1 Integral de linha de campo vetorial

1.1 Campo Vetorial

$F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um **campo vetorial (c.v.)** com domínio A

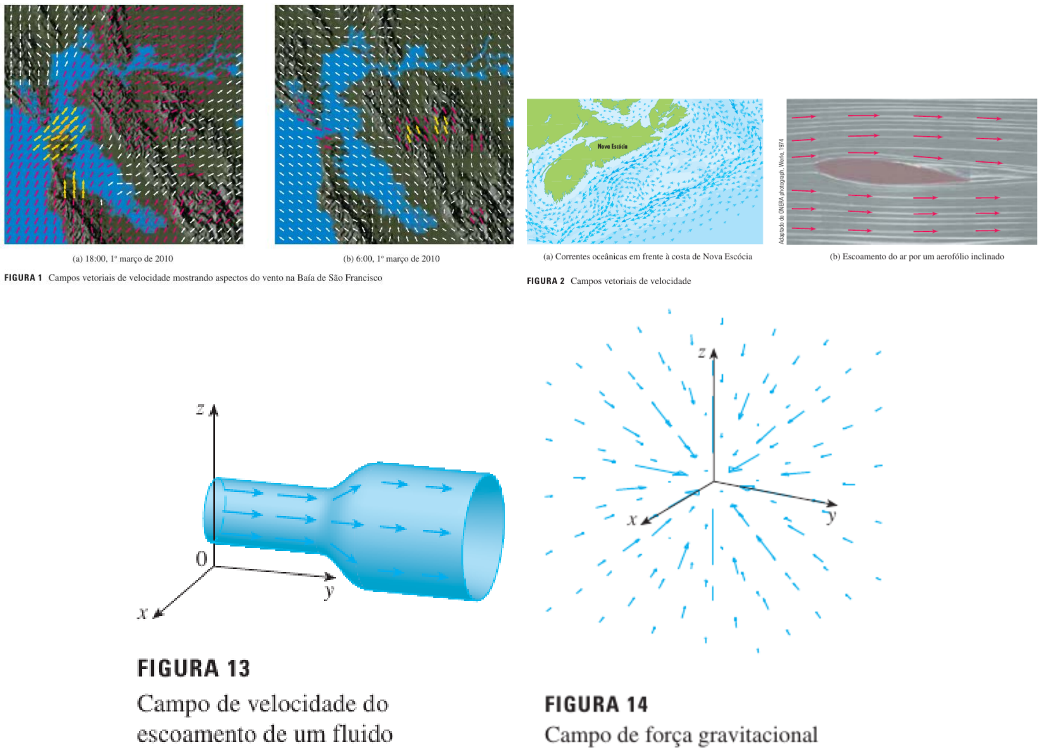

Figura 1: Stewart, Cálculo, vol. 2: Campos de velocidade: aspecto do vento, correntes oceânicas, escoamento do ar e do fluido, campo de força gravitacional

Exemplos:

1. $F(x,y) = (-y,x) = -y\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j}$ é um c.v. em $\mathbb{R}^2$
2. $F(x,y,z) = (0,0,z) = z\,\overrightarrow{k}$ é um c.v. em $\mathbb{R}^3$

1.2 Integral de linha de c.v.

Sejam

- $F : A \to \mathbb{R}^n$ um **campo vetorial (c.v.)** de domínio $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- $\gamma : [a, b] \to A$ uma **curva regular e com derivada contínua**,

Queremos definir a **integral do c.v. F ao longo de γ**

******** **Motivação (caso $n = 2$ ou $n = 3$):**
Se F representa um campo de forças e γ o caminho que uma partícula percorre, qual o trabalho τ realizado por F para mover a partícula de $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$?

- Se F é constante e γ um segmento retilíneo: $\tau = F \cdot \underbrace{(\gamma(b) - \gamma(a))}_{deslocamento}$

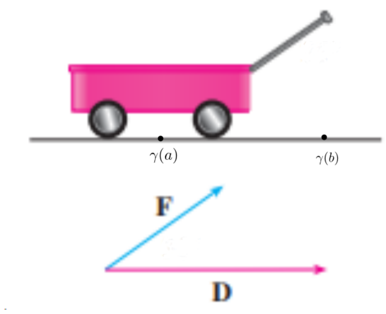

Figura 2: Stewart, Cálculo, vol.2

- Caso geral: F não constante, γ não retilíneo

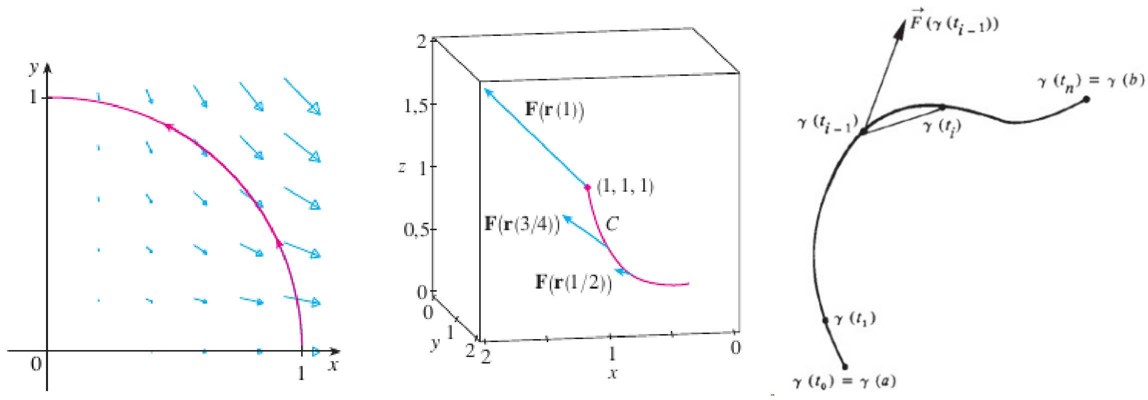

Figura 3: Stewart, Cálculo, vol. 2 e Guidorizzi, vol. 3

- $P = \{t_0, ..., t_n : \ a = t_0 < t_1 < t_2 < .. < t_{n-1} < t_n = b\}$ partição de $[a, b]$:
- $\{P_i := \gamma(t_i) : i = 0, \ldots, n\}$ partição do traço C de γ
- $\Delta_i s \approx |\overline{P_{i-1}P_i}|$
-

$$\begin{aligned}
\tau &\approx \sum_{i=1}^{n} F(\gamma(t_{i-1})) \cdot (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) \\
&\underset{t_i^* \in (t_{i-1}, t_i)}{\overset{TVM}{=}} \sum_{i=1}^{n} F(\gamma(t_{i-1})) \cdot \gamma'(t_i^*)\Delta_i t \\
&\overset{t_i^* \approx t_{i-1}}{\approx} \sum_{i=1}^{n} F(\gamma(t_{i-1})) \cdot \gamma'(t_{i-1})\Delta_i t
\end{aligned}$$

-

$$\tau = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$$

****

Definição: **A integral de linha do c.v. F sobre γ** é dada por

$$\int_\gamma F \cdot d\gamma := \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

OBS: não depende da parametrização da curva **exceto pela orientação**, que muda o sinal da integral!!!

Se γ_1 e γ_2 são curvas com mesmo traço como em (R–C) (Slide 7) tais que:

- possuem a mesma orientação, então $\displaystyle\int_{\gamma_1} F \cdot d\gamma_1 = \int_{\gamma_2} F \cdot d\gamma_2$
- possuem orientação contrária, então $\displaystyle\int_{\gamma_1} F \cdot d\gamma_1 = -\int_{\gamma_2} F \cdot d\gamma_2$

Outras notações:

$$\int_\gamma F \cdot d\gamma = \int_\gamma F \cdot d\mathbf{s} = \int_\gamma F \cdot dr \quad (\text{onde } r(t) = \gamma(t))$$

Outras fórmulas:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\
&= \int_a^b \Big[F(\gamma(t)) \cdot \widehat{\mathbf{t}}(t) \Big] \, \|\gamma'(t)\| \, dt \\
&= \int_\gamma \Big[F \cdot \widehat{\mathbf{t}} \Big] \, ds \\
&\overset{F=(F_1,\dots,F_n)}{\underset{\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)}{=}} \int_a^b [\, F_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \dots + F_n(\gamma(t))\gamma_n'(t) \,] \, dt \\
&\overset{x_i=\gamma_i(t)}{=} \int_\gamma F_1(x_1, .., x_n) dx_1 + \dots + F_n(x_1, .., x_n) dx_n
\end{aligned}$$

$n=2$: $F=(P,Q)$

$$\int_\gamma F\cdot d\gamma = \int_\gamma \left[F\cdot\widehat{\mathbf{t}}\right]\,ds = \int_\gamma P dx + Q dy$$

$n=3$: $F=(P,Q,R)$

$$\int_\gamma F\cdot d\gamma = \int_\gamma \left[F\cdot\widehat{\mathbf{t}}\right]\,ds = \int_\gamma P dx + Q dy + R dz$$

Interpretação física:

- Se F é um campo de forças, então

$$\int_\gamma F\cdot d\mathbf{s}$$

(*integral de linha com relação ao comprimento de arco da componente tangencial da força*)

é o trabalho feito pelo campo F sobre uma partícula que percorre o traço de γ .

Uma curva $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ se diz de *classe* C^1 *por partes* se for contínua e se existirem uma partição $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ e curvas $\gamma_i : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots, n$ de classe C^1, tais que, para todo t em $]t_{i-1}, t_i[$, $\gamma(t) = \gamma_i(t)$:

γ é de classe C^1 por partes

Seja $\vec{F}$ um campo vetorial contínuo no aberto Ω de $\mathbb{R}^n$ e seja $\gamma\colon [a, b] \to \Omega$ uma curva de classe C^1 por partes; definimos

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\gamma = \int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\gamma_1 + \int_{\gamma_2} \vec{F}\cdot d\gamma_2 + \cdots + \int_{\gamma_n} \vec{F}\cdot d\gamma_n.$$

Figura 4: Guidorizzi, Um curso de cálculo, vol. 3

Exemplos: Calcule $\int_\gamma F\cdot d\gamma$ onde

1. $F(x,y)=(y^2,x)$,
   (a) o segmento de reta de $(-5,-3)$ a $(0,2)$. (Resp.: $-\frac{5}{6}$)
   (b) o arco de parábola $x=4-y^2$ de $(-5,-3)$ a $(0,2)$. (Resp.: $\frac{245}{6}$)
2. $F(x,y)=(y,x)$ e γ dos itens (a) e (b) anteriores. (Resp.: -15)

1.3 Fluxo de um campo vetorial através de uma curva

Para o **caso** $n = 2$, sejam ainda

- $F : A \to \mathbb{R}^2$ um **campo vetorial** de domínio $A \subseteq \mathbb{R}^2$
- $\gamma : [a, b] \to A$ uma **curva regular e com derivada contínua**,

Definição: O **fluxo do campo vetorial F através da curva γ**

$$\int_\gamma [\, F \cdot \widehat{\mathbf{n}} \,]\; ds := \int_a^b [\, F(\gamma(t)) \cdot \widehat{\mathbf{n}}(t) \,]\, \|\gamma'(t)\|\; dt$$

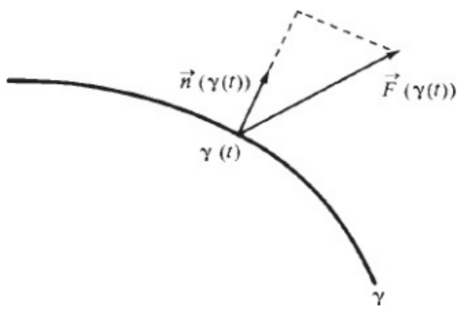

Figura 5: Guidorizzi, Um curso de cálculo, vol. 3

OBS: não depende da parametrização da curva (pelo menos se a reparametrização é bijetora) mas **depende da escolha do sentido do vetor normal unitário $\widehat{\mathbf{n}}$**:

Lembrete: em $\mathbb{R}^2$ vale $\widehat{\mathbf{n}} \perp \widehat{\mathbf{t}} \iff \widehat{\mathbf{n}} \cdot \widehat{\mathbf{t}} = 0$.
Se $\widehat{\mathbf{t}} = (a, b)$ é versor tangente, então $\widehat{\mathbf{n}}_1 = (b, -a)$ e $\widehat{\mathbf{n}}_2 = -(b, -a)$ são versores normais.

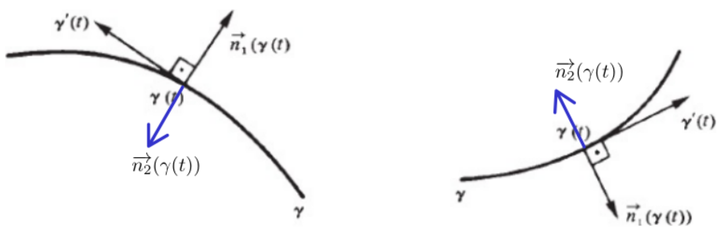

Figura 6: Guidorizzi, Um curso de cálculo, vol. 3

Outras fórmulas:

Se $F = (P, Q)$ e $\gamma(t) = (\overbrace{\gamma_1(t)}^{x}, \overbrace{\gamma_2(t)}^{y})$, então

$$\widehat{\mathbf{t}}(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)), \qquad \widehat{\mathbf{n}}(t) = \pm\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))$$

e

$$\begin{aligned}\int_\gamma [\, F \cdot \widehat{\mathbf{n}}\,]\; ds &= \int_a^b [\, F(\gamma(t)) \cdot \widehat{\mathbf{n}}(t)\,]\, \|\gamma'(t)\|\; dt \\ &= (\pm)\int_a^b [\, P(\gamma(t))\gamma_2'(t) - Q(\gamma(t))\gamma_1'(t)\,]\; dt \\ &= (\pm)\int_\gamma P(x,y)dy - Q(x,y)dx\end{aligned}$$

Interpretação física:

- Se F é a velocidade de um escoamento plano

$$\int_\gamma [\, F \cdot \widehat{\mathbf{n}}\,]\; ds$$

(*integral de linha com relação ao comprimento de arco da componente normal da força*)

é o fluxo de fluido através do traço de γ ("área" de fluido por unidade de tempo).

Quando a curva γ é fechada costuma-se usar o símbolo $\oint_\gamma$, e se orientada no sentido anti-horário: $\circlearrowleft\!\!\!\!\!\!\int_\gamma$

Sugestão de Exercícios:

- Lista 4 do prof. Eugenio Massa: 2, 3, 9 a 20.
- Listas no e-disciplinas: Integral de Linha de um Campo Vetorial Parte I