1 Integral de linha de função escalar

Sejam

- $f : A \to \mathbb{R}$ uma **função** de domínio $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- $\gamma : [a, b] \to A$ uma **curva regular e com derivada contínua**.
- C = traço de γ

Queremos definir a **integral de f ao longo de γ**.

1.1 Integral de linha com respeito ao comprimento de arco

********** Motivação (caso $n = 2$):**

Se $f \geq 0$, qual área da superfície vertical S que está acima de C, entre o plano xy e o gráfico de f?

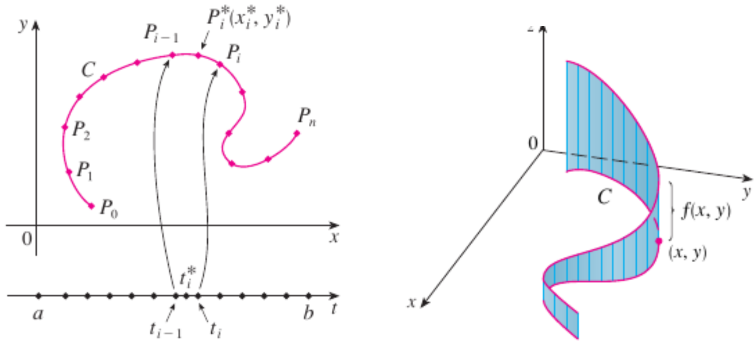


Figura 1: Stewart, Cáclulo, vol. 2: partição da curva e superfície S

- $P = \{t_0, ..., t_n : \ a = t_0 < t_1 < t_2 < .. < t_{n-1} < t_n = b\}$ partição de $[a, b]$:
- $\{P_i := \gamma(t_i) = (x(t_i), y(t_i)) : i = 0, \ldots, n\}$ partição de C
- $\Delta_i s$ = comprimento do subarco $\widehat{P_{i-1}P_i}$
- $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$; $\quad P_i^* = (x(t_i^*), y(t_i^*)) = \gamma(t_i^*)$
- $A(S) \approx \sum_{i=1}^n f(\gamma(t_i^*))\Delta_i s$

Como calcular o comprimento de subarco?

Note

- $\Delta_i s \approx |\overline{P_{i-1}P_i}|$
-

$$
\begin{aligned}
|\overline{P_{i-1}P_i}| &= \sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2} \\
&\underset{t_i^{**},t_i^{***}\in(t_{i-1},t_i)}{\overset{TVM}{=}} \sqrt{(x'(t_i^{**})\Delta_i t)^2+(y'(t_i^{***})\Delta_i t)^2} \\
&= \sqrt{(x'(t_i^{**}))^2+(y'(t_i^{***}))^2}\Delta_i t
\end{aligned}
$$

-

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_i^*))\Delta_i s &\approx \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_i^*))\sqrt{(x'(t_i^{**}))^2+(y'(t_i^{***}))^2}\Delta_i t \\
&\overset{t_i^{**},t_i^{***}\approx t_i^*}{\approx} \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_i^*))\sqrt{(x'(t_i^{*}))^2+(y'(t_i^{*}))^2}\Delta_i t
\end{aligned}
$$

****

Definição: **A integral de linha de f sobre γ** com respeito ao comprimento de arco é dada por

$$\int_\gamma \mathbf{f\,ds} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt}$$

OBS: a integral acima não depende da parametrização da curva quando a reparametrização é bijetora, isto é:

Se $\gamma_1 : [a,b] \to A$ e $\gamma_2 : [c,d] \to A$ são duas curvas com mesmo traço tais que

(R–C) existe uma função $g : [c,d] \to [a,b]$ (bijetora) de classe C^1 com $g' > 0$*: γ_1 e γ_2 mesma orientação* (ou $g' < 0$*: γ_1 e γ_2 orientação contrária*) em (c,d) e $\gamma_2(u) = \gamma_1(g(u))$,

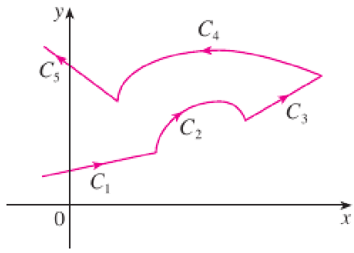
então

$$\int_{\gamma_1} f ds = \int_{\gamma_2} f ds.$$

OBS: se γ é parametrizada pelo comprimento de arco então

$$\int_\gamma f\, ds := \int_a^b f(\gamma(t))\, dt.$$

OBS: se γ é apenas regular por partes podemos somar em cada parte:



Suponha agora que C seja uma **curva suave por partes**; ou seja, C é a união de um número finito de curvas suaves $C_1, C_2, \ldots, C_n$ onde, como ilustrado na Figura 4, o ponto inicial de C_{i+1} é o ponto final de C_i. Nesse caso, definimos a integral de f ao longo de C como a soma das integrais de f ao longo de cada parte suave de C:

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_{C_1} f(x, y)\, ds + \int_{C_2} f(x, y)\, ds + \cdots + \int_{C_n} f(x, y)\, ds$$

Figura 2: Stewart, Cálculo, vol. 2

Interpretação geométrica:

- para $n \geq 2$,

$$\int_\gamma 1\, ds = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

  é o comprimento do traço de γ.

- se $n = 2$, $f \geq 0$,

$$\int_\gamma f\, ds$$

  é a área da superfície vertical que está acima do traço de γ, entre o plano xy e o gráfico de f.

1.2 Integral de linha com respeito a x_i

Sejam

- $f : A \to \mathbb{R}$ uma **função** de domínio $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- $\gamma : [a, b] \to A$ uma **curva regular e com derivada contínua**

  equações paramétricas de $\gamma : x_i = x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$

Nos estudos de integral de linha para **campos vetorias** será conveniente usar as seguintes integrais de linha: **a integral de linha de f sobre γ** com respeito a x_i é dada por

$$\int_\gamma f\, dx_i := \int_a^b f(\gamma(t))x_i'(t)\, dt, \quad i = 1, \ldots, n.$$

OBS: a integral acima não depende da parametrização da curva quando a reparametrização é bijetora, **exceto pela orientação**, que muda o sinal da integral, isto é:

Se γ_1 e γ_2 são duas curvas com mesmo como em (R–C) tais que:

- possuem a mesma orientação, então $\displaystyle\int_{\gamma_1} F \cdot d\gamma_1 = \int_{\gamma_2} F \cdot d\gamma_2$
- possuem orientação contrária, então $\displaystyle\int_{\gamma_1} F \cdot d\gamma_1 = -\int_{\gamma_2} F \cdot d\gamma_2$

Notação: para $n = 2, 3$,

$$\int_\gamma Pdx + Qdy := \int_\gamma Pdx + \int_\gamma Qdy$$

$$\int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz := \int_\gamma Pdx + \int_\gamma Qdy + \int_\gamma Rdz$$

Sugestão de Exercícios:

- Lista 4 do prof. Eugenio Massa: 1, 4, 5, 6, 7, 8.
- Listas no e-disciplinas: Integral de Linha de uma Função Escalar