

Conteúdo

G1	Espaços com produto interno	Aula 24	G2
	G1.1 Propriedades elementares		G2
G2	Espaços de Hilbert		G5
G3	Projeção sobre convexos		G7
G4	O dual de um espaço de Hilbert	Aula 25	G15
G5	Bases ortonormais (de Hilbert)		G21

G1 Espaços com produto interno

Aula 24

Seja H um e.v. sobre $\mathbb{K}$. Um **produto escalar** (ou produto interno) em H é uma função $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ tal que

- (a) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ para todo $x, y \in H$.
- (b) $(ax + bx', y) = a(x, y) + b(x', y)$ para todo $x, x', y \in H, a, b \in \mathbb{K}$.
- (c) $(x, x) \geq 0$, e $(x, x) = 0$ se e somente se $x = 0$.

G1.1 Propriedades elementares

- $(x, ay + by') = \bar{a}(x, y) + \bar{b}(x, y')$ para todo $x, y, y' \in H, a, b \in \mathbb{K}$.

Segue de (a)+(b).

- produto interno real é linear
- produto interno complexo é sesquilinear

- desigualdade de **Cauchy-Schwarz**

$$|(x, y)| \leq (x, x)^{\frac{1}{2}} (y, y)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{G1.1})$$

(a igualdade vale se e só se x e y são linearmente dependentes)

$$(c): (x - ty, x - ty) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{K}, x, y \in H$$

$$(x, x) - \bar{t}(x, y) - t(y, x) + |t|^2 (y, y) \geq 0 \quad \xrightarrow{t = \frac{(x, y)}{(y, y)}, y \neq 0, \text{ok}}$$

$$(x, x) - \frac{\overline{(x, y)}}{(y, y)} (x, y) - \frac{(x, y)}{(y, y)} (y, x) + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)^2} (y, y) \geq 0 \quad \xleftrightarrow{\text{simplificando}}$$

$$(x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \geq 0 \quad (*)$$

a igualdade em (*) vale se e só se $(x - ty, x - ty) = 0$

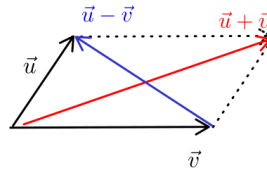
- A função $\|\cdot\| : H \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$ é uma **norma**.

Um espaço com produto interno $(H, (\cdot, \cdot))$ é um e.v.n. .

$$\begin{aligned}
 \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + 2\Re(x, y) + (y, y) \\
 &\stackrel{\Re z \leq |\Re(z)| \leq |z|}{\leq} (x, x) + 2|(x, y)| + (y, y) \\
 &\stackrel{C-S}{\leq} (x, x) + 2\left((x, x)^{\frac{1}{2}}(y, y)^{\frac{1}{2}}\right) + (y, y) \\
 &= (\|x\| + \|y\|)^2
 \end{aligned}$$

- *identidade do paralelogramo*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \forall x, y \in H. \quad (\text{G1.2})$$



Propriedade geométrica diz: a soma dos quadrados dos comprimentos dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados dos comprimentos das suas duas diagonais.

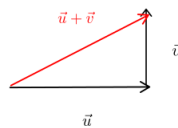
A identidade do paralelogramo caracteriza as normas que são induzidas por produto interno (ver também a Proposição G1.1).

- *Teorema de Pitágoras*: se $(x, y) = 0$ (escrevemos $x \perp y$: x, y são **ortogonais**) então

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \quad (\text{G1.3})$$

Mais geralmente, se $x_1, \dots, x_n$ são vetores dois a dois ortogonais então

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$



- *Fórmula de polarização*

$$(x, y) = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4} \left[+i \frac{\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2}{4} \right]. \quad (\text{G1.4})$$

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\Re(x, y)$$

$$\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2 = 4\Re i(x, y) = 4\Im(x, y)$$

Proposição G1.1. *Seja $(E, \|\cdot\|)$ um e.v.n. real [\[complexo\]](#) cuja norma verifica a lei do paralelogramo. Então a fórmula de polarização define um produto interno em E que induz a norma original.* $\triangleleft$

Demonstração.

Af. 1. $\langle x, y \rangle := \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} \left[+i \frac{\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2}{4} \right]$ induz a norma original, i.e.,

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$$

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= \frac{\|x + x\|^2 - \|x - x\|^2}{4} \left[+i \frac{\|x + ix\|^2 - \|x - ix\|^2}{4} \right] \\ &= \|x\|^2 \left[+i \underbrace{\frac{|1 + i| \|x\|^2 - |1 - i| \|x\|^2}{4}}_0 \right] = \|x\|^2 \end{aligned}$$

Af. 2. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em E [\[Fri70, p. 203\]](#)

□

G2 Espaços de Hilbert

Definição G2.1. Um **espaço de Hilbert** é um espaço com produto interno que é completo com a norma induzida pelo produto interno. ★

Exemplos:

- $\mathbb{K}^N$ com o produto interno

$$(x, y) = \sum_1^N x_i \bar{y}_i$$

é um espaço de Hilbert.

- ℓ_2 com o produto interno

$$(x, y) = \sum_1^{\infty} x_i \bar{y}_i$$

é um espaço de Hilbert.

- $L^2(\Omega)$ com o produto interno

$$(f, g) = \int_{\Omega} f \bar{g}$$

é um espaço de Hilbert.

Não são espaços de Hilbert:

- c_{00} : pode ser munido do mesmo produto escalar de ℓ_2 , mas não é completo com a norma induzida; (Ex. A3.17)
- $(\mathcal{C}([0, 1]), \| \cdot \|_2)$: pode ser munido do mesmo produto escalar de L^2 , mas não é completo;
- L^p se $p \neq 2$: a norma de L^p não pode ser induzida por um produto escalar;
- $(\mathcal{C}([0, 1]), \| \cdot \|_{\infty})$: a norma $\| \cdot \|_{\infty}$ não pode ser induzida por um produto escalar.

Exercícios

Exercício G2.2. $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_2)$ não é completo. ★

Exercício G2.3. Faça o exercício 5.2 (p. 147) do [Bre11] : L^p não é Hilbert para $p \neq 2$. ★

Exercício G2.4. Verifique que a norma do sup no espaço das funções contínuas $C([a, b], \mathbb{K})$ não provém de um produto interno. ★

Proposição G2.5. *Todo espaço de Hilbert é uniformemente convexo e portanto reflexivo.* ◁

Demonstração.

H é u.c. se
 $\forall 0 < \varepsilon \leq 2, \exists \delta > 0; \|x\|, \|y\| \leq 1, \text{ e } \|x - y\| \geq \varepsilon \implies \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$

identidade do paralelogramo (G1.2):

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \forall x, y \in H.$$

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 \stackrel{=}{=} \frac{1}{4} (2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x - y\|^2) \leq \frac{1}{4} (4 - \varepsilon^2) = 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \leq (1 - \delta)^2$$

Teorema Milman-Pettis E3.3. Todo espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.

◻

G3 Projeção sobre convexos

Lema G3.1. ¹ Se $C \neq \emptyset$ é um subconjunto fechado e convexo de um espaço de Hilbert H e $x_0 \in H$, existe um único $y_0 \in C$ tal que

$$\|x_0 - y_0\| = \inf_{y \in C} \|x_0 - y\| =: d(x_0, C). \quad \triangleleft$$

Definição G3.2. Escrevemos $y_0 = P_C x_0$ e dizemos que P_C é a **projeção sobre C** (y_0 é a projeção de x_0 sobre C). ★

Observação G3.3. Se $x_0 \in C$, $P_C x_0 = x_0$ ★

Demonstração do Lema G3.1.

Existência:

- $\exists \{y_n\} \subset C$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_0 - y_n\| = d(x_0, C) =: d$

Af. 1. $\{y_n\}$ é de Cauchy

- $\exists y_0 \in H$; $y_n \rightarrow y_0$ (H Hilbert é completo)
- $y_0 \in C$ (C é fechado)

$$\|x_0 - y_0\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_0 - y_n\| = d(x_0, C)$$

Prova Af. 1.:

Queremos $\|y_n - y_m\| \rightarrow 0$, quando $m, n \rightarrow \infty$

identidade do paralelogramo (G1.2):

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \forall x, y \in H.$$

Sabemos $\|x_0 - y_m\| \rightarrow d$

$$x = x_0 - y_n \text{ e } y = x_0 - y_m$$

•

$$\|2x_0 - y_n - y_m\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2(\|x_0 - y_n\|^2 + \|x_0 - y_m\|^2)$$

¹A conclusão continua válida se H é apenas um espaço de Banach u.c. (veja Ex. 3.32 de [Bre11] e prova alternativa da existência usando teoria de espaços reflexivo e u.c. em [Bre11, p. 132]).

Uma vez mostrada a existência de $y_0 \in C$, o ínfimo é de fato o mínimo.

$$\begin{aligned}
 0 \leq \|y_n - y_m\|^2 &= 2 \left(\|x_0 - y_n\|^2 + \|x_0 - y_m\|^2 \right) - 4 \left\| x_0 - \underbrace{\frac{y_n + y_m}{2}}_{\in C} \right\|^2 \\
 &\stackrel{\substack{\text{C conv.} \\ \leq \\ \text{def.inf}}}{\leq} 2 \left(\boxed{\|x_0 - y_n\|^2} + \boxed{\|x_0 - y_m\|^2} \right) - 4d^2 \\
 &\stackrel{m,n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 2 \left(\boxed{d^2} + \boxed{d^2} \right) - 4d^2 = 0
 \end{aligned}$$

Unicidade:

- Supor $\exists y_1 \in C$, $\boxed{y_1 \neq y_0}$; $\|x_0 - y_1\| = \inf_{y \in C} \|x_0 - y\| = d(x_0, C) = d$

identidade do paralelogramo (G1.2):

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \forall x, y \in H.$$

Sabemos $\|x_0 - y_0\| = \|x_0 - y_1\| = d$

$$x = x_0 - y_0 \text{ e } y = x_0 - y_1$$

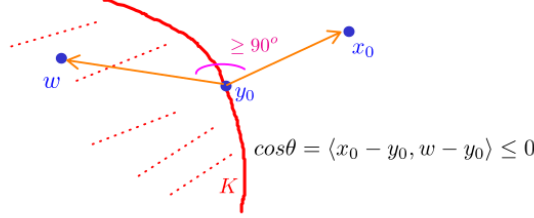
$$\begin{aligned}
 0 \leq \|y_0 - y_1\|^2 &= 2 \left(\|x_0 - y_0\|^2 + \|x_0 - y_1\|^2 \right) - 4 \left\| x_0 - \underbrace{\frac{y_0 + y_1}{2}}_{\in C} \right\|^2 \\
 &\stackrel{\substack{\text{C conv.} \\ \leq \\ \text{def.inf}}}{\leq} 2 \left(\boxed{\|x_0 - y_0\|^2} + \boxed{\|x_0 - y_1\|^2} \right) - 4d^2 \\
 &= 2 \left(\boxed{d^2} + \boxed{d^2} \right) - 4d^2 = 0
 \end{aligned}$$

- $\|y_0 - y_1\| = 0$ $\boxed{\Rightarrow \Leftarrow}$

□

Proposição G3.4. Nas condições do Lema G3.1, $P_C x_0$ é caracterizado por

$$P_C x_0 \in C \quad e \quad \Re(x_0 - P_C x_0, w - P_C x_0) \leq 0, \quad \forall w \in C. \quad \triangleleft$$



Demonstração. Queremos mostrar que para $P_C x_0 = y_0 \in C$

$$\|x_0 - y_0\| = \inf_{y \in C} \|x_0 - y\| \iff \Re(x_0 - y_0, w - y_0) \leq 0, \quad \forall w \in C$$

($\implies$)

$$\bullet (1 - t)y_0 + tw \in C, \quad \forall w \in C, \forall t \in [0, 1] \quad (C \text{ é convexo})$$

•

$$\|x_0 - y_0\| = \inf_{y \in C} \|x_0 - y\| \leq \|x_0 - ((1 - t)y_0 + tw)\| = \|x_0 - y_0 + t(y_0 - w)\|$$

•

$$\begin{aligned} \|x_0 - y_0\|^2 &\leq \left(\overline{x_0 - y_0} + \overline{t(y_0 - w)}, \overline{x_0 - y_0} + \overline{t(y_0 - w)} \right) \\ &= \|x_0 - y_0\|^2 + 2t \Re(x_0 - y_0, y_0 - w) + t^2 \|y_0 - w\|^2 \\ &= \|x_0 - y_0\|^2 - 2t \Re(x_0 - y_0, w - y_0) + t^2 \|y_0 - w\|^2 \end{aligned}$$

•

$$2 \Re(x_0 - y_0, w - y_0) \leq t \|y_0 - w\|^2 \quad \forall w \in C, \forall t \in (0, 1]$$

$$\bullet \Re(x_0 - y_0, w - y_0) \leq 0, \quad \forall w \in C \quad (t \rightarrow 0^+)$$

($\Leftarrow$)

•

$$\begin{aligned}
 \|x_0 - y\|^2 &= \|x_0 - y_0 - (y - y_0)\|^2 = \left(\underbrace{x_0 - y_0}_{\text{orange}} - \underbrace{(y - y_0)}_{\text{grey}}, \underbrace{x_0 - y_0}_{\text{orange}} - \underbrace{(y - y_0)}_{\text{grey}} \right) \\
 &= \|x_0 - y_0\|^2 - 2 \underbrace{\Re(x_0 - y_0, y - y_0)}_{\leq 0} + \underbrace{\|y - y_0\|^2}_{\geq 0} \\
 &\geq \|x_0 - y_0\|^2, \quad \forall y \in C
 \end{aligned}$$

• $\|x_0 - y_0\| \leq \|x_0 - y\|, \quad \forall y \in C$

• $\|x_0 - y_0\| = \inf_{y \in C} \|x_0 - y\|$

□

Proposição G3.5. Nas condições do Lema G3.1,

$$\|P_C x_1 - P_C x_2\| \leq \|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in H,$$

logo P_C é contínua.

◁

Demonstração.

Proposição G3.4. $y = P_C x \in C$ e $\Re(x - y, w - y) \leq 0, \forall w \in C$

$w = P_C x_2$ e $w = P_C x_1$

• $\Re(x_1 - P_C x_1, P_C x_2 - P_C x_1) \leq 0 \Rightarrow \Re(P_C x_1 - x_1, P_C x_1 - P_C x_2) \leq 0$

• $\Re(x_2 - P_C x_2, P_C x_1 - P_C x_2) \leq 0$

• $(\Re(z) + \Re(w) = \Re(z + w) \text{ e linearidd p.i.})$

$$\Re(\underbrace{P_C x_1}_{\text{grey}}, \underbrace{-x_1 + x_2}_{\text{orange}}, \underbrace{-P_C x_2}_{\text{grey}}, P_C x_1 - P_C x_2) \leq 0$$

$$\Re(\underbrace{-x_1 + x_2}_{\text{orange}}, P_C x_1 - P_C x_2) + \Re(\underbrace{P_C x_1 - P_C x_2}_{\text{grey}}, P_C x_1 - P_C x_2) \leq 0$$

$$\underbrace{\Re(P_C x_1 - P_C x_2, P_C x_1 - P_C x_2)}_{\in \mathbb{R}} \leq \Re(x_1 - x_2, P_C x_1 - P_C x_2)$$

$$\therefore \|P_C x_1 - P_C x_2\|^2 \leq \Re(x_1 - x_2, P_C x_1 - P_C x_2)$$

$$\stackrel{\Re z \leq |z|}{\leq} |(x_1 - x_2, P_C x_1 - P_C x_2)|$$

$$\stackrel{C-S}{\leq} \|x_1 - x_2\| \|P_C x_1 - P_C x_2\| \quad (\text{G3.1})$$

Desigualdade Cauchy-Schwarz G1.1. $|(x, y)| \leq (x, x)^{\frac{1}{2}} (y, y)^{\frac{1}{2}}$

- se $\|P_C x_1 - P_C x_2\| \neq 0$, de G3.1,

$$\|P_C x_1 - P_C x_2\| \leq \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in H$$

- se $\|P_C x_1 - P_C x_2\| = 0$,

$$\|P_C x_1 - P_C x_2\| \leq \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in H$$

□

Observação G3.6. Manipulando as fórmulas, podemos ver também que

$$y_0 \text{ minimiza em } C \text{ a função } \frac{1}{2} \|y\|^2 - \Re(y, x_0)$$

$$\Re(y_0, w - y_0) \geq \Re(x_0, w - y_0), \quad \forall w \in C. \quad \star$$

$$y_0 \text{ minimiza em } C \text{ a função } \|x_0 - y\| \quad (\|x_0 - y_0\| = \min_{y \in C} \|x_0 - y\|)$$

$$\|y - x_0\|^2 = (y - x_0, y - x_0) = \|y\|^2 - 2\Re(x_0, y) + \|x_0\|^2$$

$$y_0 \text{ minimiza em } C \text{ a função } \|y\|^2 - 2\Re(x_0, y) + \overbrace{\|x_0\|^2}^{const.}$$

$$y_0 \text{ minimiza em } C \text{ a função } \|y\|^2 - 2\Re(x_0, y)$$

Exercícios

Exercício G3.7. Faça os exercícios 5.6 e 5.8 (p. 148) do [Bre11] ★

Definição G3.8. Sejam H um espaço de Hilbert e $A \subseteq H$. Definimos o **ortogonal de A**

$$A^\perp = \{x \in H : (x, a) = 0, \forall a \in A\} :$$

$A^\perp$ é sempre um subespaço vetorial fechado. ★

Teorema G3.9. Se H é um espaço de Hilbert e M é um *subespaço vet. fechado*, então P_M é um operador linear com $\|P_M\| = 1$ (exceto no caso $M = \{0\}$) e é caracterizado por

$$P_M x_0 \in M \quad e \quad (x_0 - P_M x_0, w) = 0, \quad \forall w \in M, \quad (\text{G3.2})$$

ou seja, $x_0 - P_M x_0 \in M^\perp$. $\triangleleft$

Definição G3.10. P_M é dita **projeção ortogonal sobre M** . ★

Demonstração.

Af. 1 P_M é caracterizado por (G3.2)

Af. 2 P_M é linear

Af. 3 $\|P_M\| = 1$

- M é não vazio, convexo e fechado (M é s.e.v. fechado)
- $P_M x_0 \in M$, e $\Re(x_0 - P_M x_0, w - P_M x_0) \leq 0, \forall w \in M$ (Prop. G3.4)

Af. 1 $\Re(x_0 - P_M x_0, w - P_M x_0) \leq 0 \iff (x_0 - P_M x_0, w) = 0 \ (\forall w \in M)$

($\implies$)

Queremos $\Re(x_0 - P_M x_0, w) = \Im_m(x_0 - P_M x_0, w) = 0$

$$(x_0 - P_M x_0, w) = (x_0 - P_M x_0, w - P_M x_0) + (x_0 - P_M x_0, P_M x_0)$$

- $w := 2P_M x_0 \in M$: (M é s.e.v. + hip.)

$$\Re(x_0 - P_M x_0, P_M x_0) \leq 0$$

- $w \in M$:

$$\Re(x_0 - P_M x_0, w) = \Re(x_0 - P_M x_0, w - P_M x_0) + \Re(x_0 - P_M x_0, P_M x_0) \leq 0$$

$$\Re(x_0 - P_M x_0, -w) \stackrel{-w \in M}{\leq} 0 \implies \Re(x_0 - P_M x_0, w) \geq 0$$

$$\therefore \Re(x_0 - P_M x_0, w) = 0$$

- $w \in M \implies \pm iw \in M$:

$$0 = \Re(x_0 - P_M x_0, \pm iw) = \mp i \Re(x_0 - P_M x_0, w) = \pm \Im(x_0 - P_M x_0, w)$$

- $(x_0 - P_M x_0, w) = 0$

$$(\iff) \Re(x_0 - P_M x_0, w - P_M x_0) \leq 0 \iff (x_0 - P_M x_0, w) = 0 \quad (\forall w \in M)$$

- $w \in M \implies w - P_M x_0 \in M$ e $(x_0 - P_M x_0, w - P_M x_0) = 0$ (M é s.e.v. + hip.)
- $\Re(x_0 - P_M x_0, w - P_M x_0) \leq 0$

Af. 2 $P_M : H \rightarrow H$ é linear

$$\left. \begin{array}{l} (x_0 - P_M x_0, w) = 0 \\ (x_1 - P_M x_1, w) = 0 \end{array} \right\} \implies \left(x_0 + x_1 - \underbrace{(P_M x_0 + P_M x_1)}_{\in M}, w \right) = 0$$

$$\implies P_M(x_0 + x_1) = P_M x_0 + P_M x_1$$

Af. 3 $\|P_M\| = 1$

$$\|P_M\| = \sup_{x \in H, \|x\| \leq 1} \|P_M x\|$$

$$\|P_M x\| = \|P_M x - P_M 0\| \leq \|x\|, \quad \forall x \in H \quad (\text{Prop. G3.5: proj. cont.})$$

$$\left\| P_M \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = 1, \quad \forall x \in M \setminus \{0\} \quad (\text{Obs. G3.3: } P_M x = x, x \in M)$$

□

Teorema G3.11. *Seja H um espaço de Hilbert e M um subespaço fechado, então vale:*

- $H = M \oplus M^\perp$; isto é, cada $x \in H$ pode ser expresso unicamente como $x = m + m'$ onde $m \in M$ e $m' \in M^\perp$;

$$\exists! m = P_M x \in M; (x - m, w) = 0, \forall w \in M$$

$$x - m \in M^\perp$$

$$x = \underbrace{m}_{\in M} + \underbrace{(x - m)}_{\in M^\perp}$$

- na decomposição acima, $m = P_M x$ e $m' = P_{M^\perp} x = (I - P_M)x$;
- $P_M = P_M^2$ e $P_M \circ P_{M^\perp} = P_{M^\perp} \circ P_M = 0$. ◁

Corolário G3.12. *Sejam H esp. Hilbert e M subespaço próprio fechado, então existe $w \in M^\perp \setminus \{0\}$, i.e, $w \in H \setminus \{0\}$ tal que $(w, m) = 0$, $m \in M$. ◁*

Demonstração.

- $x \in H \setminus M$
- $x = m + w$ com $m \in M$ e $w \in M^\perp$ (Teorema G3.11)
- $w \neq 0$ ($x \notin M$)

□

Exercícios

Exercício G3.13. Prove o Teorema G3.11. ★

Exercício G3.14. Prove diretamente (usando o Teorema acima) a seguinte consequência do Teorema de Hahn-Banach: Seja H um espaço de Hilbert, M um subespaço fechado e $\phi \in M^*$. Então existe $\tilde{\phi} \in H^*$ tal que $\tilde{\phi}|_M = \phi$ e $\|\tilde{\phi}\| = \|\phi\|$

★

G4 O dual de um espaço de Hilbert

Aula 25

Teorema G4.1 [Teorema de Representação de Riesz-Frechet].
 Se $f \in H^*$, existe um único $y \in H$ tal que

$$f(x) = (x, y) \quad \text{para todo } x \in H.$$

Além disso, $\|f\|_{H^*} = \|y\|_H$. ◁

Isto permite identificar H e H^* .

Logo podemos também identificar H e H^{} (e obter a reflexividade)^a.**

^acom o devido cuidado de verificar que o isomorfismo é o mergulho canônico

Demonstração. Considere a aplicação linear

$$T : H \rightarrow H^* : y \in H \mapsto Ty = f : H \rightarrow \mathbb{K} : x \mapsto Ty(x) = f(x) := (x, y)$$

Queremos mostrar que T é bijetora:

$\forall f \in H^*, \exists! y \in H; Ty = f$, i.e., $(x, y) = Ty(x) = f(x), \forall x$

Ainda com isso, $\|f\| = \|Ty\| = \|y\|$ SE T é isometria !!

Af. 1. T é isometria

(portanto, **injetora**)

Af. 2. T é sobrejetora

Prova Af. 1.: T é isometria

$$\|Ty\| = \sup_{x \in H, \|x\| \leq 1} |Ty(x)|$$

$$\bullet |Ty(x)| = |(x, y)| \leq \|x\| \|y\| \implies \|Ty\| \leq \|y\|$$

Desigualdade Cauchy-Schwarz G1.1. $|(x, y)| \leq (x, x)^{\frac{1}{2}} (y, y)^{\frac{1}{2}}$

$$\bullet Ty\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \left(\frac{y}{\|y\|}, y\right) = \frac{\|y\|^2}{\|y\|} = \|y\|, \quad \forall y \in H \setminus \{0\}$$

$$\bullet \|Ty\| = \|y\|$$

Prova Af. 2.: $T : H \rightarrow H^$ é sobrejetora*

- $T(H)$ é s.e.v. fechado em H^*

Ex. F3.11: Se $T : X \rightarrow Y$ é uma isometria linear e X é Banach, então $T(X)$ é um s.e.v. fechado. (ver p. E9: prova de dual refl. implica esp. refl.)

Basta mostrar que $T(H)$ é denso em H^* , *pois daí*

$$T(H) = \overline{T(H)} = H^*$$

Ex. B2.6. Um subespaço M de em e.v.n. X é denso se e só se vale que

$$\forall \phi \in X^* \text{ t.q. } \phi|_M = 0, \text{ vale } \phi \equiv 0$$

- $h \in H^{**}$; $h(Ty) = 0, \forall y \in H$

Queremos $h = 0$

- H é reflexivo (Proposição G2.5)

Proposição G2.5. Todo espaço de Hilbert é uniformemente convexo e portanto reflexivo.

- $J : H \rightarrow H^{**}$ o mergulho canônico é sobrejetor

- $\exists x \in H$; $Jx = h$

$$0 = h(Ty) = Jx(Ty) \stackrel{\text{def.} J}{=} Ty(x) \stackrel{\text{def.} T}{=} (x, y), \quad \forall y \in H$$

- para $y = x \in H$: $(x, x) = 0 \implies x = 0$

- $h \equiv Jx = J0 = 0$

□

Exercícios

Exercício G4.2. Faça os exercícios 5.16, 5.17, 5.19 (p. 150..) do [Bre11] (leia primeiro o remark 3 na p.136). ★

Definição G4.3. Uma forma **sesqui-linear**² $a(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ é dita

- **contínua** se existe C tal que $|a(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|$, $\forall x, y \in H$,
- **coerciva** se existe $\alpha > 0$ tal que $\Re a(x, x) \geq \alpha\|x\|^2$, $\forall x \in H$,
- **sesquisimétrica** (ou hermitiana) se $a(x, y) = \overline{a(y, x)}$ $\forall x, y \in H$. ★

Lema G4.4. *Sejam H um espaço de Hilbert e $a : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ uma forma sesqui-linear contínua e coerciva. Então, existe $A \in L(H, H)$ tal que*

$$a(w, z) = (w, Az).$$

Ainda, A é um isomorfismo e existem $\alpha, C > 0$; vale $\alpha\|z\| \leq \|Az\| \leq C\|z\|$, para todo $z \in H$. ◁

Demonstração.

- $z \in H$
- $a(\cdot, z) : H \rightarrow \mathbb{K}$ é linear contínua, i.e., $a(\cdot, z) \in H^*$

Teorema de Representação de Riesz-Frechet G4.1. Se $f \in H^*$, existe um único $y \in H$ tal que $f(x) = (x, y)$ para todo $x \in H$.

- $\exists! y \in H$; $a(w, z) = (w, y) \quad \forall w \in H$
 y depende de z
- $A : H \rightarrow H : z \mapsto \underline{Az := y}$, onde $\underline{(w, y) = a(w, z)}$, $\forall w \in H$

Af. 1. A é linear

Af. 2. A é limitada, i.e., $\|Az\| \leq C\|z\|$, para algum $C > 0$

Af. 3. $\alpha\|z\| \leq \|Az\|$, para algum $\alpha > 0$

Af. 4. A é injetora

Af. 5. A é sobrejetora

²linear na primeira entrada e linear no conjugado da segunda entrada

Prova Af. 1.: A é linear

$$\underline{(w, A(z+m) - (Az + Am)) = 0}, \forall w \in H \implies \underline{A(z+m) - (Az + Am)} \in H^\perp = \{\mathbf{0}\}$$

$$(w, A(z+m) - (Az + Am)) = 0 \iff \underline{(w, A(z+m)) = (w, Az + Am)}$$

$$\begin{aligned} \underline{(w, A(z+m))} &= \underline{a(w, z+m)} \stackrel{\text{a sesq-linear}}{=} a(w, z) + a(w, m) \\ &= \underline{(w, Az)} + \underline{(w, Am)} \\ &= \underline{(w, Az + Am)} \end{aligned}$$

Prova Af. 2.: A é limitada

$$\begin{aligned} \underline{0} \leq \|Az\|^2 &= (Az, Az) = \underline{a(Az, z)} \\ &\stackrel{=}{=} |a(Az, z)| \\ &\stackrel{\text{a cont.}}{\leq} C \|Az\| \|z\| \\ &\exists \underline{C > 0} \end{aligned}$$

$$\underline{\therefore \|Az\| \leq C \|z\|}$$

Prova Af. 3.: $\alpha \|z\| \leq \|Az\|$, para algum $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} \alpha \|z\|^2 &\stackrel{\text{a coerc.}}{\leq}_{\exists \alpha > 0} \Re a(z, z) = \Re \underline{(z, Az)} \\ &\leq |(z, Az)| \stackrel{C-S}{\leq} \|z\| \|Az\| \end{aligned}$$

$$\underline{\therefore \alpha \|z\| \leq \|Az\|}$$

Prova Af. 4.: A é injetora

$$Az = Am \implies \|z - m\| \stackrel{\text{Af.3}}{\leq} \alpha^{-1} \|Az - Am\| = 0 \implies z = m$$

Prova Af. 5.: A é sobrejetora

- $A(H)$ é fechado
- $A(H) = H$

$$\blacksquare A(H) \neq H$$

Corolário G3.12. Sejam H esp. Hilbert e M subespaço próprio fechado, então existe $w \in M^\perp \setminus \{0\}$, i.e, $w \in H \setminus \{0\}$ tal que $(w, m) = 0$, $m \in M$.

$$\blacksquare \exists \underline{w \in H \setminus \{0\}}; (w, Az) = 0, z \in H.$$

$$0 = (w, Aw) = \underline{a(w, w)}$$

$$\implies 0 = \Re a(w, w) \stackrel{a \text{ coer.}}{\geq} \alpha \|w\|^2$$

$$\implies w = 0 \quad \boxed{\rightarrow \leftarrow}$$

Prova $A(H)$ é fechado

- $y \in \overline{A(H)}$
- $\exists y_n \in H; \underline{Ay_n \rightarrow y}$
- $\{Ay_n\}$ convergente, logo de Cauchy

$$\|y_n - y_m\| \stackrel{Af.3}{\leq} \alpha^{-1} \|Ay_n - Ay_m\| \rightarrow 0$$

- $\{y_n\}$ de Cauchy
- $y_n \rightarrow z \in H$ (H completo)
- $\underline{Ay_n \rightarrow Az}$ (A contínua, Af. 2)
- $y = Az \in A(H)$

□

Teorema G4.5 [O Teorema de Lax-Milgram]. *Nas condições do Lema G4.4, para cada $\varphi \in H^*$, existe um único $y_0 \in H$ tal que*

$$\varphi(w) = a(w, y_0), \quad \forall w \in H.$$

◁

Demonstração.

- $\varphi \in H^*$

Teorema de Representação de Riesz-Frechet G4.1. Se $f \in H^*$, existe um único $y \in H$ tal que $f(x) = (x, y)$ para todo $x \in H$.

- $\exists! y \in H ; \varphi(w) = (w, y) \quad \forall w \in H$
- $A : H \rightarrow H : z \mapsto Az := y$, onde $(w, y) = a(w, z)$, $\forall w \in H$ é bijetora (Lema G4.4)
- $\exists! y_0 \in H ; Ay_0 = y$

$$\varphi(w) = (w, y) = (w, Ay_0) = a(w, y_0)$$

□

Exercícios

Exercício G4.6. Faça o exercício 5.20 (p. 151) do [Bre11]



G5 Bases ortonormais (de Hilbert)

Definição G5.1. Um conjunto em H é dito **conjunto ortonormal** se os seus elementos são dois a dois ortogonais e todos são unitários. ★

Propriedades: $S \subset H$ ortonormal:

P1. S é l.i.;

P2. $S^\perp = \{0\}$ (**completo**) se só se S não está contido em nenhum outro conj. ortonormal (é maximal);

P3. se $\overline{\text{span}(S)} = H$, então $S^\perp = \{0\}$.

Dada uma sequência $\{x_n\}$ l.i. podemos construir (**processo de ortonormalização de Gram-Schmidt**) uma seq. ortonormal $\{e_n\}$ tal que

$$\text{span}(x_1, \dots, x_k) = \text{span}(e_1, \dots, e_k) \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}, \quad e_n = \frac{x_n - \sum_{j=1}^{n-1} (x_n, e_j) e_j}{\left\|x_n - \sum_{j=1}^{n-1} (x_n, e_j) e_j\right\|}, \quad n \geq 2$$

Exemplo G5.2. S é ortonormal^[simples] em H e satisfaz $S^\perp = \{0\}$ ^[1 e 2 simples]:

1. $S = \{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)\}$ em $\mathbb{R}^n$
2. $S = \{e_1 = (1, 0, 0, \dots), e_2 = (0, 1, 0, \dots), e_3 = (0, 0, 1, \dots), \dots\}$ em ℓ_2
3. $S = \left\{u_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, u_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt), v_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt) : n \in \mathbb{N}\right\}$ em $L^2([0, \pi], \mathbb{R})$
4. $S = \left\{u_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} : n \in \mathbb{Z}\right\}$ em $L^2([0, \pi], \mathbb{C})$

★

Teorema G5.3 [Desigualdade de Bessel]. Se $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é um conjunto ortonormal em H , então para $x \in H$,

$$\sum_{\alpha \in A} |(x, e_\alpha)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Ainda mais, $A_x := \{\alpha \in A : (x, e_\alpha) \neq 0\}$ é enumerável. $\triangleleft$

De fato, $\sum_{\alpha \in A} |(x, e_\alpha)|^2 = \sum_{\alpha \in A_x} |(x, e_\alpha)|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2$

onde a notação $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ representa uma ordenação de $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A_x}$

Demonstração.

Passo 1. Considere uma quantidade finita qualquer de e_α

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{i=1}^N (x, e_{\alpha_i}) e_{\alpha_i} \right\|^2 &= \|x\|^2 - 2\Re \left(x, \sum_{i=1}^N (x, e_{\alpha_i}) e_{\alpha_i} \right) + \left\| \sum_{i=1}^N (x, e_{\alpha_i}) e_{\alpha_i} \right\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2\Re \sum_{i=1}^N \overline{(x, e_{\alpha_i})} (x, e_{\alpha_i}) + \left\| \sum_{i=1}^N (x, e_{\alpha_i}) e_{\alpha_i} \right\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2 \sum_{i=1}^N |(x, e_{\alpha_i})|^2 + \left\| \sum_{i=1}^N (x, e_i) e_{\alpha_i} \right\|^2 \\ &\stackrel{\substack{\text{Pitag} \\ e_{\alpha_i} \text{ 2a2 ortog}}}{=} \|x\|^2 - 2 \sum_{i=1}^N |(x, e_{\alpha_i})|^2 + \sum_{i=1}^N \|(x, e_{\alpha_i}) e_{\alpha_i}\|^2 \\ &\stackrel{e_{\alpha_i} \text{ orton}}{=} \|x\|^2 - \sum_{i=1}^N |(x, e_{\alpha_i})|^2 \end{aligned}$$

Teorema de Pitágoras G1.3. $\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$

$$\therefore \boxed{\sum_{i=1}^N |(x, e_{\alpha_i})|^2} = \|x\|^2 - \left\| x - \sum_{i=1}^N (x, e_{\alpha_i}) e_{\alpha_i} \right\|^2 \boxed{\leq \|x\|^2} \quad (\text{G5.1})$$

portanto (G5.1) vale para uma quantidade enumerável de e_α : faça $N \rightarrow \infty$

Af. 1. $A_x := \{\alpha \in A : (x, e_\alpha) \neq 0\}$ é enumerável

$$A_x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad \text{onde } A_n := \left\{ \alpha \in A : |(x, e_\alpha)| > \frac{1}{n} \right\}$$

■ A_n é finito

* $I \subset A_n$ finito

*

(Passo 1)

$$\|x\|^2 \geq \sum_{\alpha \in I} |(x, e_\alpha)|^2 > \sum_{i \in I} \frac{1}{n^2} = \frac{|I|}{n^2}$$

* $|I| < n^2 \|x\|^2$

* $|A_n| < n^2 \|x\|^2$ c.c., existiria subconj. finito I com cardinalidade maior ou igual $n^2 \|x\|^2$

• A_x é enumerável

(união enumer. de conj. finitos/en. é enumer.)

Passo 2. Quantidade qualquer de e_α

• A_x é enumerável

$$\sum_{\alpha \in A} |(x, e_\alpha)|^2 = \sum_{\alpha \in A_x} |(x, e_\alpha)|^2 \stackrel{\text{Passo 1}}{\leq} \|x\|^2$$

□

Teorema G5.4. Se $S = \{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é um conjunto ortonormal em H , as seguintes afirmativas são equivalentes:

- a) (Completeza) Se $(x, e_\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in A$, então $x = 0$ (ie, $S^\perp = \{0\}$).
- b) (Identidade de Parseval) $\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |(x, e_\alpha)|^2$ para todo $x \in H$.
- c) Para cada $x \in H$, $x = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha$, onde a soma converge independentemente da ordem dos termos. $\triangleleft$

Definição G5.5. Um conjunto em H é dito **base de Hilbert** (ou **base ortonormal**) se é um conjunto ortonormal que satisfaz as propriedades equivalentes do Teorema G5.4 ★

Demonstração.

a) $\implies$ c)

- A_x é enumerável (Desigualdade de Bessel G5.3)
- $\sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha = \sum_{\alpha \in A_x} (x, e_\alpha) e_\alpha$
- $(e_j)_{j=1}^\infty$ uma ordenação de $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A_x}$
- $\sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha = \sum_{j=1}^\infty (x, e_j) e_j$

Af. 1. a série $\sum_{j=1}^\infty (x, e_j) e_j$ converge em H

Af. 2. $x - \sum_{j=1}^\infty (x, e_j) e_j = 0$

Af. 3. a soma converge para o mesmo ponto independentemente da ordenação

Prova Af. 1.:

- $s_m := \sum_{j=1}^m (x, e_j) e_j$

$$\|s_m - s_n\|^2 = \left\| \sum_{j=n+1}^m (x, e_j) e_j \right\|^2 \stackrel{\substack{\text{Pitag} \\ e_i 2a2 \text{ ortog}}}{=} \sum_{j=n+1}^m |(x, e_j)|^2 \rightarrow 0$$

Desigualdade de Bessel G5.3. $\sum_{\alpha \in A_x} |(x, e_\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$
 $\therefore \sum_{j=1}^{\infty} |(x, e_j)|^2$ é convergente: seq. das somas parciais é conv., logo de Cauchy

- $\{s_m\}$ é de Cauchy em H , logo convergente em H : (H Hilbert, completo)

$$\sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j) e_j < \infty$$

Prova Af.2. $x - \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j) e_j = 0$

Por a). $S^\perp = \{0\}$, basta mostrar que $(x - \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j) e_j, e_\alpha) = 0, \forall \alpha \in A$

- $\alpha \in A_x$: para cada n fixado

$$\left(x - \sum_{j=1}^m (x, e_j) e_j, e_n \right) = (x, e_n) - \sum_{j=1}^m (x, e_j) \underbrace{(e_j, e_n)}_{\substack{1, \text{ } j=n; \\ 0, \text{ } cc}} = 0, \quad \forall m \geq n$$

- para cada n

$$\left(x - \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j) e_j, e_n \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\left(x - \sum_{j=1}^m (x, e_j) e_j, e_n \right)}_{\text{definitiv.nula}} = 0$$

- para $\alpha \notin A_x := \{\alpha \in A : (x, e_\alpha) \neq 0\}$

$$\left(x - \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j) e_j, e_\alpha \right) = (x, e_\alpha) - \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j) \underbrace{(e_j, e_\alpha)}_{e_j \neq e_\alpha} = 0$$

Prova Af. 3.: a soma converge para o mesmo ponto independentemente da ordenação

- $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ é outra ordenação de $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A_x}$
- como na prova da Af. 1, $\sum_{j=1}^{\infty} (x, f_j) f_j < \infty$
- como na prova da Af. 2., $x - \sum_{j=1}^{\infty} (x, f_j) f_j = 0$

$$c) \implies b) : x = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha \implies \|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |(x, e_\alpha)|^2$$

- Temos que

(hip. c))

$$\left\| x - \sum_{i=1}^N (x, e_i) e_i \right\|^2 \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty$$

-

(veja Passo 1 na prova da des. Bessel G5.3)

$$\|x\|^2 - \sum_{i=1}^N |(x, e_i)|^2 = \left\| x - \sum_{i=1}^N (x, e_i) e_i \right\|^2, \quad N \rightarrow \infty$$

$$b) \implies a) (\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |(x, e_\alpha)|^2, \forall x \in H) \implies ((x, e_\alpha) = 0, \forall \alpha \in A \Rightarrow x = 0)$$

$$\bullet \quad (x, e_\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in A \implies \|x\|^2 \stackrel{b)}{=} \sum_{\alpha \in A} |(x, e_\alpha)|^2 = 0 \implies x = 0 \quad \square$$

Exercícios

Exercício G5.6. Mostre que

- (!) valem as propriedades P1, P2, P3 da pág. G21;
- em dimensão finita, uma base de Hilbert é uma base de Hamel;

Uma **base de Hamel** para um espaço vetorial X sobre o corpo $\mathbb{K}$, é um conjunto $B \subseteq X$ cujos elementos são linearmente independentes e tal que todo elemento de X é combinação linear (finita) de elementos de B .

- uma base de Hilbert enumerável é também uma base de Schauder;

Seja X um espaço de Banach com $\dim X = \infty$. Uma sequência $\{s_n\} \subseteq X$ é dita **base de Schauder** para X se para cada elemento $x \in X$ existir uma única sequência $\{a_n\} \subseteq \mathbb{K}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n s_n$

- as propriedades (a-b-c) do Teorema G5.4 também equivalem a
 - d) $S^\perp = \{0\}$;
 - e) não existe um conjunto ortonormal que contenha propriamente S
 - f) $H = \overline{\text{span}(S)}$.



Proposição G5.7. *Todo espaço de Hilbert tem uma base ortonormal (Hilbertiana).* ◁

Esboço da prova.

- $X = \{S \subset H : S \text{ é ortonormal}\}$
- $\subseteq$ é relação de ordem em X

Lema de Zorn Se X é um conjunto parcialmente ordenado e todo subconjunto totalmente ordenado de X tem um limitante superior então X tem um elemento maximal.

Conjunto parcialmente ordenado: com uma relação de ordem " $\preceq$ " (reflexiva, antisimétrica e transitiva)

(reflexiva $x \preceq x$

antisimétrica $x \preceq y$ e $y \preceq x \implies x = y$

transitiva $x \preceq y$ e $y \preceq z \implies x \preceq z$)

Conjunto totalmente ordenado: com uma relação de ordem " $\preceq$ " tal que dados x, y quaisquer $x \preceq y$ ou $y \preceq x$

Limitante superior de $Y \subseteq X$: $l \in X$ t.q. $y \preceq l$ para todo $y \in Y$.

$m \in X$ é **elemento maximal** de X : $x \in X$ e $m \preceq x \implies m = x$.

- X tem um elemento maximal S
- $S^\perp = \{0\}$
- S é base de Hilbert

(P2, pag. G21)

□

Teorema G5.8. *Um espaço de Hilbert H é separável se e somente se tem uma base ortonormal (Hilbertiana) enumerável.*

Neste caso, toda base ortonormal de H é enumerável e (se $\dim H = \infty$) H é isometricamente isomorfo a ℓ_2 $\triangleleft$

Esboço da prova. justifique as passagens.

($\Rightarrow$)

- $\exists \{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, com $v_1 \neq 0$, subconj. enumerável e denso em H (H separável)
- $F_k := [v_1, \dots, v_k]$
- $H = \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k}$ ($\overline{\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}} = H$)
- $\{e_1\}$ base ortonormal de F_1 ($e_1 = v_1 / \|v_1\|$)
- pelo processo de Gram-Schmidt, obtém-se base ortonormal $\{e_1, \dots, e_k\}$ de F_k , $k \geq 2$
- $S := \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é ortonormal e enumerável
- S é denso em H
- $S^\perp = \{0\}$ (P3, pag. G21)
- S é base Hilbertiana

($\Leftarrow$)

- $\exists S = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ orton. enum.; todo $x \in H$ se escreve (b. Hilb. enum.)

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} (x, e_n) e_n$$

Teorema G5.4. Se $S = \{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é um conjunto ortonormal em H ,
c) Para cada $x \in H$, $x = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha$,

$$\bullet F := \left\{ \sum_{n=1}^k (x, e_n) e_n : k \in \mathbb{N} \right\}$$

- podemos “substituir” (x, e_n) por um racional q_n ($q_n + ip_n$) ($\mathbb{Q}^2$ é denso em $\mathbb{K}$)
- $\left\{ \sum_{n=1}^k q_n e_n : k \in \mathbb{N} \right\}$ é enumerável e denso em H
- H é separável

Se H de dimensão infinita é separável, H é isometricamente isomorfo a ℓ_2

- $\exists S := \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ base Hilbertiana enumerável de H

$$T : \ell_2 \rightarrow H : \alpha = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto T\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$$

Af. 1 T está bem definida e é linear

$$s_m := \sum_{j=1}^m \alpha_j e_j$$

$$\|s_m - s_n\|^2 = \left\| \sum_{j=n+1}^m \alpha_j e_j \right\|^2 \stackrel[\text{e}_i \text{ orton}]{\text{Pitag}} \sum_{j=n+1}^m |\alpha_j|^2 \rightarrow 0$$

$\{s_m\}$ é de Cauchy, logo convergente em H

Af. 2 T é isometria

$$\|T\alpha\|^2 \stackrel[\text{cont.}]{\text{norm}} \lim \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i \right\|^2 = \stackrel[\text{orton.}]{\text{Pitag}} \lim \sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \|\alpha\|^2$$

Af. 3 T é sobrejetora

dado $x \stackrel{c)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i \in H$, tome $\alpha = ((x, e_i)) \stackrel{a)}{\in} \ell_2$

Teorema G5.4. b) $\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |(x, e_\alpha)|^2$ para todo $x \in H$
 c) Para cada $x \in H$, $x = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha$

□

Exercícios

Exercício G5.9. Faça os exercícios 5.26, 5.27 e 5.28 (p. 154) do [Bre11] ★

Exercício G5.10. Veja os sistemas descritos nos exercícios 5.31, 5.32 (base de Haar e sistema de Rademacher) (p. 155) do [Bre11]: fornecem bases para $L^2(0, 1)$ ★

Exemplo G5.11.

- A base canônica $\{e_n\}$ em ℓ_2 é uma base de Hilbert.
- As funções $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx)$ formam uma base de Hilbert em $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$.
(Para mostrar que formam um conjunto completo ver [Muj, p. 72])
- As funções $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$ ($n \in \mathbb{Z}$) formam uma base de Hilbert em $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$.

★

Referências

- [Bre11] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011, pp. xiv+599. ISBN: 978-0-387-70913-0.
- [Fri70] A. Friedman. *Foundations of modern analysis*. Holt, Rinehart e Winston, Inc., New York-Montreal, Que.-London, 1970, pp. vi+250.
- [Muj] J. Mujica. “Notas de análise funcional”. Em: *Notas de aula - IMECC - UNICAMP* ().

Lista dos teoremas

G1.1	Proposição	G4
G2.1	Definição	G5
G2.5	Proposição (Reflexividade)	G6
G3.1	Lema	G7
G3.2	Definição (Projeção convexo)	G7
G3.3	Observação	G7
G3.4	Proposição (Caracteriz. projeção)	G9
G3.5	Proposição	G10
G3.6	Observação	G11
G3.8	Definição ($A^\perp$)	G12
G3.9	Teorema (Proj. ortogonal)	G12
G3.10	Definição	G12
G3.11	Teorema (Decomposição em ortogonais)	G14
G3.12	Corolário	G14
G4.1	Teorema (Teorema de Representação de Riesz-Frechet)	G15
G4.3	Definição	G17
G4.4	Lema	G17
G4.5	Teorema (O Teorema de Lax-Milgram)	G20
G5.1	Definição (Conjunto ortonormal)	G21
G5.2	Exemplo	G21
G5.3	Teorema (Desigualdade de Bessel)	G22
G5.4	Teorema (completeza - Parseval)	G24
G5.5	Definição (Base de Hilbert)	G24
G5.7	Proposição (Existência da base)	G27
G5.8	Teorema (Separabilidade)	G28
G5.11	Exemplo	G30

Lista dos exercícios

G2.2	Exercício		G6
G2.3	Exercício		G6
G2.4	Exercício		G6
G3.7	Exercício		G12
G3.13	Exercício		G14
G3.14	Exercício		G14
G4.2	Exercício		G16
G4.6	Exercício		G20
G5.6	Exercício		G26
G5.9	Exercício		G30
G5.10	Exercício		G30