

Conteúdo

Pad.1	Ortogonalidade e perpendicularismo	Pad.2
Pad.1.1	Vetor Normal	Pad.2
Pad.2	Medida Angular	Pad.5
Pad.2.1	Medida angular entre retas	Pad.5
Pad.2.2	Medida angular entre reta e plano	Pad.7
Pad.2.3	Medida angular entre planos	Pad.10
Pad.3	Distância	Pad.11
Pad.3.1	Entre dois pontos	Pad.11
Pad.3.2	Entre um ponto e uma reta	Pad.11
Pad.3.3	Entre um ponto e um plano	Pad.13
Pad.3.4	Entre retas	Pad.14
Pad.3.5	Entre reta e plano	Pad.16
Pad.3.6	Entre planos	Pad.18

Objetivo

Estudar **ortogonalidade** e **perpendicularismo** de retas e planos do espaço Euclidiano E^3 .

Obter a **medida angular** entre retas ou entre planos ou entre reta e plano e a **distância** entre pontos, retas e planos.

Lembre-se:

Para usarmos as fórmulas para o cálculo de distância entre pontos ou de produto escalar entre vetores precisamos de uma **base ortonormal** e portanto de um **sistema de coordenadas ortogonal**: veja Teorema [P.2.3](#).

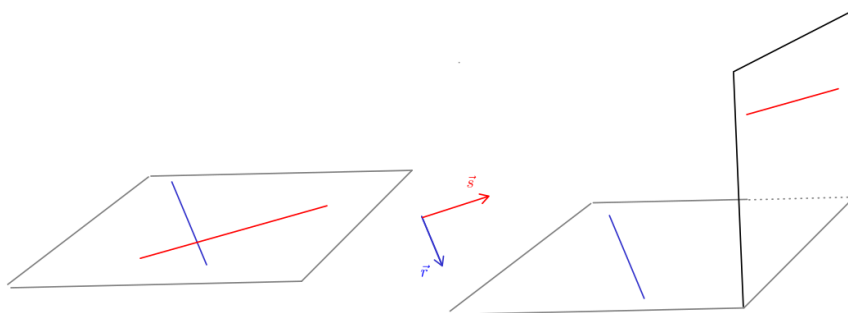
Para usarmos as fórmulas para o cálculo de produto vetorial entre vetores precisamos de uma **base ortonormal positiva**: veja Teorema [OPv.2.2](#).

SEMPRE QUE USARMOS TAIS FÓRMULAS ESTAREMOS CONSIDERANDO UM SISTEMA ORTOGONAL COM BASE POSITIVA.

Pad.1 Ortogonalidade e perpendicularismo

Vimos na Proposição R.4.1 que duas retas r e s no espaço podem ser paralelas, concorrentes ou reversas e que: se os vetores diretores são ortogonais, $\vec{r} \perp \vec{s}$, e

- r e s são concorrentes, então r e s são **perpendiculares**.
- r e s são reversas, então r e s são **ortogonais**.



QUANDO UMA RETA É PERPENDICULAR A UM PLANO?

QUANDO DOIS PLANOS SÃO PERPENDICULARES?

Pad.1.1 Vetor Normal

Seja π um plano em E^3 . Um **vetor normal** a π é qualquer vetor não nulo \vec{n} ortogonal a π .

Consequência Pad.1.1. *Outras formas equivalentes de definir vetor normal:*

1. Um vetor é normal ao plano se, e somente se, é ortogonal a qualquer vetor paralelo ao plano.
2. Um vetor é normal ao plano se, e somente se, é ortogonal a quaisquer vetores diretores do plano.
3. Um vetor é normal ao plano se, e somente se, é ortogonal a dois vetores diretores do plano.

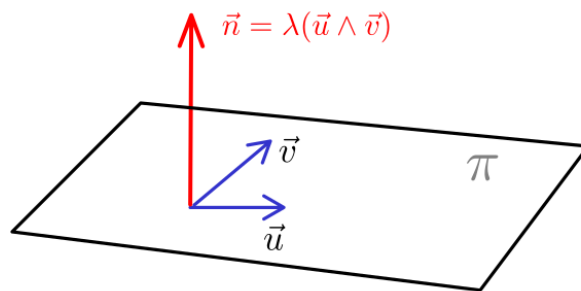
 COMO ENCONTRAR UM VETOR NORMAL A π ?

- \vec{u} e \vec{v} vetores diretores de π .
-

$\vec{\eta}$ não nulo é normal a $\pi \iff \vec{\eta}$ é ortogonal a \vec{u} e a \vec{v}

$\vec{u}, \vec{v} \text{ LI} \iff \vec{\eta} \text{ e } \vec{u} \wedge \vec{v} \text{ são paralelos.}$
Def.OPv.2.1

- $\vec{\eta} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ é **um** vetor normal a π



 QUAL A RELAÇÃO ENTRE VETOR NORMAL E EQUAÇÃO GERAL DE π ?

- $\pi : ax + by + cz + d = 0$ com a, b, c não todos nulos
-

$$\vec{u} = (m, n, p) \parallel \pi \quad \begin{array}{c} \text{Prop.R.4.3} \\ \iff \\ \text{base orton.} \end{array} \quad (a, b, c) \cdot (m, n, p) = 0$$

$$\begin{array}{c} \text{Prop.P.2.3} \\ \iff \\ \text{base orton.} \end{array} \quad \vec{\eta} = (a, b, c) \perp \vec{u}$$

- Por [Pad.1.1-\(1\)](#), $\vec{\eta} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ é vetor normal a π

A recíproca também vale:

Proposição Pad.1.2. Considere em E^3 um sistema de coordenadas **ortogonal**. Então $\vec{\eta} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ é um vetor normal a π se, e somente se, π possui equação geral da forma

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Nota. A proposição acima **não é válida** se o sistema de coordenadas não é ortogonal.

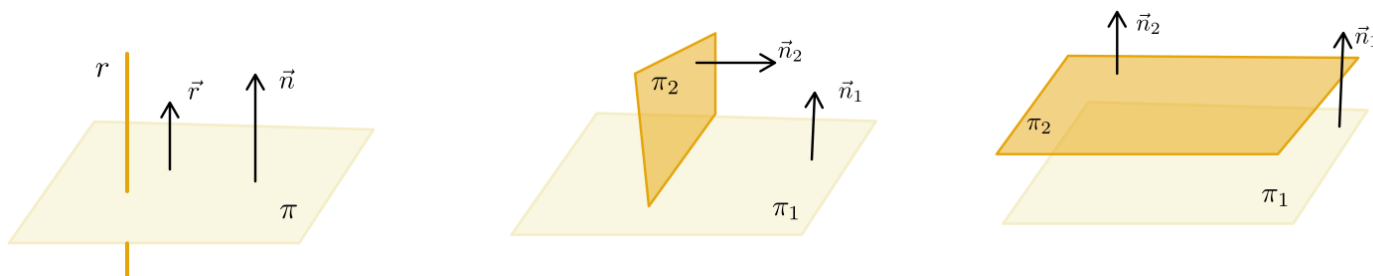
Exemplo Pad.1.3. Sejam $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal e $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ outra base onde

$$\vec{e}_1 = \vec{i}, \quad \vec{e}_2 = \vec{j}, \quad \vec{e}_3 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

Considere o sistema de coordenadas $\Sigma = (O, E)$. Obtenha um vetor normal ao plano π de equação $z = 0$ no sistema Σ .

Consequência:

1. Se \vec{n}_1 e \vec{n}_2 são vetores normais, respectivamente, aos planos π_1 e π_2 e \vec{r} é um vetor diretor da reta r , então
 - (a) r e π são perpendiculares se e somente se \vec{r} e \vec{n} são paralelos;
 - (b) π_1 e π_2 são perpendiculares se e somente se \vec{n}_1 e \vec{n}_2 são ortogonais;
 - (c) π_1 e π_2 são paralelos se e somente se \vec{n}_1 e \vec{n}_2 são paralelos.



Exemplo Pad.1.4. Ver Exercícios 53 e 54 em [Slide de Exercícios](#).

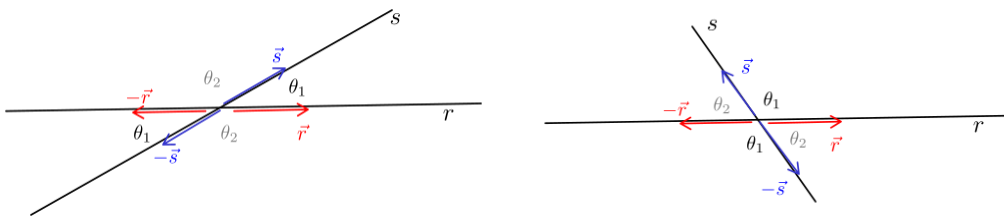
Pad.2 Medida Angular

Pad.2.1 Medida angular entre retas

Sejam r e s duas retas com vetores diretores \vec{r} e \vec{s} ¹.

A **medida angular** (ou o **ângulo**) **entre r e s** é a menor medida entre as medidas angulares dos vetores diretores de r e de s :

$$\min\{ang(\vec{r}, \vec{s}) = ang(-\vec{r}, -\vec{s}), ang(\vec{r}, -\vec{s}) = ang(-\vec{r}, \vec{s}), \}$$



Denotamos por $ang(r, s)$ a medida angular entre r e s e temos

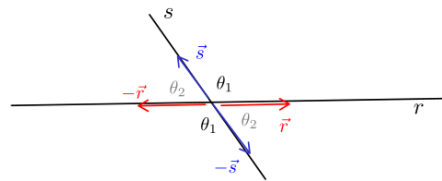
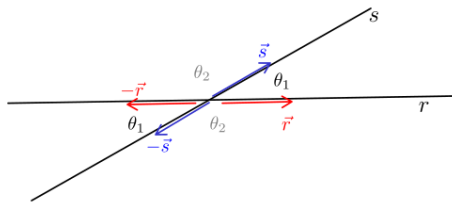
$$0 \leq ang(r, s) \leq \frac{\pi}{2}.$$

- se $ang(r, s) = 0$ então r e s são paralelas
- se $ang(r, s) = \frac{\pi}{2}$ então r e s são ortogonais (podem ser concorrentes ou reversas)

COMO CALCULAR O ÂNGULO ENTRE DUAS RETAS?

¹ $-\vec{r}$ e $-\vec{s}$ também são vetores diretores

- $\theta_1 = \text{ang}(\vec{r}, \vec{s})$
- $\theta_2 = \text{ang}(-\vec{r}, \vec{s})$



- $\theta_2 = \pi - \theta_1 \implies \cos \theta_2 = -\cos \theta_1$
- $\cos(\text{ang}(r, s)) = \begin{cases} \cos \theta_1, & \theta_1 \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \cos \theta_2 = -\cos \theta_1, & \theta_1 \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases} = |\cos \theta_1|$
- Pela Proposição [P.1.5](#), temos que $\cos \theta_1 = \frac{\vec{r} \cdot \vec{s}}{\|\vec{r}\| \|\vec{s}\|}$

Portanto,

se r e s são duas retas em E^3 , então

$$\cos(\text{ang}(r, s)) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \|\vec{s}\|}, \quad (\text{Pad.2.1})$$

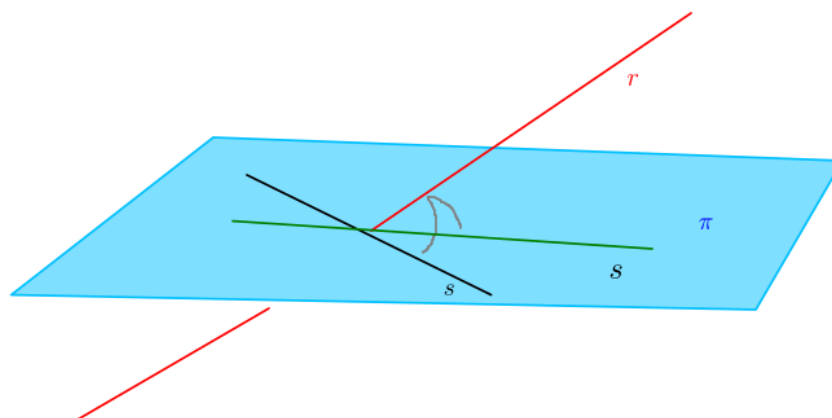
onde \vec{r} e \vec{s} são vetores diretores de r e s , respectivamente.

Exemplo Pad.2.1. Ver Exercício [55](#) em [Slide de Exercícios](#).

Pad.2.2 Medida angular entre reta e plano

Sejam r uma reta transversal a um plano π em E^3 .

A **medida angular** (ou o **ângulo**) **entre r e π** é a menor medida dentre todas as medidas angulares entre r e retas s contidas em π .

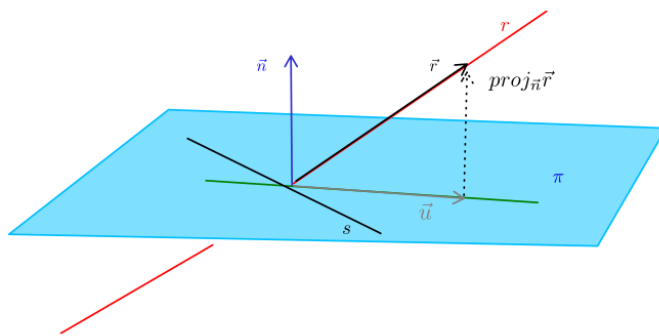


COMO CALCULAR O ÂNGULO ENTRE UMA RETA E UM PLANO?

- \vec{r} um vetor diretor da reta r
 - s uma reta qualquer em π
-

QUANDO O ÂNGULO ENTRE r E s É MÍNIMO?
QUAL UM VETOR DIRETOR ADEQUADO PARA s ?

- \vec{n} um vetor normal ao plano π .
- \vec{u} a projeção ortogonal de \vec{r} ao plano π :



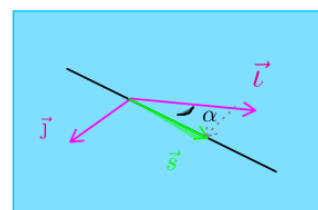
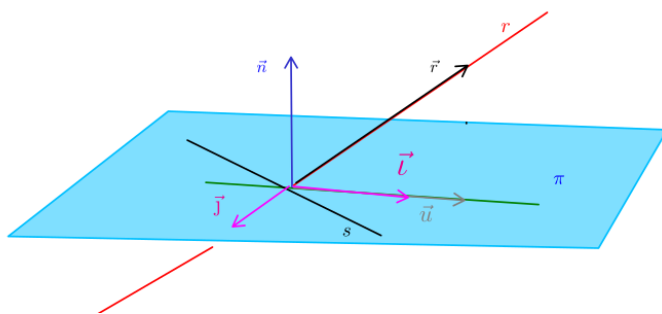
$$proj_{\vec{n}}\vec{r} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \quad (\text{Proposição P.2.8})$$

$$\vec{r} = proj_{\vec{n}}\vec{r} + \vec{u} \implies \vec{u} = \vec{r} - proj_{\vec{n}}\vec{r} \implies \vec{u} = \vec{r} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

$$\vec{s} = ??$$

- $\vec{l} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \quad \vec{j} = \vec{l} \wedge \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$

\vec{l} e \vec{j} são vetores diretores de π , unitários e ortogonais



- $\vec{s} = \cos \alpha \vec{l} + \sin \alpha \vec{j}$ é um vetor diretor unitário de s , $\alpha = \text{ang}(\vec{s}, \vec{l})$

$$\cos(\text{ang}(r, s)) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \|\vec{s}\|} = ??$$

- $\vec{r} \cdot \vec{s} = (\cos \alpha) \vec{r} \cdot \vec{l} + (\sin \alpha) \vec{r} \cdot \vec{j}$

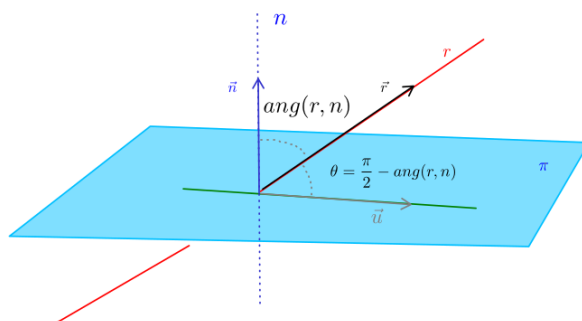
- $\vec{j} \perp \vec{u}$ e $\vec{j} \perp \vec{n}$ e $\boxed{\vec{u} = \vec{r} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}} \implies \vec{r} \cdot \vec{j} = 0$

- $\vec{r} \cdot \vec{s} = (\cos \alpha) \vec{r} \cdot \vec{l}$

-

$$\cos(\text{ang}(r, s)) = \frac{|\cos \alpha \vec{r} \cdot \vec{l}|}{\|\vec{r}\|} = \frac{|\cos \alpha| |\vec{r} \cdot \vec{l}|}{\|\vec{r}\|} \stackrel{\text{Des. Schwarz P.1.5}}{=} \frac{|\cos \alpha| \|\vec{r}\| \|\vec{l}\|}{\|\vec{r}\|} = |\cos \alpha|$$

- $\text{ang}(r, s)$ é mínimo $\stackrel{\text{arccos dec.}}{\iff} \boxed{\alpha = 0} \iff s$ é a projeção ortogonal de r em π



Proposição Pad.2.2. A medida angular entre uma reta r transversal a um plano π é dada por

$$\text{ang}(\mathbf{r}, \pi) = \frac{\pi}{2} - \text{ang}(r, n),$$

onde n é uma reta ortogonal a π .

- $\sin(\text{ang}(r, \pi)) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \text{ang}(r, n)\right) = \cos(\text{ang}(r, n))$

Por (Pad.2.1),

se r é uma reta transversal ao plano π , então

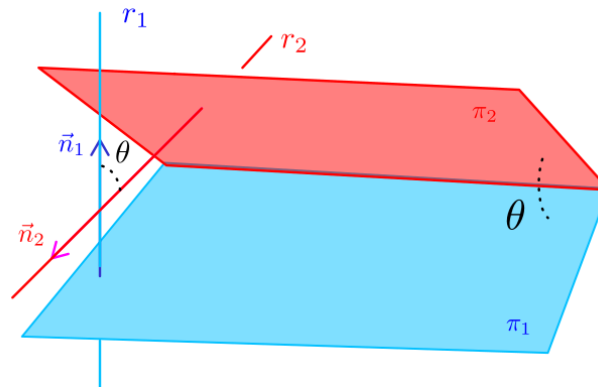
$$\sin(\text{ang}(r, \pi)) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{r}\| \|\vec{n}\|}, \quad (\text{Pad.2.2})$$

onde \vec{n} é um vetor normal a π .

Pad.2.3 Medida angular entre planos

Sejam π_1 e π_2 dois planos transversais em E^3 .

A **medida angular** (ou o **ângulo**) **entre π_1 e π_2** é a medida angular entre duas retas quaisquer r_1 e r_2 perpendiculares a π_1 e π_2 , respectivamente.



COMO CALCULAR O ÂNGULO ENTRE DOIS PLANOS?

- \vec{n}_1 um vetor normal ao plano π_1
- \vec{n}_2 um vetor normal ao plano π_2
- \vec{n}_1, \vec{n}_2 são vetores diretores de r_1 e r_2
- $\cos(\text{ang}(\pi_1, \pi_2)) = \cos(\text{ang}(r_1, r_2))$

Por (Pad.2.1),

se π_1 e π_2 são planos transversais, então

$$\cos(\text{ang}(\pi_1, \pi_2)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|}, \quad (\text{Pad.2.3})$$

onde \vec{n}_1 e \vec{n}_2 são vetores normais aos planos π_1 e π_2 , respectivamente.

Exemplo Pad.2.3. Ver Exercícios 56 e 57 em [Slide de Exercícios](#).

Pad.3 Distância

Pad.3.1 Entre dois pontos

A **distância entre dois pontos** $A = (x_1, y_1, z_1)_\Sigma$ e $B = (x_2, y_2, z_2)_\Sigma$ de E^3 é o número real

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

Se Σ é um sistema de coordenadas ortogonal, $d(A, B)$ pode ser calculada por (ver Proposição [R.1.3](#)):

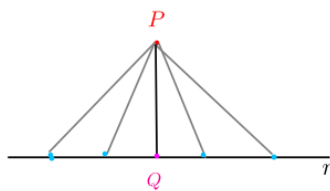
$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (\text{Pad.3.1})$$

Exemplo Pad.3.1. Ver Exercício [58](#) em [Slide de Exercícios](#).

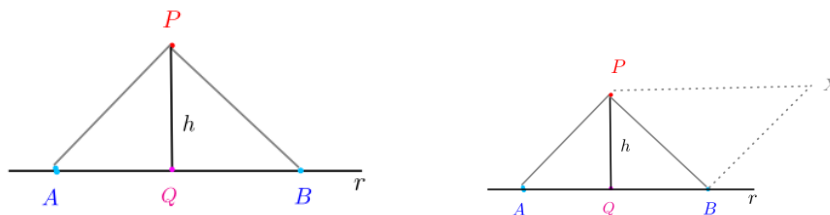
Pad.3.2 Entre um ponto e uma reta

Sejam P um ponto e r uma reta em E^3 tais que P não pertença a r .

Definição Pad.3.2. A **distância entre o ponto P e a reta r** , denotada por $d(P, r)$, é a menor das distâncias entre P e os pontos de r : é a distância de P ao ponto Q da projeção ortogonal de P a r .



COMO CALCULAR $d(P, Q)$?



- A e B pontos distintos de r
- Q a projeção ortogonal de P a r ($Q = r \cap s$, s única reta perpendicular a r passando por P)
- $h = d(P, Q) = ?$
- área do triângulo ABP é:

$$\frac{1}{2}h\|\overrightarrow{AB}\|$$

- área do paralelogramo $ABPX$ é $\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}\|$

$$area(\Delta ABP) = \frac{1}{2}area(paralelogramo\ ABXP)$$

Como $r := \overrightarrow{AB}$ é um vetor diretor de r , temos

se P é um ponto não pertencente a uma reta r em E^3 , então

$$d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{r}\|}{\|\vec{r}\|}, \quad (\text{Pad.3.2})$$

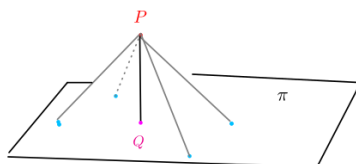
onde \vec{r} é um vetor diretor de r e A um ponto de r quaisquer.

Exemplo Pad.3.3. Ver Exercício 59 em [Slide de Exercícios](#).

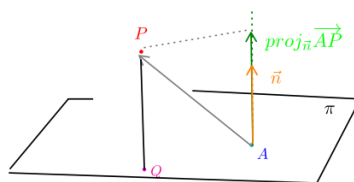
Pad.3.3 Entre um ponto e um plano

Sejam P um ponto e π um plano em E^3 tais que P não pertença a π .

Definição Pad.3.4. A **distância entre o ponto P e o plano π** , denotada por $d(P, \pi)$, é a menor das distâncias entre P e os pontos de π : é a distância de P ao ponto Q da projeção ortogonal de P a π .



COMO CALCULAR $d(P, \pi)$?



- A ponto qualquer de π
- Q a projeção ortogonal de P a π
- $d(P, \pi) = d(P, Q) = \|\text{proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{AP}\|$

Pela Proposição P.2.8,

se P é um ponto não pertencente a um plano π em E^3 , então

$$d(P, \pi) = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}, \quad (\text{Pad.3.3})$$

onde \vec{n} é um vetor normal a π e A um ponto de π quaisquer.

Em particular:

Se $\pi: ax + by + cz + d = 0$, $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $A = (x_1, y_1, z_1)$, então

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exemplo Pad.3.5. Ver Exercício 60 em [Slide de Exercícios](#).

Pad.3.4 Entre retas

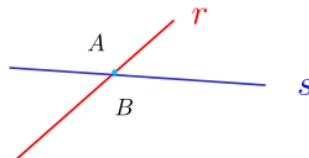
Sejam r e s duas retas em E^3 .

Definição Pad.3.6. A **distância entre a reta r e a reta s** , denotada por $d(r, s)$, é a menor das distâncias entre os pontos A de r e os pontos B de s .

- **Caso 1:**

Se r e s são concorrentes ou paralelas idênticas, então

$$d(r, s) = 0.$$

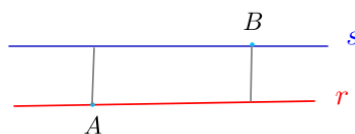


- **Caso 2:**

Se r e s são paralelas distintas, então

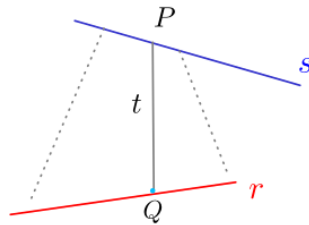
$$d(r, s) = d(A, s) = d(B, r) \stackrel{\text{Eq. Pad.3.2}}{=} \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{r}\|}{\|\vec{r}\|} = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{s}\|}{\|\vec{s}\|},$$

onde $A \in r$ e $B \in s$.

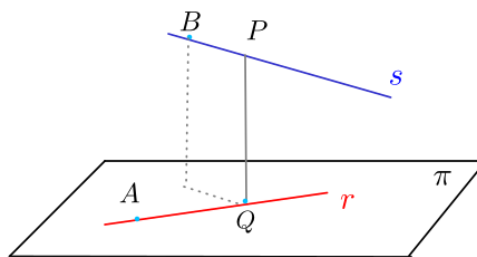


• **Caso 3:**

Se r e s são reversas, então $d(r, s)$ é a distância $d(P, Q)$, onde P e Q são os pontos de intersecção de r e s , respectivamente, com uma reta t perpendicular a r e s .



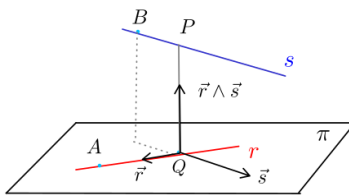
SE r E s SÃO REVERSAS, COMO CALCULAR $d(r, s) = d(P, Q)$?



- π plano que contém r e é paralelo a s
- B um ponto qualquer de s
- $d(P, Q) = d(B, \pi)$

PRECISAMOS DE UM PONTO EM π E UM VETOR NORMAL A π

- A um ponto qualquer de r ($\because A \in \pi$)
- \vec{r} vetor diretor de r
- \vec{s} vetor diretor de s
- \vec{r} e \vec{s} são LI (c.c., as retas seriam paralelas)
- $\vec{r} \wedge \vec{s}$ é vetor normal a π



Pela Equação [Pad.3.3](#),

se r e s são retas reversas, então

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{r} \wedge \vec{s}|}{\|\vec{r} \wedge \vec{s}\|}, \quad (\text{Pad.3.4})$$

onde \vec{r}, \vec{s} são vetores diretores, A, B são pontos quaisquer de r e s , resp..

Exemplo Pad.3.7. Ver Exercício [61](#) em [Slide de Exercícios](#).

Pad.3.5 Entre reta e plano

Sejam r uma reta e π um plano em E^3 .

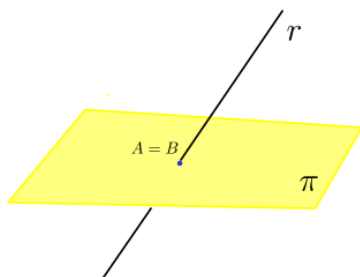
Definição Pad.3.8. A **distância entre a reta r e o plano π** , denotada por $d(r, \pi)$, é a menor das distâncias entre os pontos A de r e os pontos B de π .

COMO CALCULAR $d(r, \pi)$?

- \vec{r} vetor diretor de r e \vec{n} vetor normal a π :
- **Caso 1:**

Se r é transversal a π ($\vec{r} \cdot \vec{n} \neq 0$), então

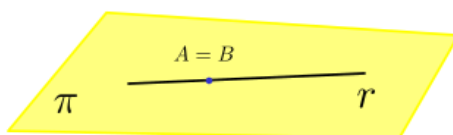
$$d(r, \pi) = 0.$$



- **Caso 2:**

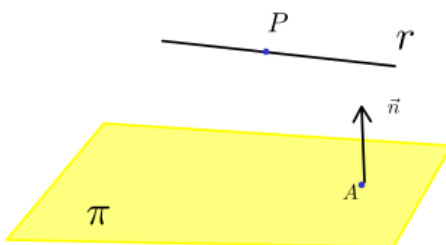
Se r está contida em π ($\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$), então

$$d(r, \pi) = 0.$$



- **Caso 3:**

Se r é paralela a π e $r \not\subset \pi$ ($\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$), então $d(r, \pi) = d(P, \pi)$, onde $P \in r$.



Pela Equação (Pad.3.3),

se r é paralela a π e $r \not\subset \pi$, então

$$d(r, \pi) = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}, \quad (\text{Pad.3.5})$$

onde A é um ponto de π , \vec{n} é vetor normal a π e P é um ponto de r .

Pad.3.6 Entre planos

Sejam π_1 e π_2 planos em E^3 .

Definição Pad.3.9. A **distância entre os planos π_1 e π_2** , denotada por $d(\pi_1, \pi_2)$, é a menor das distâncias entre os pontos A de π_1 e os pontos B de π_2 .

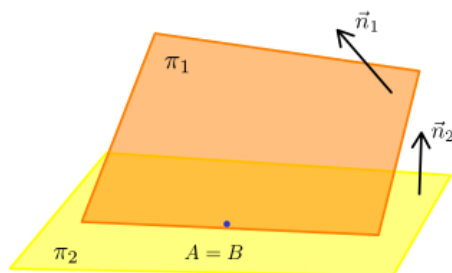
COMO CALCULAR $d(\pi_1, \pi_2)$?

- \vec{n}_1 e \vec{n}_2 vetores normais a π_1 e π_2 :

- **Caso 1:**

Se π_1 e π_2 são transversais (\vec{n}_1, \vec{n}_2 LI), então

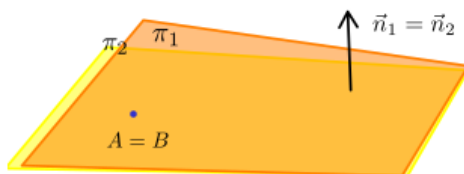
$$d(\pi_1, \pi_2) = 0.$$



- **Caso 2:**

Se π_1 e π_2 são idênticos (\vec{n}_1, \vec{n}_2 LD), então

$$d(\pi_1, \pi_2) = 0.$$



- **Caso 3:**

Se π_1 e π_2 são paralelos distintos (\vec{n}_1, \vec{n}_2 LD), então

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2) = d(Q, \pi_1),$$

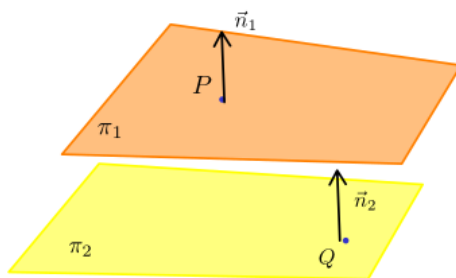
para quaisquer $P \in \pi_1$ ou $Q \in \pi_2$.

Pela Equação (Pad.3.3),

se π_1 e π_2 são paralelos distintos, então

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}, \quad (\text{Pad.3.6})$$

onde \vec{n} é um vetor normal a π_1 (ou π_2), P é um ponto de π_1 e Q um ponto de π_2 quaisquer.



Em particular (**Tarefa!**):

Se $P = (x_0, y_0, z_0)$ é um ponto de π_1 e

$$\pi_1: ax + by + cz + d_1 = 0, \quad \pi_2: ax + by + cz + d_2 = 0,$$

então

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Exemplo Pad.3.10. Ver Exercícios 62 a 65 em [Slide de Exercícios](#).