Conteúdo

Pr.1 Definição de Primitiva (antiderivada)

Sejam f e F funções reais definidas pelo menos em um intervalo I. Se

$$F' = f \quad \text{em } I,$$

dizemos que **F é primitiva de f em I**.

Vale:

- se F é primitiva de f em I então $F + k$ também é, $\forall\, k \in \mathbb{R}$;
- se F, G são primitivas de f em I então $F - G = \mathit{constante}$;
- se F é primitiva de f e G é primitiva de g em I então $aF + bG$ é primitiva de $af + bg$ em I;
- se f é contínua em I então existe uma primitiva de f em I.

Exemplo 1. Exercício 60 em Slides de Exercícios.

Definição: Indicaremos com os símbolos

$$\int f \qquad \text{ou} \qquad \int f(x)dx$$

a **integral indefinida de f** que é dada pela família (conjunto) de todas as primitivas de f (num certo intervalo fixado), isto é,

$$\int f = F + k, \quad k \in \mathbb{R}, \quad \text{onde } F' = f.$$

Pr.2 Algumas primitivas

- **Simples:** $(k \in \mathbb{R})$

$$\int c\,dx = cx + k, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k, \quad x \in \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + k, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + k, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int Sh(x)\,dx = Ch(x) + k, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int Ch(x)\,dx = Sh(x) + k, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + k, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = SetSh(x) + k, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + k, \quad x \in (-1,1)$$

- **outras (cuidado: definir um apropriado intervalo!):**

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k, \quad \text{se } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \begin{cases} \ln(x) + k, & x \in (0,\infty) \\ \ln(-x) + k, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

$$\int \sec^2(x)\,dx = \tan(x) + k$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \begin{cases} SetCh(x) + k, & x \in (1,\infty) \\ -SetCh(-x) + k, & x \in (-\infty, -1) \end{cases}$$

Pr.3 Técnicas para calcular primitivas

Pr.3.1 Linearidade

Sejam $f, g, F, G : I \to \mathbb{R}$ tais que $F' = f$ e $G' = g$ em I e $a, b \in \mathbb{R}$. Então

$$(\mathbf{aF} + \mathbf{bG})' = \mathbf{af} + \mathbf{bg} \quad \text{em } I.$$

Logo,

$$\int (\mathbf{af} + \mathbf{bg}) = \mathbf{a}\left(\int \mathbf{f}\right) + \mathbf{b}\left(\int \mathbf{g}\right) \quad \text{em } I.$$

Exemplo 2. Exercício 61 em Slides de Exercícios.

Pr.3.2 Fórmula de integração por substituição

Sejam g contínua e derivável com derivada contínua, h contínua. Então

$$\int \mathbf{h(g(x))g'(x)\,dx = H(g(x)) + k,\ \ k} \in \mathbb{R}$$

onde $\mathbf{H'(y) = h(y)}$.

Interpretação como mudança de variável:

$$\begin{aligned} \int \mathbf{h(g(x))g'(x)\,dx} &= \mathbf{H(y)+k}\Big|_{\mathbf{y=g(x)}},\ \ \mathbf{k} \in \mathbb{R} \\ &= \int \mathbf{h(y)\,dy}\Big|_{\mathbf{y=g(x)}} \end{aligned}$$

podemos interpretar assim:
– *substituímos* $g(x) = y$ *e* $g'(x)dx = dy$*,*
– *calculamos a primitiva,*
– *pomos de volta* $y = g(x)$.

mais em geral: se a mudança é $f(x) = g(y)$, então $f'(x)\,dx = g'(y)\,dy$

Pr.4 Dicas de integração

- **quadrado de trigonométrica ou hiperbólica:**
  use relações trigonométricas com $\cos(2x)$ e $Ch(2x)$:
  Exemplo:
  $$2\int Ch^2(x)\,dx = \int (Ch(2x)+1)\,dx =$$
  $$= \frac{1}{2}Sh(2x) + x + k = Sh(x)Ch(x) + x + k,\ k \in \mathbb{R}$$
- **substituição trigonométrica ou hiperbólica:** quando aparece um dos termos $\sqrt{\pm a^2 \pm x^2}$, se não tiver substituição melhor:
  - no caso $\sqrt{a^2 - x^2}$, substitua $x = a\sin(t),\ t \in (-\pi/2, \pi/2)$;
  - no caso $\sqrt{a^2 + x^2}$, substitua $x = a\,Sh(t),\ t \in \mathbb{R}$;
  - no caso $\sqrt{x^2 - a^2}$, substitua $x = \pm a\,Ch(t),\ t > 0$.

  isso leva a eliminar a raiz usando relações trigonométricas-hiperbólicas.
  Exemplo:
  $$\int \sqrt{4+x^2}\,dx \overset{(x=2Sh(t),\ dx=2Ch(t)\,dt)}{=} \int \sqrt{4(1+Sh^2(t)}2\,Ch(t)\,dt =$$
  $$= \int \sqrt{4Ch^2(t)}2\,Ch(t)\,dt = \int 4Ch^2(t)\,dt = ...$$
- **Caso** $\int x^n \left(\sqrt{\pm a^2 \pm x^2}\right)^{\pm 1}$
  - Se n é par use a substituição trigonométrica ou hiperbólica acima.
  - Se n é ímpar, também as substituições $y = \pm a^2 \pm x^2$ ou $z = \sqrt{\pm a^2 \pm x^2}$ podem funcionar.

  Exemplo:
  $$\int x^3\sqrt{9+x^2}\,dx \overset{(y=9+x^2,\ dy=2x\,dx)}{=} \int (y-9)\sqrt{y}\,dy/2 =$$
  $$= \int (y^{3/2} - 9\sqrt{y})dy/2 = \dots$$
  $$\int x^3\sqrt{9+x^2}\,dx \overset{(z=\sqrt{9+x^2},\ 2z\,dz=2x\,dx)}{=} \int (z^2-9)z\,zdz = \int (z^4 - 9z^2)dz = \dots$$