Conteúdo

Lht.1 Regra de l´Hôpital

Teorema (Regra de l´Hôpital).
Sejam f, g deriváveis e $g'(x) \neq 0$ no conjunto $(p-\delta, p+\delta) \setminus \{p\}$.
Se

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} g(x) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} g(x) = \pm\infty$$

e

$$\exists \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L\,,$$

então

$$\exists \lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = L\,.$$

OBS:

- A regra de l'Hôpital vale se $L \in \mathbb{R}$ ou $L = +\infty$ ou $L = -\infty$;
- A regra de l'Hôpital vale também para limites do tipo $x \to p^{\pm}$ ou $x \to \pm\infty$.

Exemplo 1. Exercício 49 em Slides de Exercícios.

Lht.2 Polinômio de Taylor

Lembrando:

Se existe $f'(p)$ então a *reta tangente* ao gráfico de f em $(p, f(p))$ é dada pela função (ver Definição D.1.1)

$$T_p(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$$

e satisfaz

$$\mathbf{E_p(x) := f(x) - T_p(x) = o(x - p)} \text{ quando } \mathbf{x \to p}\,, \tag{Lht.2.1}$$

isto é,

$T_p(x)$ é o único polinômio de grau no máximo 1 que satisfaz (Lht.2.1) e tal que

$$T_p(p) = f(p), \qquad T_p'(p) = f'(p),$$

Pergunta 1) Se f é k vezes derivável em p, existe polinômio T de grau no máximo k tal que

$$T^{(j)}(p) = f^{(j)}(p) \text{ para todo j=0,...,k ?} \tag{Lht.2.2}$$

Caso $k = 2$:
Se existem $f'(p)$ e $f''(p)$, então existe polinômio T de grau no máximo 2 tal que

$$T^{(j)}(p) = f^{(j)}(p) \text{ para todo j=0,1,2 ?}$$

isto é, exitem $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e

$$T(x) = a_0 + a_1(x - p) + a_2(x - p)^2$$

tais que

$$T(p) = f(p), \quad \text{e} \quad T'(p) = f'(p), \quad \text{e} \quad T''(p) = f''(p)?$$

Caso $k = 2$:

- $T(x) = a_0 + a_1(x-p) + a_2(x-p)^2$ tal que:
  - $T(p) = f(p) \implies \boxed{a_0 = f(p)}$
  - $T'(p) = f'(p)$:

    $T'(x) = a_1 + 2a_2(x-p) \implies \boxed{a_1 = f'(p)}$
  - $T''(p) = f''(p)$:

    $T''(x) = 2a_2 \implies \boxed{a_2 = \dfrac{f''(p)}{2}}$

$$T^2_{f,p} = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2}(x-p)^2$$

Resposta 1) SIM: de fato, existe um único polinômio de grau <u>no máximo</u> k satisfazendo (Lht.2.2) que é dado por:

$$T^k_{f,p}(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(p)}{j!}(x-p)^j$$

$$T^k_{f,p}(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2}(x-p)^2 + \frac{f'''(p)}{3!}(x-p)^3 + \ldots + \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k\,,$$

chamado de **Polinômio de Taylor <u>de ordem</u> k, da função f, no ponto p**.

Pergunta 2) Vale uma propriedade análoga a propriedade (Lht.2.1):

$$f(x) - T_p(x) := E_p(x) = o(x-p) \text{ quando } x \to p$$

, para o polinômio de Taylor de ordem k?

CASO: POLINÔMIO DE TAYLOR DE ORDEM 2:

- $E_p(x) := f(x) - T^2_{f,p}$
- $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{E_p(x)}{x-p}$

$$\lim_{x\to p} \frac{E_p(x)}{x-p} = \lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p) - f'(p)(x-p) - \frac{f''(p)}{2}(x-p)^2}{x-p} = 0$$

- $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{E_p(x)}{(x-p)^2} = 0 \iff E_p(x) = o((x-p)^2), \quad x \to p$

$$\lim_{x\to p} \frac{E_p(x)}{(x-p)^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to p} \frac{1}{2}\frac{f'(x) - f'(p) - f''(p)(x-p)}{x-p} = 0$$

$T^2_{f,p}$ é o único polinômio de grau no máximo 2 tal que

$$f(x) - T^2_{f,p} = E_p(x), \quad \text{com} \quad \lim_{x\to p} \frac{E_p(x)}{(x-p)^2} = 0.$$

Resposta 2) SIM:

Teorema (P.d.T. com resto de Peano).
Se f é k vezes derivável em p, **então**

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-T^k_{f,p}(x)}{(x-p)^k}=0\,.$$

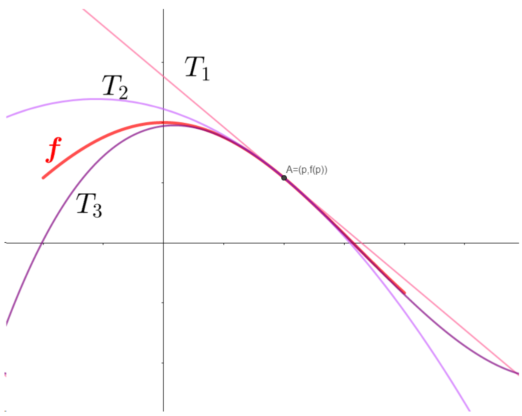
Em outras palavras,

$$\mathbf{E_p(x)} := \mathbf{f(x)} - \mathbf{T^k_{f,p}(x)} = \mathbf{o((x-p)^k)} \text{ quando } \mathbf{x} \to \mathbf{p}\,. \tag{Lht.2.3}$$

Além disso, $T^k_{f,p}(x)$ **é o único polinômio de grau no máximo k com esta propriedade**.

Nota.

1. $E_p(x)$ (que depende da ordem k) é o erro que se comete quando usamos o valor do polinômio de Taylor $T^k_{f,p}$ de ordem k avaliado em x, $T^k_{f,p}(x)$, para obter uma aproximação do valor da função f em x, $f(x)$.
2. Por (Lht.2.3), podemos inferir:
   (a) para $x \in D_f$, menor é o erro cometido na aproximação de $f(x)$ quanto maior é a ordem do polinômio de Taylor usado;
   (b) quanto mais próximo x está de p, menor é o erro cometido na aproximação de $f(x)$ quando utilizado um polinômio de Taylor de dada ordem.



Pergunta 3) Vale alguma propriedade sobre o erro E_p ? O erro é conhecido?

Caso: polinômio de Taylor de ordem 1: quem é $E_p(x)$?

- $E_p(x) = f(x) - T_p(x) = f(x) - f(p) - f'(p)(x-p)$
- $E_p'(x) = f'(x) - f'(p), \quad E_p''(x) = f''(x)$
- $h(x) := (x-p)^2$
- $h'(x) = 2(x-p); \quad h''(x) = 2$
- $\begin{cases} E_p(p) = 0 \\ E_p'(p) = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} h(p) = 0 \\ h'(p) = 0 \end{cases}$
- $$\frac{E_p(x)}{(x-p)^2} = \frac{E_p(x) - E_p(p)}{h(x) - h(p)} \underset{\exists x_1 \in (p,x)}{\overset{T.Cauchy}{=}} \frac{E_p'(x_1)}{h'(x_1)}$$
$$= \frac{E_p'(x_1) - E_p'(p)}{h'(x_1) - h'(p)} \underset{\exists \bar{x} \in (p,x_1)}{\overset{T.Cauchy}{=}} \frac{E_p''(\bar{x})}{h''(\bar{x})}$$
$$= \frac{f''(\bar{x})}{2} \Longrightarrow \boxed{E_p(x) = \frac{f''(\bar{x})}{2}(x-p)^2}$$

Resposta 3) SIM. NÃO

Teorema (P.d.T. com resto de Lagrange).
Se, para um $\delta > 0$, f é $k+1$ vezes derivável em $V_\delta(p)$, **então dado $x \in V_\delta(p) \setminus \{p\}$ existe $c_x \in (p,x)$ (resp. $c_x \in (x,p)$ se $x < p$) tal que**

$$E_p^{k+1}(x) := f(x) - T_{f,p}^k(x) = \frac{f^{(k+1)}(c_x)}{(k+1)!}(x-p)^{k+1}.$$

Nota.

1. Os polinômios de Taylor podem ser usados para dar aproximações dos valores da função numa vizinhança de um dado ponto p:
$$f(x) \approx T^k_{f,p}(x), \quad x \approx p.$$
2. Se $k = 0$, o Teorema do P. de Taylor com resto de Lagrange é o T.V.M:
$$f(x) - T^0_{f,p}(x) = f(x) - f(p) = \frac{f'(c)}{1}(x - p).$$
3. Se as derivadas até ordem $k+1$ de f são limitadas numa vizinhança de p, podemos usar o Teorema do P. de Taylor com resto de Lagrange para ter **uma estimativa do erro** E^{k+1}_p:

Se $|f^{(k+1)}(x)| \leq M$, para todo $x \in V_\delta(p) \setminus \{p\}$, então
$$|E^{k+1}_p(x)| \leq \frac{M}{(k+1)!}|x - p|^{k+1}, \quad x \in V_\delta(p) \setminus \{p\},$$

Exemplo 2. Exercício 50 em Slides de Exercícios.

Lht.2.1 Alguns exemplos de Polinômio de Taylor

$\sin(x)$ com T^1, T^3, T^5, T^7, T^{13}
$\ln(x)$ com T^1, T^4, T^7, T^{10}
zoom $\ln(x)$ com T^1, T^4, T^7, T^{10}, T^{13}