T compacto + T. H1.10)

Teorema H1.10. $T \in K(X, Y)$ se, e somente se, $T^* \in K(Y^*, X^*)$.

- $R(I - T^*) = X^*$ (“ida” aplicada em T^*)
- $\boxed{N(I - T) = R(I - T^*)^\perp} = (X^*)^\perp = \boxed{\{0\}}$

(d) $\dim(N(I - T)) = \dim(N(I - T^*))$:

- $\dim(N(I - T)) = n < \infty$ (por (a))
- $\dim(N(I - T^*)) = n^* < \infty$ (por (a))

Af. 1. $n^* \leq n$

Af. 2. $n^* = n$:

- $\dim(N(I - T^{**})) \leq \dim(N(I - T^*)) = n^* \leq n$
(pela Af.1 para T^* e para T)
- $N(I - T) \subset N(I - T^{**})$

$$\begin{aligned}
 (I - T^{**})(Jx)(y^*) &= (Jx)((I - T^*)(y^*)) = ((I - T^*)(y^*)) \\
 &= (y^*)((I - T)(x)) \\
 &= J((I - T)(x))(y^*), \quad \forall y^*
 \end{aligned}$$

$$\bullet \quad x \in N(I - T)$$

$$(I - T^{**})(Jx) = J((I - T)(x)) = J(0) = 0$$

$$\therefore x \in N(I - T^{**})$$

$$\blacksquare \quad n = \dim(N(I - T^*)) \leq \dim(N(I - T^{**})) = n^* + \text{Af. 1, segue Af. 2}$$

Prova da Af. 1. $n^ \leq n$*

- supor $n < n^*$
- $N(I - T)$ admite complemento topológico W

Seja X um espaço de Banach e M um subespaço fechado. Um subespaço N é dito **complemento topológico de M** se N é fechado, $M \cap N = \{0\}$ e $M + N = X$.

- Subespaços de dimensão finita (ou fechados e de codimensão finita) sempre possuem complemento topológico. ^[Bre11, prova:p.38] (ver Seção B6)

- $X = N(I - T) \oplus W$, representação única:

$$x = y + w, \quad y \in N(I - T), \quad w \in W$$

- $P : X \rightarrow N(I - T) : x \mapsto Px = y$: projeção sobrejetora contínua
- $\text{Im}(I - T) = N(I - T^*)^\perp$ (alternativa (b))
- $\text{Im}(I - T)$ tem codimensão finita
- $\text{Im}(I - T)$ admite complemento topológico Y em X de dimensão n^* ,

$$X = \text{Im}(I - T) \oplus Y$$

- $\exists \phi : N(I - T) \rightarrow Y$ linear injetora e não sobrejetora ($n < n^*$)
- $S := T + (\phi \circ P)$
- $\phi \circ P$ é de posto finito ($\dim Y < \infty$)
- $S \in K(X)$ (T é compacto)

Af. 3 $N(I - S) = \{0\}$

- $Im(I - S) = X$ (Alternativa (c))
- $\exists f \in Y \subset X; f \notin Im\phi$ (ϕ não sobrej.)
- $u - Su = f$ não tem solução

$$u - Su = f \implies u - Tu - \phi(Pu) = f$$

$$\implies f + \phi(Pu) = u - Tu \in Im(I - T) \cap Y = \{0\}$$

$$\implies f = -\phi(Pu) \in Im\phi \quad \rightsquigarrow \leftarrow$$

- $n^* \leq n \quad \rightsquigarrow \leftarrow$

Prova da Af. 3 $N(I - S) = \{0\}$

- $u \in X = Im(I - T) \oplus Y; (I - S)u = 0$

$$u - Su = \underbrace{u - Tu}_{\in Im(I-T)} - \underbrace{\phi(Pu)}_{\in Y} = 0 = 0 + 0$$

- $u - Tu = 0$ e $\phi(Pu) = 0$
- $u \in N(I - T)$
- $Pu = u$ (P proj. de X sobre $N(I - T)$)
- $\phi(u) = 0$
- $u = 0$ (ϕ linear injetora)

□

Exercícios

Exercício H2.2 (EH1). (!) Considere o operador compacto $K : \ell_p \rightarrow \ell_p : (x_i) \mapsto (\lambda_i x_i)$ com $\lambda_i \rightarrow 0$

Verifique que ele satisfaz todas as afirmações do Teorema (encontre $N(I - T)$, $R(I - T)$ e explicita suas dimensões)

Faça o mesmo com os dois operadores (compactos?) obtidos compondo K com o operador de translação a direita e a esquerda, respectivamente. ★

Exercício H2.3 (EH2). Considere o operador compacto do exercício (6.2-3) do [Bre11]: encontre $N(I - T)$ e $R(I - T)$. ★

H3 Espectro de Um Operador

Definição H3.1. Seja X um espaço de Banach e $T : D(T) \subset X \rightarrow X$ s.e.v. um operador linear fechado.

- o **resolvente** de T é o conjunto

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - T) : D(T) \rightarrow X \text{ é bijetora} \}$$

– Se $\lambda \in \rho(T)$ o operador $(\lambda I - T)^{-1} : X \rightarrow D(T) \subset X$ é linear contínuo^a e é dito **operador resolvente de T em λ** .

- o **espectro** de T é o conjunto $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.

O espectro divide-se em:

- a) O **espectro pontual** $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : N(\lambda I - T) \neq \{0\}\}$ ^b

Se $\lambda \in \sigma_p(T)$,

- * λ é dito **autovalor de T** ,
- * $N(\lambda I - T)$ é dito **autoespaço de T** (correspondente a λ)
- * $x \in N(\lambda I - T) \setminus \{0\}$ é dito **autovetor de T** (correspondente a λ)

- b) O **espectro contínuo**

$$\sigma_c(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : N(\lambda I - T) = \{0\}, R(\lambda I - T) \neq \overline{R(\lambda I - T)} = X \right\}$$

- c) O **espectro residual**

$$\sigma_r(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : N(\lambda I - T) = \{0\}, \overline{R(\lambda I - T)} \neq X \right\} \quad \star$$

^aver Teorema da Aplicação Aberta para op. fechado, pag. C4

^b[Bre11] denota σ_p por EV (eigenvalues).

Observação H3.2. Sempre vale $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$. Se $T \in L(X, X)$,

1. e $\dim X < \infty$, então $\sigma_p(T) = \sigma(T)$;
2. e $\dim X = \infty$, pode acontecer $\sigma_p(T) \subsetneq \sigma(T)$.

$$\begin{aligned} T : \ell_2 \rightarrow \ell_2 : x = (x_1, x_2, x_3, \dots) &\mapsto Tx = (0, x_1, x_2, \dots) \\ 0 \in \sigma(T) \text{ (} T \text{ não é sobrej.)}, \quad 0 \notin \sigma_p(T) \text{ (} T \text{ é inj.)} \end{aligned}$$



Proposição H3.3. $\rho(T)$ é aberto e $\sigma(T)$ é fechado, em $\mathbb{C}$.
Em particular, se $T \in L(X, X)$, então $\sigma(T)$ é compacto e

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}. \quad \triangleleft$$

Demonstração.

$$\bullet \underbrace{\sigma(T)}_{\text{fechado}} = \mathbb{C} \setminus \underbrace{\rho(T)}_{\text{aberto}}$$

Af.: $\rho(T)$ é aberto

$$\bullet \lambda_0 \in \rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - T) : D(T) \rightarrow X \text{ é bijetora} \}$$

Queremos: $\stackrel{?}{\exists} r > 0; |\lambda - \lambda_0| < r \implies \lambda \in \rho(T)$

$$\lambda \in \rho(T) \iff (\lambda I - T) : D(T) \rightarrow X \text{ é bijetora}$$

$$\forall y \in X, \exists! x \in D(T); (\lambda I - T)x = y$$

$$(\lambda I - T)x = y \iff (\lambda_0 I - T)\underline{x} = y + (\lambda_0 - \lambda)x$$

$$\iff \underline{x} = \underbrace{(\lambda_0 I - T)^{-1}(y + (\lambda_0 - \lambda)x)}_{S_y(x)}$$

$$\iff S_y : X \rightarrow D(T)_{\subset X} \text{ tem um (único) ponto fixo}$$

(X Banach)

Teorema o Ponto Fixo de Banach A2.15. Seja (X, d) um espaço métrico completo e $f : X \rightarrow X$ uma contração. Então existe e é único um ponto fixo de f .

Basta mostrar que, dado $y \in X$, S_y é contração:

$$\stackrel{?}{\exists} L < 1 : \|S_y(x) - S_y(z)\| \leq L \|x - z\| \quad \forall x, z \in X$$

- $S_y(x) := (\lambda_0 I - T)^{-1}(y + (\lambda_0 - \lambda)x)$

$$\|S_y(x) - S_y(z)\| \stackrel{lin.}{=} \|(\lambda_0 I - T)^{-1}((\lambda_0 - \lambda)(x - z))\|$$

$$\stackrel{lin.}{=} |\lambda_0 - \lambda| \|(\lambda_0 I - T)^{-1}(x - z)\|$$

$$\stackrel{cont.}{\leq} \underbrace{|\lambda_0 - \lambda| \|(\lambda_0 I - T)^{-1}\|}_{\substack{< r = ? \\ = L < 1?}} \|x - z\|$$

- tome $r = \frac{1}{\|(\lambda_0 I - T)^{-1}\|}$

- $|\lambda - \lambda_0| < r \implies L < 1 \implies S_y \text{ contração}$

Logo, $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ é fechado

Af.: $T \in L(X)$: $\sigma(T)$ é limitado:

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}.$$

Logo, $\sigma(T)$ é compacto

(fechado e limitado em $\mathbb{C}$)

Basta mostrar que: $|\lambda| > \|T\| \implies \lambda \in \rho(T)$

pois daí:

$$\lambda \notin \rho(T) \text{ (i.e., } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \rho(T) = \sigma(T) \text{) } \implies |\lambda| \leq \|T\|$$

- $\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| > \|T\|$

Queremos mostrar que $(\lambda I - T) : X \rightarrow X$ é bijetora

$$\forall y \in X, \exists! x \in X; (\lambda I - T)x = y$$

$$(\lambda I - T)x = y \iff x = \underbrace{\frac{1}{\lambda}(y + Tx)}_{S_y(x)}$$

$$\iff S_y : X \rightarrow X \text{ tem um (único) ponto fixo}$$

$$\begin{aligned} \|S_y(x) - S_y(z)\| &= \left\| \frac{1}{\lambda}(Tx - Tz) \right\| \\ &\leq \underbrace{\frac{1}{|\lambda|} \|T\|}_{=L < 1} \|x - z\| \end{aligned}$$

□

Proposição H3.4. Se $x \in N(\lambda I - T)$ e $\phi \in N(\mu I - T^*)$ com $\lambda \neq \mu$ então

$$\langle \phi, x \rangle = \phi(x) = 0,$$

ou seja, $N(\lambda I - T) \subseteq N(\mu I - T^*)^\perp$ e $N(\lambda I - T^*) \subseteq N(\mu I - T)^\perp$. ◁

Demonstração.

•

$$\mu \phi(x) \stackrel{\phi \in N(\mu I - T^*)}{=} T^* \phi(x) = \phi(Tx) \stackrel{x \in N(\lambda I - T)}{=} \phi(\lambda x) = \lambda \phi(x)$$

•

$$N(\lambda I - T) \subseteq N(\mu I - T^*)^\perp \stackrel{\text{pag. } \textcolor{blue}{C11}}{=}_{N \subset X^*} \{x \in X : \phi(x) = 0, \forall \phi \in N(\mu I - T^*)\}$$

•

$$N(\lambda I - T^*) \subseteq N(\mu I - T)^\perp \stackrel{\text{pag. } \textcolor{blue}{C11}}{=}_{M \subset X} \{\phi \in X^* : \phi(x) = 0, \forall x \in N(\mu I - T)\}$$

□

Exercícios

Exercício H3.5. Considere os operadores em ℓ_2

$$S_r : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$$

$$S_l : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

$$T : (x_i) \mapsto (x_i/i)$$

mostre que 0 pertence, respectivamente, a σ_r , σ_p , σ_c . ★

Exercício H3.6. Faça o exercício 6.14 (p. 174) do [Bre11]

Mostre que se $0 \in \rho(T)$ então $\sigma(T^{-1}) = 1/\sigma(T)$. ★

Exercício H3.7. Faça o exercício 6.17, 6.18(exceto ponto 11) e 6.19 (p. 175...) do [Bre11] ★

H3.1 Espectro do operador compacto

Teorema H3.8. Se X é um espaço de Banach de dimensão infinita e $T \in K(X)$, então

a) $0 \in \sigma(T)$,

b) $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$,

c) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ pode ser

1. $\emptyset$,
2. finito,
3. uma sequência que tende a 0.

d) os autoespaços correspondentes a autovalores não nulos são finitodimensionais

◁

Lema H3.9. Nas condições do teorema H3.8, se $\lambda_n \rightarrow \lambda$ sendo $\{\lambda_n\} \subseteq \sigma(T) \setminus \{0\}$ e distintos, então $\lambda = 0$.^a ▷

^atodo ponto de $\sigma(T) \setminus \{0\}$ é ponto isolado

Demonstração.

(a) $0 \in \sigma(T)$

- $\boxed{\text{supor } 0 \notin \sigma(T)} = \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - T) : X \rightarrow X \text{ é bijetora} \}$
- T é bijetora
- $T^{-1} \in L(X)$ $(T \in L(X))$

Teorema da Aplicação Inversa B4.9. Sejam X e Y são espaços de Banach.
Se $T \in L(X, Y)$ é bijetora, então $T^{-1} \in L(Y, X)$

- $I = T \circ T^{-1} \in K(X)$ $(T \in K(X))$

Exercício H1.12. $T \circ S$ é compacto sempre que T, S são lineares e contínuos e um deles é compacto

- $\overline{B_X} = I(\overline{B_X})$ é totalmente limitado $(I \in K(X) + \text{def. op. comp. H1.2})$
- $\overline{B_X}$ subconj. fechado de X , logo completo $(X \text{ Banach})$
- $\overline{B_X}$ compacto
- $\dim X < \infty$ $(\boxed{\rightarrow \leftarrow})$ $(\dim X = \infty)$

Teorema de Riesz A5.7. Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ tal que $\bar{B}_1(0) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ é compacta. Então X tem dimensão finita.

.....

(b) $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$

$$\sigma_p(T) \setminus \{0\} \subset \sigma(T) \setminus \{0\}$$

- $\lambda \neq 0$
- $\lambda \in \sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : N(\lambda I - T) \neq \{0\}\}$
- $\lambda I - T$ não é injetora
- $\lambda \in \sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T) = \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - T) : X \rightarrow X \text{ é bijetora} \}$

$$\sigma(T) \setminus \{0\} \subset \sigma_p(T) \setminus \{0\}$$

- $\lambda \neq 0$
- $\lambda \in \sigma(T)$
- $\sup \lambda \notin \sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : N(\lambda I - T) \neq \{0\}\}$
- $\lambda I - T$ é injetora
- $\lambda I - T$ é sobrejetora

Alternativa de Fredholm H2.1. Se X é um espaço de Banach e $T \in K(X)$, então ^a (c) $N(I - T) = \{0\}$ se, e somente se, $R(I - T) = X$,

^aDe fato, o resultado vale para $\lambda I - T$, $\lambda \neq 0$

- $\lambda \in \rho(T)$
- $\lambda \notin \sigma(T) \Rightarrow \Leftarrow$

.....

(c) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ pode ser

1. $\emptyset$,
2. finito,
3. uma sequência que tende a 0.

- $\sigma(T) \setminus \{0\} = \emptyset$ (OK!) ou $\sigma(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$

- $\sigma(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ e é finito (OK!)

- $\sigma(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ e é infinito

- $A_n := \sigma(T) \cap \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq \frac{1}{n} \right\}$

- $\sigma(T) \setminus \{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

- A_n é fechado

($\sigma(T)$ é fechado: P. H3.3)

Proposição H3.3. $\rho(T)$ é aberto e $\sigma(T)$ é fechado, em $\mathbb{C}$.

Se $T \in L(X, X)$, então $\sigma(T)$ é compacto e $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}$.

- $A_n \subset \sigma(T)$

- A_n é compacto

($\sigma(T)$ é compacto)

Af. A_n é vazio ou finito

- $A_n = \emptyset$ (OK!) ou $A_n \neq \emptyset$

- $A_n \neq \emptyset$ e é finito (OK!)

- $A_n \neq \emptyset$ e é infinito (possui infinitos pontos distintos)

- existe subseq. em A_n ($\therefore$ em $\sigma(T) \setminus \{0\}$) convergindo para algum $\lambda \in A_n$ ($\therefore$ em $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq \frac{1}{n}\}$)

(A_n compacto)

- $\lambda \neq 0$ $\Rightarrow \Leftarrow$

Lema H3.9. Nas condições do teorema H3.8, se $\lambda_n \rightarrow \lambda$ sendo $\{\lambda_n\} \subseteq \sigma(T) \setminus \{0\}$ e distintos, então $\lambda = 0$.

- $\sigma(T) \setminus \{0\}$ é enumerável; $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n\}$

- pode-se reordenar de forma que $\lambda_n \rightarrow 0$

.....

(d) os autoespaços correspondentes a autovalores não nulos são finitodimensionais

Alternativa de Fredholm H2.1. Se X é um espaço de Banach e $T \in K(X)$, então ^a (a) $\dim(N(I - T)) < \infty$,

^aDe fato, o resultado vale para $\lambda I - T$, $\lambda \neq 0$

□

*Prova do **Lema H3.9**. X Banach, $T \in K(X)$. Se $\lambda_n \rightarrow \lambda$ sendo $\{\lambda_n\} \subseteq \sigma(T) \setminus \{0\}$ e distintos, então $\lambda = 0$.*

Justifique cada passagem!

- $\lambda_n \notin \rho(T)$
- $\lambda_n I - T$ não é bijetora
- $\lambda_n I - T$ não é sobrejetora e não é injetora
- para cada n , $\exists x_n \neq 0$;

$$(\lambda_n I - T)(x_n) = 0 \quad (1)$$

- $\{x_1, \dots, x_n\}$ é l.i.
- $X_n := [\{x_1, \dots, x_n\}]$
- $X_n \subsetneq X_{n+1}$
- $(\lambda_n I - T)(X_n) \subset X_{n-1}$
- $\exists \{y_n\} \subset X_n$;

$$\|y_n\| = 1, \quad d(y_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}, \quad \forall n \geq 2$$

- $\sup \lambda \neq 0$
- $\left\{ \frac{y_n}{\lambda_n} \right\}$ é limitada
- $\left\{ T \frac{y_n}{\lambda_n} \right\}$ possui subseq. convergente
-

(veja prova Alt.(c) Fredholm, pag.H17)

$$\left\| T \frac{y_n}{\lambda_n} - T \frac{y_m}{\lambda_m} \right\| \geq d(y_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}, \quad n > m \geq 2$$

- $\left\{ T \frac{y_n}{\lambda_n} \right\}$ não possui subseq. convergente

□

Exercícios

Exercício H3.10. Construa um exemplo de operador compacto não nulo com, respectivamente, 0, um numero finito e um numero infinito de autovalores.

Construa um exemplo de operador compacto com, respectivamente, $0 \in \sigma_p$, $0 \in \sigma_c$, $0 \in \sigma_r$.

(Use sequências).



H3.2 Operadores auto-adjuntos e seu espectro

Lembrete:

X, Y espaços de Banach e $T \in L(X, Y)$. **adjunto de T :** $T^* : Y^* \rightarrow X^*$

$$(T^*\phi)(x) = \phi(Tx), \quad \forall \phi \in Y^*, x \in X$$

Teorema C2.3. Se $T \in L(X, Y)$ então $T^* \in L(Y^*, X^*)$ e $\|T\| = \|T^*\|$.

Teorema de Representação de Riesz-Frechet G4.1. Se $f \in H^*$, existe um único $y \in H$ tal que

$$f(x) = (x, y) \quad \text{para todo } x \in H.$$

Além disso, $\|f\|_{H^*} = \|y\|_H$.

Definição H3.11. Sejam H um espaço de Hilbert, $T \in L(H)$ e seu adjunto $T^* \in L(H^*)$.

Seja $R : H \rightarrow H^*$ o *operador de Riesz*, definido como

$$Ry(x) = \langle Ry, x \rangle := (x, y), \quad x, y \in H.$$

O T. de Representação de Riesz-Frechet garante que R é uma *bijecção isométrica*. Ainda,

$$R(x + \lambda y) = Rx + \bar{\lambda} Ry$$

Então definimos o **adjunto (Hilbertiano)** de T :

$$T^* : H \rightarrow H : x \mapsto T^*(x) := R^{-1}T^*R(x)$$

Assim $T^* \in L(H)$ e vale

$$(T^*y, x) = (y, Tx) \quad \forall x, y \in H.$$

$$\begin{aligned} (T^*y, x) &= (R^{-1}T^*R(y), x) = \overline{(x, R^{-1}T^*R(y))} \stackrel{def.R}{=} \overline{R(R^{-1}T^*R(y))(x)} \\ &= \overline{T^*(R(y))(x)} \stackrel{def.T^*}{=} \overline{(R(y))(Tx)} \stackrel{def.R}{=} \overline{(Tx, y)} = (y, Tx) \end{aligned}$$



Definição H3.12. $T \in L(H)$ é **auto-adjunto** se $T^* = T$; isto é,

$$(Ty, x) = (y, Tx), \quad \forall x, y \in H.$$

★

Observação H3.13. Se $T \in L(H)$ é auto-adjunto, então $(Tx, x) \in \mathbb{R}$. ★

$$\overline{(x, Tx)} \stackrel{ppdd.p.e.}{=} (Tx, x) \stackrel{auto-adj}{=} (x, Tx)$$

Definição H3.14. Se $T \in L(H)$, definimos a **imagem numérica de T** por:

$$W(T) := \{(Tx, x) : x \in S_H\}^3$$

e

$$m_T = \inf W(T), \quad M_T = \sup W(T).$$

★

Observação. Se T é auto-adjunto,

- $W(T) \subset \mathbb{R}$
- $\lambda I - T$ é auto-adjunto, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\|T\| = \sup_{x \in S_H} |(Tx, x)|$, logo $\|T\| = \max\{|m_T|, |M_T|\}$. [Fri70, p.218] [Bre11, p.166]
(Exercício!)

★

³ $S_H = \{x \in H : \|x\| = 1\}$

Teorema H3.15.

(1) Seja $T \in L(H)$. Então, $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$.

(2) Se T é também *auto-adjunto*, então $W(T) \subseteq [m_T, M_T] \subseteq \mathbb{R}$.

Além disso,

(a) $m_T, M_T \in \sigma(T)$,

(b) autovetores correspondentes a autovalores distintos são ortogonais.

(c) $H = N(\lambda I - T) \oplus \overline{R(\lambda I - T)}$, logo $\sigma_r(T) = \emptyset$ [Fri70, p.218]

◁

Demonstração. (1)

- $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{W(T)}$

Basta mostrar que $\lambda \notin \sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$, i.e.,

$\lambda \in \rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - T) : H \rightarrow H \text{ é bijetora} \}$

- $d := d(\lambda, \overline{W(T)}) = \inf_{z \in \overline{W(T)}} |\lambda - z| > 0$

$$W(T) := \{(Tx, x) : x \in S_H\}$$

- $|\lambda - (Tx, x)| \geq d, \quad \forall x \in S_H$

- $x \in H$

$$\begin{aligned} |((\lambda I - T)x, x)| &= |(\lambda x - Tx, x)| = |(\lambda x, x) - (Tx, x)| = |\lambda \|x\|^2 - (Tx, x)| \\ &= \|x\|^2 \left| \lambda - \left(T \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right) \right| \geq \|x\|^2 d \end{aligned}$$

Af.1. $\lambda I - T$ é injetora

$$x \in N(\lambda I - T) \iff (\lambda I - T)(x) = 0$$

$$\|x\|^2 d \leq |((\lambda I - T)x, x)| = 0 \xLeftrightarrow{d>0} x = 0$$

- $x \in H$

$$\|x\|^2 d \leq |((\lambda I - T)x, x)| \stackrel{\text{Cauchy-Sch}}{\leq} \|(\lambda I - T)x\| \|x\|$$

$$\therefore \|(\lambda I - T)x\| \geq d \|x\|$$

Desigualdade Cauchy-Schwarz **G1.1.** $|(x, y)| \leq (x, x)^{\frac{1}{2}} (y, y)^{\frac{1}{2}}$

Af.2. $R(\lambda I - T)$ é fechada [Atento!]

$$\blacksquare y_n \in R(\lambda I - T); \quad y_n \rightarrow y$$

Queremos $y \in R(\lambda I - T)$

$$\blacksquare \{y_n\} \text{ é de Cauchy}$$

$$\blacksquare \exists x_n \in H; y_n = (\lambda I - T)(x_n)$$

■

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{d} \|(\lambda I - T)(x_n - x_m)\| = \frac{1}{d} \|y_n - y_m\| \rightarrow 0$$

$$\blacksquare \{x_n\} \text{ é de Cauchy, logo converge para } x \in H$$

(H completo)

■

$$(\lambda I - T)(x) = (\lambda I - T)\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) \stackrel{T \in L(H)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda I - T)x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$

$$\blacksquare y \in R(\lambda I - T)$$

Af.3. $R(\lambda I - T)^\perp = \{0\}$

$$y \in R(\lambda I - T)^\perp \implies ((\lambda I - T)x, y) = 0, \forall x \in H$$

$$\implies d\|y\|^2 \leq |((\lambda I - T)y, y)| = 0 \implies y = 0$$

- $R(\lambda I - T)$ é denso

$$\overline{R(\lambda I - T)} = R(\lambda I - T)^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = H$$

Exercício G3.13. Para qualquer $M \subset H$, vale $(M^\perp)^\perp = \overline{\text{span}(M)}$. Em particular, se M é um subespaço linear, então $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$.

- $\lambda I - T$ é sobrejetora

$$R(\lambda I - T) = \overline{R(\lambda I - T)} = H$$

Atento! De fato vale o seguinte resultado geral: Se H é um espaço de Hilbert (ou, mais geralmente, um espaço de Banach) e $T : H \rightarrow H$ é um operador linear contínuo tal que existe $c > 0$ com

$$c\|x\| \leq \|Tx\|, \quad \forall x \in H,$$

então T é injetor e $R(T)$ é um subespaço fechado de H . *Prove!*

.....

(2) Se T é também *auto-adjunto*, então $W(T) \subseteq [m_T, M_T] \subseteq \mathbb{R}$, onde

$$m_T = \inf W(T), \quad M_T = \sup W(T).$$

- (a) $m_T, M_T \in \sigma(T)$,
- (b) autovetores correspondentes a autovalores distintos são ortogonais,
- (c) $H = N(\lambda I - T) \oplus \overline{R(\lambda I - T)}$, logo $\sigma_r(T) = \emptyset$. [Fri70, p.218] **Exercício!**

- $W(T) \subseteq [m_T, M_T] \subseteq \mathbb{R}$ (T auto-adj + Obs. H3.13)

$$W(T) := \{(Tx, x) : x \in S_H\} \subset \mathbb{R}$$

(c) autovetores correspondentes a autovalores distintos são ortogonais

- $Tx = \lambda x$ e $Ty = \mu y$, com $\lambda \neq \mu$

- $(Tx, x) = (\lambda x, x) = \lambda \underbrace{\|x\|^2}_{\in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \in \mathbb{R}$

- $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ [!]

$$(\lambda - \mu)(x, y) = \lambda(x, y) - \mu(x, y) = (\lambda x, y) - (x, \mu y) = (Tx, y) - (x, Ty) \stackrel{D.H3.12}{=} 0$$

T auto-adj

!! Autovalores de operador auto-adjunto são reais.

(a) $m_T, M_T \in \sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T) = \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - T) : H \rightarrow H \text{ é bijetora} \}$

- $\sup M_T \in \rho(T)$
- $M_T I - T$ é bijetora
- $(M_T I - T)^{-1} \in L(H)$ ($T \in L(H)$)

Teorema da Aplicação Inversa B4.9. Sejam X e Y são espaços de Banach.
Se $T \in L(X, Y)$ é bijetora, então $T^{-1} \in L(Y, X)$

- $a(x, y) := (x, (M_T I - T)y)$, $x, y \in H$ é uma forma sesqui-linear contínua
- a é sesquisimétrica

$$a(x, y) = (x, (M_T I - T)y) \stackrel{aut-adj}{=} ((M_T I - T)x, y) = \overline{(y, (M_T I - T)x)} = \overline{a(y, x)}$$

- $a(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in H$

$$a(x, x) = (x, M_T x - Tx) = M_T(x, x) - (x, Tx) \geq M_T \|x\|^2 - M_T \|x\|^2 = 0$$

$$\star (Tx, x) \leq M_T = \sup W(T), \quad \forall x \in S_H \implies$$

$$\left(T \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right) \leq M_T \quad \forall x \in H \setminus \{0\} \implies$$

$$(x, Tx) \stackrel{\text{auto-adj}}{=} (Tx, x) \leq M_T \|x\|^2 \quad \forall x \in H$$

- $|a(x, y)| \leq |a(x, x)|^{1/2} |a(y, y)|^{1/2}, \quad \forall x, y \in H$

segue das propriedades de sesquilinearidade, sesquisimetria e $a(x, x) \geq 0$ veja prova da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, pag. G1

$$\begin{aligned} |(x, (M_T I - T)y)|^2 &\leq |(x, (M_T I - T)x)| |(y, (M_T I - T)y)| \\ &\stackrel{C-S}{\leq} \|x\| \|(M_T I - T)x\| |(y, (M_T I - T)y)| \\ &\stackrel{\in L(H)}{\leq} \|x\|^2 \|M_T I - T\| |(y, (M_T I - T)y)|, \quad \forall x, y \in H \end{aligned}$$

- para $x = (M_T I - T)y$

$$\|(M_T I - T)y\|^4 \leq \|(M_T I - T)y\|^2 \|M_T I - T\| |(y, (M_T I - T)y)|, \quad \forall y \in H$$

$$\begin{aligned} \therefore \|(M_T I - T)y\|^2 &\leq \|M_T I - T\| |(y, (M_T I - T)y)| \\ &= \|M_T I - T\| |M_T(y, y) - (y, Ty)|, \quad \forall y \in H \end{aligned}$$

- $\exists y_n \in S_H; (y_n, Ty_n) \rightarrow M_T$

$$M_T = \sup W(T) = \sup_{x \in S_H} (Tx, x)$$

- $\|(M_T I - T)y_n\|^2 \leq \|M_T I - T\| |M_T - (y_n, Ty_n)| \Rightarrow 0$

- $(M_T I - T)y_n \rightarrow 0$
- $y_n = (M_T I - T)^{-1}(M_T I - T)y_n \xrightarrow{\text{cont.}} 0 \quad \Rightarrow \quad \|y_n\| = 1$
- $M_T \in \sigma(T)$

$m_T \in \sigma(T)$: aplique o mesmo argumento anterior para $-T$ no lugar de T . $\square$

Aula 28

Corolário H3.16. *Seja $T \in L(H)$ auto-adjunto tal que $\sigma(T) = \{0\}$. Então $T = 0$.* $\triangleleft$

Demonstração.

- $m_T, M_T \in \sigma(T) = \{0\}$ T. H3.15-(2a)
- $(Tx, x) = 0 \quad \forall x \in H$

$$\star 0 = m_T = \inf W(T) \leq (Tx, x) \leq M_T = \sup W(T) = 0, \quad \forall x \in S_H$$

$$\left(T \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right) = 0 \quad \forall x \in H \setminus \{0\}$$

$$0 = (T(x+y), x+y) = (Tx, x) + (Tx, y) + (Ty, x) + (Ty, y)$$

$$\stackrel{T \text{ aut-adj}}{=} (Tx, y) + (y, Tx) = (Tx, y) + \overline{(Tx, y)}$$

$$= 2\Re(Tx, y), \quad \forall x, y \in H$$

- para $y = Tx$,

$$(Tx, Tx) = \Re(Tx, Tx) = 0, \quad \forall x \in H$$

- $Tx = 0, \quad \forall x \in H$ $\square$

Exercícios

Exercício H3.17. Faça o exerc. 6.24(1 e 2) do [Bre11, p. 178] ★

H4 Decomposição Espectral de Operadores Compactos e Auto-Adjuntos

Teorema H4.1. *Sejam H um espaço de Hilbert separável e $T \in L(H)$ um operador compacto e auto-adjunto. Então H admite uma base Hilbertiana formada por autovetores de T .*

Em particular, se $\{e_j\}$ é esta base e $\{\lambda_j\}$ os autovalores associados, $T(\sum a_i e_i) = \sum \lambda_i a_i e_i$. $\triangleleft$

Observação H4.2.

- O operador do ex 6.1 do [Bre11]:

$$T : \ell_2 \rightarrow \ell_2 : (x_i) \mapsto (\lambda_i x_i)$$

com $\lambda_i \rightarrow 0$ é o protótipo de todos os operadores compactos e autoadjuntos em espaços de Hilbert separáveis (de dimensão infinita).

- Em dimensão finita, o Teorema H4.1 é o análogo do resultado que toda matriz hermitiana é diagonalizável. (Verifique!)
- Truncando a série $\sum \lambda_i a_i e_i$, obtemos uma outra forma de aproximar T por $\{T_n\} \subseteq L_f(H)$. (Verifique!)



Teorema G5.8. Um espaço de Hilbert H é separável se e somente se tem uma base ortonormal (Hilbertiana) enumerável.

Neste caso, toda base ortonormal de H é enumerável e (se $\dim H = \infty$) H é isometricamente isomorfo a ℓ_2

Um conjunto em H é dito **base de Hilbert** (ou **base ortonormal**) se é um conjunto ortonormal que satisfaz as propriedades equivalentes do Teorema G5.4

Teorema G5.4. Se $S = \{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é um conjunto ortonormal em H , as seguintes afirmativas são equivalentes:

- (Completeza) Se $(x, e_\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in A$, então $x = 0$ (ie, $S^\perp = \{0\}$).
- $H \ni x = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha$, onde a soma converge ind. da ordem dos termos.
- $H = \overline{\text{span}(S)}$.

Demonstração. Temos duas possibilidades:

(1) $\sigma(T) = \{0\}$

- $T = 0$ (C. H4)

- qualquer $x \neq 0$ é autovetor associado ao autovalor 0

$$Tx = 0 = 0x$$

- qualquer base Hilbertiana é formada por autovetores de T

(2) $\sigma(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$

Teorema H3.8. Se X é um espaço de Banach e $T \in K(X)$, então

a) $0 \in \sigma(T)$, se $\dim X = \infty$,

b) $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$,

c) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ pode ser

1. $\emptyset$,
2. finito,
3. uma sequência que tende a 0.

d) os autoespaços correspondentes a autovalores não nulos são finitodimensionais

$N(\lambda I - T)$ = autoespaço de T

$N(\lambda I - T) \setminus \{0\}$ conj. dos autovetores de T associados a λ

Todos autovalores são reais

(T auto-adj + pag. H38)

- $\{\lambda_n\}_{n \in J}$ sequência estrit. decrescente dos autovalores de T
(J finito ou infinito)

- $\lambda_0 = 0$

- $E_0 = N(T)$, $E_n = N(\lambda_n I - T)$

- $0 < \dim E_n < \infty$ (T. H3.8(d))

- $0 \leq \dim E_0 \leq \infty$

- $\{E_n\}_{n \in J \cup \{0\}}$ são dois a dois ortogonais

Teorema H3.15. Se $T \in L(H)$ é *auto-adjunto*, então

(c) autovetores correspondentes a autovalores distintos são ortogonais.

- $E_0 = N(T)$ é separável e Hilbert

$E_0 \subset H$, H separável $\implies E_0$ separável

Prop. E2.3. Se X e.m. separável, então $\emptyset \neq F \subset X$ é sep..

E_0 é s.e.v. fechado, H Hilbert $\implies E_0$ Hilbert

Prop. E1.4. Se X é reflexivo, todo seu subespaço fechado é reflexivo.

- E_0 possui base B_0 Hilbertiana enumerável (T. G5.8)
- E_n possui base B_n Hilbertiana enumerável (dim. finita)
- tais bases são constituídas por autovetores de T

$$\text{Se } \left[\bigcup_{n \in J \cup \{0\}} E_n \right] = H ,$$

- $\bigcup_{n \in J \cup \{0\}} B_n$ é uma Hilbertiana de H composta por autovetores de T

Um conjunto em H é dito **base de Hilbert** (ou **base ortonormal**) se é um conjunto ortonormal que satisfaz as propriedades equivalentes do Teorema G5.4

Teorema G5.4. Se $S = \{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é um conjunto ortonormal em H , as seguintes afirmativas são equivalentes:

- a) (*Completeza*) Se $(x, e_\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in A$, então $x = 0$ (ie, $S^\perp = \{0\}$).
- f) $H = \overline{\text{span}(S)}$.

- $F := \left[\bigcup_{n \in J \cup \{0\}} E_n \right]$ (s.e.v.) (comb. lin.finitas de elem. de E_n)

Af. F é denso em H

Exercício B2.6. Um subespaço F de um e.v.n. H é denso se e só se vale que

$$\forall \phi \in H^* \text{ t.q. } \phi|_F = 0, \text{ vale } \phi \equiv 0$$

Teorema de Representação de Riesz-Frechet G4.1. Se H é Hilbert e $\phi \in H^*$, existe um único $y \in H$ tal que $\phi(x) = (x, y)$ para todo $x \in H$.

$$\phi \in H^*, \exists! y \in H; \phi(x) = (x, y), \forall x \in H \text{ e}$$

$$\phi|_F = 0 \iff (x, y) = 0, \forall x \in F \iff y \in F^\perp$$

Se $F^\perp = \{0\}$, então $y = 0$ e $\phi \equiv 0$

logo F é denso

Basta mostrar que $F^\perp = \{0\}$

$$\text{Se } F^\perp \subset F, \text{ então } F^\perp = \underbrace{F^\perp \cap F}_{\substack{F \\ \text{s.e.v}}} = \{0\}$$

Ainda mais se $F^\perp \subset N(T) = E_0 \subset F$

Note:

$$F^\perp \subset N(T) \iff Tx = 0, \forall x \in F^\perp \iff T|_{F^\perp} = 0$$

Se $\sigma(T|_{F^\perp}) = \{0\}$, onde $T|_{F^\perp} : F^\perp \rightarrow F^\perp$ é auto-adjunto (e compacto), então $T|_{F^\perp} = 0$

Corolário . Seja $T \in L(H)$ auto-adjunto tal que $\sigma(T) = \{0\}$.
Então $T = 0$

Basta mostrar:

1. $T(F^\perp) \subset F^\perp$
2. $\sigma(T|_{F^\perp}) = \{0\}$

Prova de 1. $T(F^\perp) \subset F^\perp$

- $y \in T(F^\perp) \implies y = Tx, \quad x \in F^\perp$

Queremos $y \in F^\perp$, i.e., $(y, z) = 0, \forall z \in F$

- $z \in F$:

$$(y, z) = (Tx, z) \stackrel{T \text{ auto-adj}}{=} (x, Tz) \stackrel{x \in F^\perp}{\underset{T(F) \subset F}{=}} 0$$

$$\left| \begin{array}{l} a = \sum_{j, \text{finita}} a_j e_j^n \in F \implies T(a) = \sum_{j, \text{finita}} a_j T(e_j^n) = \sum_{j, \text{finita}} (a_j \lambda_j^n) e_j^n \in F \end{array} \right.$$

Prova de 2. $\sigma(T|_{F^\perp}) = \{0\}$

- $\lambda \in \sigma(T|_{F^\perp})$

- $\sup \lambda \neq 0$

- $\sigma(T|_{F^\perp}) \setminus \{0\} = \sigma_p(T|_{F^\perp}) \setminus \{0\}$

($T|_{F^\perp}$ comp. + T. H3.8(b))

- λ é autovalor de $T|_{F^\perp}$, i.e.,

$$\exists x \in F^\perp, x \neq 0; \quad \lambda x = T|_{F^\perp}(x) = Tx$$

- λ é um autovalor de T

- $\lambda = \lambda_n$, para algum $n \in J$, i.e., $Tx = \lambda_n x$

- $x \in E_n = N(\lambda_n I - T)$, para algum $n \in J$

-

$$x \in E_n \cap F^\perp \subset F \cap F^\perp = \{0\}$$

- $x = 0$ $\Rightarrow \Leftarrow$

□

Exercícios

Exercício H4.3 (EH3). Considere o operador

$$T : L^2[0, \pi] \rightarrow L^2[0, \pi] : f \mapsto g(x) = \int_0^\pi h(x, y) f(y) dy$$

onde $h \in L^2([0, \pi]^2)$ (já vimos que é bem definido e compacto).

- Verifique que T é autoadjunto se $h(x, y) = \overline{h(y, x)}$.

Se $k(x, y) = \frac{1}{\pi} \min\{x(\pi - y), y(\pi - x)\}$ então $g = Tf$ satisfaz (qtp) o problema

$$\begin{cases} -g'' = f & \text{em } (0, \pi), \\ g(0) = g(\pi). \end{cases}$$

Sabendo isso, encontre uma base de Hilbert para $L^2[0, \pi]$ feita de autovetores de T .

Note que $Tf = \lambda f$ implica (se $\lambda \neq 0$)

$$\begin{cases} -f'' = -(Tf)''/\lambda = \frac{1}{\lambda} f & \text{em } (0, \pi), \\ f(0) = f(\pi). \end{cases} \quad \star$$

Referências

- [Bre11] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011, pp. xiv+599. ISBN: 978-0-387-70913-0.
- [Fol99] G. B. Folland. *Real analysis*. Second. Pure and Applied Mathematics (New York). Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, pp. xvi+386. ISBN: 0-471-31716-0.
- [Fri70] A. Friedman. *Foundations of modern analysis*. Holt, Rinehart e Winston, Inc., New York-Montreal, Que.-London, 1970, pp. vi+250.

Lista dos teoremas

H1.1	Teorema	H2
H1.2	Definição (Op. compacto)	H3
H1.3	Observação	H3
H1.4	Proposição	H3
H1.5	Corolário	H3
H1.6	Proposição	H3
H1.7	Exemplo (Op. compacto em ℓ_p)	H4
H1.8	Definição	H7
H1.9	Teorema (Arzelá-Ascoli)	H7
H1.10	Teorema (Adjunto de compacto)	H7
H1.11	Proposição (caracterização)	H10
H2.1	Teorema (Alternativa de Fredholm)	H12
H3.1	Definição (Resolvente e espectro)	H22
H3.2	Observação	H22
H3.3	Proposição (Propr. espectro)	H23
H3.4	Proposição	H25
H3.8	Teorema (Propr. espectro de comp.)	H26
H3.9	Lema	H26
H3.11	Definição (Adjunto (Hilbertiano))	H33
H3.12	Definição (Oper. autoadjunto)	H34
H3.13	Observação	H34
H3.14	Definição (Imagem numérica)	H34
	Observação	H34
H3.15	Teorema (Propr. esp. de autoadjunto)	H35
H3.16	Corolário	H40

H4.1	Teorema (Decomp. espectr. op. comp. a.a.)	H41
H4.2	Observação	H41

Lista dos exercícios

H1.12	Exercício	H11
H1.13	Exercício	H11
H1.14	Exercício	H11
H1.15	Exercício (Op. integral)	H11
H2.2	Exercício (EH1)	H21
H2.3	Exercício (EH2)	H21
H3.5	Exercício	H26
H3.6	Exercício	H26
H3.7	Exercício	H26
H3.10	Exercício	H32
H3.17	Exercício	H40
H4.3	Exercício (EH3)	H46

Lista de Teoremas para saber provar - P2

Teorema D5.2 – Banach-Alaoglu (Assumindo Tychonoff)

Proposição E1.3 – (reflexividade E^*)

Teorema E1.10 – Kakutani (assumindo Lema E1.11 e Goldstine)

Teorema F2.10 – Fischer-Riesz

Teorema F3.9 – de Representação de Riesz (caso $1 < p < \infty$)

Prova da desigualdade de Cauchy-Schwarz da identidade do paralelogramo e do

Teorema de Pitágoras

Lema G3.1 – Proposição G3.4 – Projeção sobre convexos

Teorema G4.5 – O Teorema de Lax-Milgram

Teorema G5.4 – Base de Hilbert

Proposição H1.4 – Corolário H1.5 – Proposição H1.6 – op. compactos

Proposição H3.3 – propriedades básicas espectro

Teorema H3.8 – espectro do op. compacto

Teorema H3.15 – espectro do op. compacto autoadjunto

Teorema H4.1 – base de autovetores