

Conteúdo

F1 Medida e integração em três páginas	Aula 20	F2
F1.1 Resultados importantes		F5
F1.2 Produtos de medidas. Tonelli e Fubini.		F6
F1.3 Algumas definições		F6
F2 Espaços L^p		F7
	Aula 21	F12
F3 Convexidade, reflexividade, representação de Riesz		F16
F3.1 Demonstrações		F21
F3.1.1 1a. Desigualdade de Clarkson		F21
F3.1.2 Demonstração $T : L^{p'} \rightarrow (L^p)^*$ é isom. isom. (sobrejetor)		
Aula 22		F22
F4 Densidade, separabilidade	Aula 23	F31
F5 Particularidades de L^1 e L^∞		F40
F6 Convolução	cont. Aula 28	F44
F6.1 Sequência regularizante		F48
F7 Compactos em L^p: Fréchet-Kolmogorov		F52

F1 Medida e integração em três páginas

Aula 20

Tarefa

Leia a introdução do capítulo 4 e seção 4.1 (pag.89..91) do [Bre11].

Dado um conjunto Ω ,

- uma σ -álgebra em Ω é uma família não vazia $\mathcal{M}$ de subconjuntos de Ω , fechada por complementação e por reunião enumerável (logo contém $\emptyset$, Ω e é fechada por interseções enum.).

$$(a) \emptyset \in \mathcal{M}$$

$$(b) A \in \mathcal{M} \implies X \setminus A \in \mathcal{M}$$

$$(c) A_n \in \mathcal{M}, n \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$$

- os elementos de $\mathcal{M}$ são chamados de conjuntos mensuráveis
- Se X é um espaço topológico, a σ -álgebra $\mathcal{B}_X$ gerada pelos conjuntos abertos em X é chamada σ -álgebra de Borel em X .
- uma medida é uma função $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ tal que
 - i) $\mu(\emptyset) = 0$
 - ii¹) $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$.
- a medida é
 - * completa, se $E \subseteq F \in \mathcal{M}$ com $\mu(F) = 0$ implica $E \in \mathcal{M}$
 - * finita se $\mu(\Omega) < \infty$
 - * σ -finita se Ω é reun. enum. de conjuntos de medida finita
- A medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$ é construída de forma que seja completa e que a medida dos (multi)retângulos seja sua (multi)área.
- $(\Omega, \mathcal{M})$ é um espaço mensurável, e $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaço de medida

¹União de uma família $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ de conjuntos disjuntos em $\mathcal{M}$

¹Como consequência vale $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$ e também $A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$.

- Sejam $(X, \mathcal{M})$ e $(Y, \mathcal{N})$ espaços mensuráveis. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é **mensurável** se $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ para todo $E \in \mathcal{N}$.
 - Se $(Y, \mathcal{N})$ é $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, uma *condição equivalente* é $f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{M}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
 - *mensurabilidade é preservada* por soma, produto, supremo pontual, limite pontual.

(a) f, g mensuráveis $\implies f + g$ e fg são mensuráveis

(b) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mensuráveis $\implies \sup_n f_n(x)$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ são mensuráveis

- Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável. Uma **função simples** (a valores reais) é uma combinação linear finita de funções características de elementos de $\mathcal{M}$:

$$\phi : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \phi(x) = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{E_j}(x), \quad x \in X, a_j \in \mathbb{R}, E_j \in \mathcal{M}.$$

Funções mensuráveis podem ser aproximadas por funções simples:

Proposição F1.1. *Se $f : X \rightarrow [0, \infty]$ é mensurável, existe uma sequência $\{\phi_n\}$ de funções simples tais que $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots \leq f$, $\phi_n \rightarrow f$ pontualmente e $\phi_n \rightarrow f$ uniformemente em qualquer subconjunto onde f é limitada.* $\triangleleft$

Proposição. *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável, existe uma sequência $\{\phi_n\}$ funções simples tais que $0 \leq |\phi_1| \leq |\phi_2| \leq \dots \leq |f|$, $\phi_n \rightarrow f$ pontualmente e $\phi_n \rightarrow f$ uniformemente em qualquer subconjunto onde f é limitada.* $\triangleleft$

$$f = f^+ - f^-$$

Proposição F1.2. *[Fol99, Th.2.10] Se $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ é mensurável, existe uma sequência $\{\phi_n\}$ funções simples tais que $0 \leq |\phi_1| \leq |\phi_2| \leq \dots \leq |f|$, $\phi_n \rightarrow f$ pontualmente e $\phi_n \rightarrow f$ uniformemente em qualquer subconjunto onde f é limitada.* $\triangleleft$

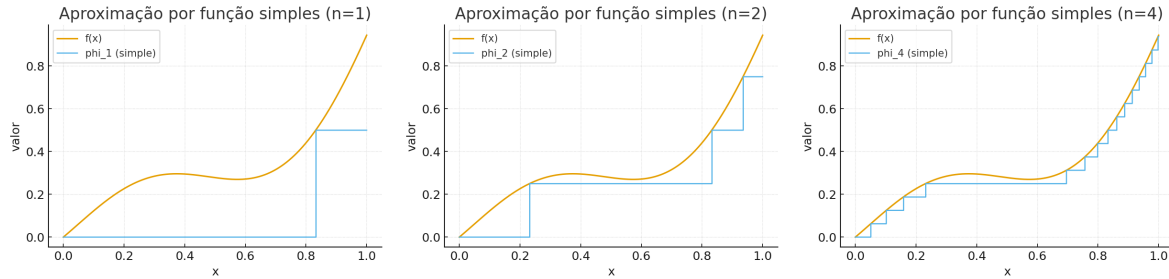


Figura 1: $f(x) = x^2 + 0.2 \sin(6x)$, $x \in [0, 1]$

$$E_n^K := f^{-1}\left(\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right), \quad F_n = f^{-1}((n, \infty))$$

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \chi_{E_n^K}(x) + n \chi_{F_n}(x) = \begin{cases} \frac{k}{2^n}, & \text{se } \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \\ n, & \text{se } f(x) \geq n. \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots, n2^n - 1),$$

- Seja $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. A **integral** (em Ω) de uma função mensurável $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, com respeito à medida μ :

$$\int_{\Omega} f \, d\mu,$$

é definida² aproximando f por funções simples ϕ e definindo

$$\int_{\Omega} \phi \, d\mu = \sum_{j=1}^N a_j \mu(E_j).$$

$$\int_{\Omega} (f + g) \, d\mu = \int_{\Omega} f \, d\mu + \int_{\Omega} g \, d\mu \quad [\text{Fol99, Capítulo 2}]$$

$$f \leq g \text{ q.s.} \implies \int_{\Omega} f \leq \int_{\Omega} g$$

- Importante: *Funções Riemann-integráveis (em sentido próprio) são Lebesgue-integráveis e a integral coincide.*³

$$\int_{\Omega} |f| < \infty \text{ e } \mu(E) = 0 \implies \int_E f = 0$$

²Precisa um pouco de cuidado: a definição é feita antes para funções não negativas, depois estendida a funções reais ou complexas separando $\Re(f)^{\pm}$ e $\Im(f)^{\pm}$.

³As impróprias absolutamente integráveis podem ser definidas diretamente como integrais Lebesgue; as não abs.int. ainda precisam ser definidas por limite

F1.1 Resultados importantes

Definição F1.3. Se f, g são mensuráveis, dizemos que $f = g$ quase toda parte (q.t.p.) [almost everywhere: a.e.] [quase sempre: q.s.] se

$$\mu(\{f \neq g\}) = 0.$$

Analogamente dizemos que uma propriedade acontece q.t.p se acontece exceto num conjunto de medida nula. ★

Teorema F1.4 [da Convergência Monótona]. Se $\{f_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis tal que $0 \leq f_j \leq f_{j+1}$ q.t.p. para todo j , e $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n (= \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j)$, então

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

◁

Proposição F1.5. Se $f \geq 0$ e mensurável, então

- $\int f \, d\mu = 0$ se e somente se $f = 0$ q.t.p.
- se $\int f \, d\mu < \infty$, então $\{x : f(x) = \infty\}$ é um conjunto de medida nula ($f < \infty$ q.t.p.) e $\{x : f(x) > 0\}$ é σ -finito.

◁

Lema F1.6 [de Fatou]. Se $\{f_n\}$ é qualquer sequência de mensuráveis com $f_n \geq 0$, então

$$\int (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n) \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

◁

Teorema F1.7 [da Convergência Dominada]. ⁴ Seja $\{f_n\}$ uma sequência em $L^1(\mu)$ tal que

- (a) $f_n \rightarrow f$ q.t.p.,
 (b) existe $g \in L^1(\mu)$ tal que $|f_n| \leq g$ q.t.p. para todo n .

Então $f \in L^1(\mu)$ e

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \quad \text{i.e., } \|f_n - f\|_1 \rightarrow 0.$$

◁

⁴Vale para $1 \leq p < \infty$: $\{f_n\} \subset L^p(\mu)$; $f_n \rightarrow f$ q.t.p e $\exists g \in L^p(\mu)$ com $|f_n| \leq g$ q.t.p. para todo n . Então $f \in L^p(\mu)$ e $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.

F1.2 Produtos de medidas. Tonelli e Fubini.

É também possível definir **produtos de medidas** (no produto dos conjuntos) e calcular integrais no produto como integrais iteradas:

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) &= \int_X \left[\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right] d\mu(x) \\ &= \int_Y \left[\int_X f(x, y) d\mu(x) \right] d\nu(y) \end{aligned} \quad (\text{F1.1})$$

Em particular:

Teorema F1.8 [de Fubini-Tonelli]. *[Fol99, p.67] Suponha que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ são espaços de medida σ -finitos.*

- a) (Tonelli) Se $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ é mensurável, então as funções $g(x) = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ e $h(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$ são mensuráveis e vale (F1.1).
- b) (Fubini) Se $f \in L^1(X \times Y)$, então $f(x, \cdot) \in L^1(Y)$ para quase todo $x \in X$, $f(\cdot, y) \in L^1(X)$ para quase todo $y \in Y$, as funções definidas quase sempre $g(x) = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ e $h(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$ estão em $L^1(X)$ e $L^1(Y)$, respectivamente, e vale (F1.1). $\triangleleft$

F1.3 Algumas definições

Definição F1.9. Definimos a função de truncamento

$$T_n(z) = \frac{z}{|z|} \min\{n, |z|\}, \quad n \in \mathbb{N};$$

Note que $T_n \circ f \rightarrow f$ pontualmente e $|T_n \circ f| \leq |f|$ ★

Definição F1.10. O **suporte** $\text{supp}(f)$ de uma função $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ é o menor fechado F tal que $f \equiv 0|_{\Omega \setminus F}$ (*equivalentemente*, $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$).

Dizemos que f tem **suporte compacto** em Ω se existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $f \equiv 0$ em $\Omega \setminus K$.

O espaço das funções contínuas a suporte compacto em Ω é indicado por

$$\mathcal{C}_c(\Omega)$$

★

F2 Espaços L^p

Lembrete (veja exemplo [A3.8](#))

Dado espaço de medida (completa) (Ω, Σ, μ) definimos

$$\boxed{L^p(\Omega, \Sigma, \mu) = L^p(\Omega)} = \left\{ [f] : f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \text{ mensuravel} : \|f\|_p < \infty \right\}$$

onde $[f]$ é a classe de equivalência de f com respeito à relação de equivalência “ $f \sim g$ se $f = g$ q.t.p.”,

$$\boxed{\|f\|_p} := \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} & \text{se } p \geq 1 \\ \|f\|_{\infty} := \sup_{x \in \Omega} |f(x)| & \end{cases}$$

é uma norma, onde

$$\sup_{x \in \Omega} g(x) := \inf \{ C \in \mathbb{R} : g \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega \}.$$

Lema F2.1 [Hölder]. Sejam $p, q \geq 1$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($p = 1, q = \infty$ e v.v.). Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad \triangleleft$$

Lema F2.2 [Minkowski]. Seja $p \in [1, \infty]$. Se $f, g \in L^p(\Omega)$ então $f + g \in L^p(\Omega)$ e

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad \triangleleft$$

Observação F2.3. Podemos definir L^p também com $0 < p < 1$: é um espaço vetorial mas $\|\cdot\|_p$ não é uma norma.

De fato vale, para $a, b \geq 0$,

$$a^p + b^p \leq (a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p), \quad p \in [1, \infty). \quad (\text{F2.1})$$

$$2^{p-1}(a^p + b^p) \leq (a + b)^p \leq (a^p + b^p), \quad p \in (0, 1) \quad (\text{F2.2})$$

com desigualdades estritas se $a, b > 0$. ★

Observação F2.4. $\mathbb{K}^n$ e ℓ_p podem ser vistos como casos particulares de $L^p(\Omega)$, em que $\Omega = \mathbb{N}$ (ou menos) com $P(\mathbb{N})$ sendo a σ -álgebra e com a medida μ de contagem: $L^p(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \mu) = \ell_p$ e $L^p(\Omega = \{1, \dots, N\}, P(\Omega), \mu) = (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_p)$

Ω conjunto, $P(\Omega)$ é uma σ -álgebra e a medida de contagem $\mu : P(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$ é dada por ($|A|$ = cardinalidade de A)

$$\mu(A) := \begin{cases} |A| & \text{se } A \text{ é finito} \\ +\infty & \text{se } A \text{ é infinito} \end{cases}$$

A medida de contagem é σ -finita se só se Ω é enumerável. Ainda, a medida de contagem é completa.

$$f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty) : n \mapsto f(n) = f_n, \quad \int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} f_n \quad \star$$

Observação F2.5 (Algumas obs. simples).

- Se $\mu(\Omega) < \infty$ então $L^p(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < p \leq \infty$ (inclusão contínua: $\|f\|_q \leq \mu(\Omega)^{1/q-1/p} \|f\|_p$).
- Se μ é medida de contagem então $L^p(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ para $1 \leq p < q \leq \infty$ (inclusão contínua). ★

Exercícios

Exercício F2.6. Prove que $\|\cdot\|_{\infty}$ é mesmo uma norma. ★
Ainda, $|f(x)| \leq \|f\|_{\infty}$ q.s., $\forall f \in L^{\infty}$.

Exercício F2.7. Prove as desig. (F2.1)-(F2.2), calculando a imagem da função $\frac{(1+x)^p}{1+x^p}$, $x \in [0, \infty)$. Conclua que $L^p(\Omega)$ é e.v. $\forall p \in (0, \infty]$ ★

Exercício F2.8. Se $p \in (0, 1)$, então $\|\cdot\|_p$ não é uma norma em $L^p(\Omega)$, sempre que existam $A, B \in \Sigma$ tais que $A \cap B \neq \emptyset$ com medidas positivas, finitas e distintas. ★

Exercício F2.9. Prove as afirmações da Obs. F2.5. Prove com exemplos a necessidade da condição $\mu(\Omega) < \infty$ e que podem não valer as inclusões inversas. ($X \subseteq Y$ com inclusão contínua significa que existe $C > 0$: tal que $\|\cdot\|_Y \leq C \|\cdot\|_X$). ★

Prova da Desigualdade de Hölder **F2.1.** $p, q \in [1, \infty]$ conjugados, $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega) \implies fg \in L^1(\Omega)$ e $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Caso 1: $p = 1$ e $q = \infty$

$$\bullet f \in L^1(\Omega) \implies \int_{\Omega} |f| < \infty$$

$$\bullet g \in L^\infty(\Omega) \implies |g(x)| \leq \|g\|_\infty \text{ q.s. em } \Omega \quad (\text{Ex. F2.6})$$

$$|fg| \leq |f| \|g\|_\infty \text{ q.s.} \implies \int_{\Omega} |fg| \leq \left(\int_{\Omega} |f| \right) \|g\|_\infty < \infty$$

$$\therefore fg \in L^1(\Omega), \quad \text{e} \quad \|fg\|_1 = \int_{\Omega} |fg| \leq \left(\int_{\Omega} |f| \right) \|g\|_\infty = \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

Caso 2: $1 < p < \infty$

$$\bullet \|f\|_p = 0 \implies f = 0 \text{ q.s.} \implies fg = 0 \text{ q.s.}$$

$$\|fg\|_1 = \int_{\Omega} |fg| = 0 = \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

$$\bullet \text{ análogo se } \|g\|_p = 0$$

$$\bullet \|f\|_p, \|g\|_p \neq 0$$

Lema Hölder (para soma) **A2.5:** Sejam $p, q > 1$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,

$$xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q \quad \forall x, y \geq 0$$

$$\bullet x = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \text{ e } y = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}:$$

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}, \quad \text{q.t. } x \in \Omega \implies \frac{\int_{\Omega} |f(x) g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

□

Prova da Desigualdade de Minkowski F2.2. $p \in [1, \infty]$, $f, g \in L^p(\Omega) \implies f + g \in L^p(\Omega)$ e $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

- $f + g \in L^p(\Omega) \forall p$ (L^p é e.v.)

Caso 1: $p = 1$ segue diretamente de

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

Caso 2: $p = \infty$

- $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \underbrace{\|f\|_\infty + \|g\|_\infty}_C, \quad q.s. \quad (\text{Ex. F2.6})$

$$\|f + g\|_\infty = \inf\{C \in \mathbb{R} : |f(x) + g(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\} \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Caso 3: $1 < p < \infty$:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int |f + g|^{p-1} |f + g| \leq \int \underbrace{|f + g|^{p-1}}_{\in L^q} \underbrace{|f|}_{\in L^p} + \int |f + g|^{p-1} |g| \\ &\stackrel{\text{Holder}}{\leq} \|(f + g)^{p-1}\|_q \|f\|_p + \|(f + g)^{p-1}\|_q \|g\|_p \end{aligned}$$

$$\|(f + g)^{p-1}\|_q = \left(\int |f + g|^{(p-1)q} \right)^{1/q} = \left(\int |f + g|^p \right)^{1-1/p} = \left[\left(\int |f + g|^p \right)^{1/p} \right]^{p-1}$$

$$\therefore \|f + g\|_p^p \leq \|(f + g)\|_p^{p-1} (\|f\|_p + \|g\|_p)$$

□

Teorema F2.10 [Fischer-Riesz]. L^p é um espaço de Banach para todo $p \in [1, \infty]$. $\triangleleft$

Demonstração.

Caso 1: $p = \infty$

- $\{f_n\}$ é de Cauchy em $L^\infty(\Omega)$, i.e., $\|f_n - f_m\|_\infty \rightarrow 0, \forall m, n$

Queremos: $\exists g \in L^\infty(\Omega); \forall \varepsilon > 0, \|f_n - g\|_\infty \leq \varepsilon, n \geq n_0$
 $\iff |f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon \text{ q.s. em } \Omega, n \geq n_0$

- $\exists E_n \in \Sigma$ com $\mu(E_n) = 0; |f(x)| \leq \|f\|_\infty, x \in \Omega \setminus E_n$ $(f_n \in L^\infty(\Omega))$

- $\exists E_{n,m} \in \Sigma$ com $\mu(E_{n,m}) = 0;$ $(f_n, f_m \in L^\infty(\Omega))$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty, \quad x \in \Omega \setminus E_{n,m}$$

- $E := (\bigcup_{n=1}^\infty E_n) \cup (\bigcup_{m,n=1}^\infty E_{n,m})$

- $E \in \Sigma$ e $\mu(E) = 0$

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty, \quad x \in \Omega \setminus E, \quad \forall n$$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty, \quad x \in \Omega \setminus E, \quad \forall n, m$$

- $f_n|_{\Omega \setminus E} \in B(\Omega \setminus E)$ (conjunto das funções limitadas)

-

$$\|f_n|_{\Omega \setminus E} - f_m|_{\Omega \setminus E}\| = \sup_{x \in \Omega \setminus E} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \rightarrow 0, \forall m, n$$

- $\{f_n|_{\Omega \setminus E}\}$ é de Cauchy em $B(\Omega \setminus E)$

Exemplo [Espaço das funções limitadas] A3.18: Sejam X um conjunto não vazio e $B(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ é limitada}\}$

$$(B(X), \|\cdot\|), \quad \text{onde } \|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|, \quad \text{é Banach}$$

- $\{f_n|_{\Omega \setminus E}\}$ é convergente em $B(\Omega \setminus E)$, i.e., $\exists f \in B(\Omega \setminus E)$;

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0; \quad \|f_n|_{\Omega \setminus E} - f\| \leq \varepsilon, \quad n \geq n_0$$

- f é mensurável (lim. de mensuráveis)

$$\bullet \text{ } g : \Omega \rightarrow \mathbb{K} : x \mapsto g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega \setminus E \\ 0, & x \in E \end{cases}$$

- $g \in L^\infty(\Omega)$:

$$|g(x)| = |f(x)| \leq cte, \quad q.s. \implies \|g\|_\infty \leq cte$$

- $|f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ q.s. em Ω , $n \geq n_0$

$$|f_n(x) - g(x)| \stackrel{x \in \Omega \setminus E}{=} |f_n|_{\Omega \setminus E}(x) - f(x)| \leq \|f_n|_{\Omega \setminus E} - f\| \leq \varepsilon, \quad n \geq n_0, \quad q.s.$$

Caso 2: $1 \leq p < \infty$

Aula 21

- $\{f_n\}$ é de Cauchy em $L^p(\Omega)$, i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0; \|f_n - f_m\|_p \leq \varepsilon, \quad \forall m, n \geq n_0$$

Queremos mostrar que $\{f_n\}$ é convergente em $L^p(\Omega)$

Basta encontrar subsequência $\{f_{n_k}\}$ convergente em $L^p(\Omega)$

Exercício A2.2. Seja (X, d) um espaço métrico e $(x_n) \subset X$ uma sequência.
(b) se (x_n) é de Cauchy e alguma subsequência dela é convergente, então a sequência inteira é convergente.

- para cada $k \in \mathbb{N}$ tome $n_k < n_{k+1}$; $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p \leq \frac{1}{2^k}$

$$\text{- escolha } n_1; \quad \|f_n - f_m\|_p \leq \frac{1}{2}, \quad \forall m, n \geq n_1 \quad (\because n = n_1, m = n_2)$$

$$\text{- escolha } n_2 > n_1; \quad \|f_n - f_m\|_p \leq \frac{1}{2^2}, \quad m, n \geq n_2 \quad (n = n_2, m = n_3)$$

$$\text{- escolha } n_3 > n_2; \quad \|f_n - f_m\|_p \leq \frac{1}{2^3}, \quad \forall m, n \geq n_3$$

Queremos mostrar que $\{f_{n_k}\}$ é convergente em $L^p(\Omega)$, i.e.,
 $\exists f \in L^p(\Omega); \|f_{n_k} - f\|_p \rightarrow 0$

Af. 1. $\{f_{n_k}(x)\} \subset \mathbb{K}$ é de Cauchy q.t.p. $x \in \Omega$

- $\{f_{n_k}(x)\}$ converge q.s. , i.e., ($\mathbb{K}$ completo)
 $\exists E \in \Sigma$ com $\mu(E) = 0$; $f_{n_k}(x) \rightarrow \tilde{f}(x), \forall x \in \Omega \setminus E$
- $\boxed{f(x)} := \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = \tilde{f}(x), & x \in \Omega \setminus E \\ 0, & x \in E \end{cases}$
- $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ q.s. em Ω

Af. 2. $\exists h \in L^p(\Omega); |f_{n_k}| \leq h$, q.s. em $\Omega, \forall k$

Teorema da Convergência Dominada F1.7. Seja $\{f_n\} \subset L^p(\mu)$ tal que
 (a) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$,
 (b) existe $h \in L^p(\mu)$ tal que $|f_n| \leq h$ q.t.p. para todo n . Então $f \in L^p(\mu)$ e $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.

- $\boxed{f \in L^p(\mu) \text{ e } \|f_{n_k} - f\|_p \rightarrow 0}$

Considere $g_n, g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ definidas por

$$g_n(x) := \sum_{k=1}^n |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$$

$$g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$$

- g_n e g são funções mensuráveis

Se $\int g^p d\mu < \infty$ ($g \in L^p(\Omega)$), então $g^p < \infty$ q.s. e portanto $g < \infty$ q.s..

Proposição F1.5. Se $f \geq 0$, mensurável e $\int f d\mu < \infty$, então $\{x : f(x) = \infty\}$ é um conjunto de medida nula ($f < \infty$ q.t.p.)

MAIS AINDA, isso implica que:

a série $\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$ converge q.s.,

ou seja,

a sequência das somas parciais $g_n(x)$ converge (e portanto é de Cauchy) q.s..

Dai,

$$\bullet \forall \varepsilon > 0, \exists n_0; m \geq n \geq n_0 \implies |g_m(x) - g_n(x)| < \varepsilon, \quad q.s.$$

Prova da Af. 1.: $\{f_{n_k}(x)\} \subset \mathbb{K}$ é de Cauchy q.s.

- para $m > n \geq n_0$ temos

$$\begin{aligned} |f_{n_m}(x) - f_{n_n}(x)| &\leq |f_{n_m}(x) - f_{n_{m-1}}(x)| + \dots + |f_{n_{n+1}}(x) - f_{n_n}(x)| \\ &= \sum_{k=n}^{m-1} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| = |g_{m-1}(x) - g_n(x)| < \varepsilon \quad q.s. \end{aligned}$$

- $\int g^p d\mu < \infty$, i.e., $g \in L^p(\Omega)$

$$\int g^p d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n^p d\mu \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n^p d\mu$$

Teorema da Convergência Monótona F1.4.

Se $\{h_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis tal que $0 \leq h_n \leq h_{n+1}$ q.t.p. para todo n , e $h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$, então

$$\int h d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n d\mu.$$

- $0 \leq g_n \leq g_{n+1}$ q.t.p. para todo n
- $0 \leq g_n^p \leq g_{n+1}^p$ q.t.p. para todo n ($1 \leq p < \infty$)
- $\int g^p d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n^p d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_p^p$ (TCM)

$$\begin{aligned} \|g_n\|_p &= \left\| \sum_{k=1}^n |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \right\|_p \stackrel{D.Minkowski}{\leq} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \leq 1 \end{aligned}$$

$$\therefore g^p < \infty \text{ q.s.} \implies g < \infty \text{ q.s.}$$

Prova da Af. 2.: $\exists h \in L^p(\Omega); |f_{n_k}| \leq h$, q.s. em Ω , $\forall k$

- $|f_{n_m}(x) - f_{n_k}(x)| \leq |g_{m-1}(x) - g_k(x)| \quad \forall m, k, \quad \forall x \in \Omega$
- $m \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f_{n_k}(x)| &\leq |g(x) - g_k(x)| \leq |g(x)| + |g_k(x)| \\ &\leq 2g(x), \text{ q.s. } \quad \forall k \end{aligned}$$

$$\therefore |f(x)| \leq \underbrace{2g(x) + |f_{n_k}(x)|}_{\in L^p(\Omega)} \text{ q.s.} \implies f \in L^p(\Omega)$$

$$\therefore |f_{n_k}(x)| \leq |f_{n_k}(x) - f(x)| + |f(x)| \leq \underbrace{2g(x) + |f(x)|}_{h \in L^p(\Omega)}, \quad \text{q.s.}, \quad \forall k$$

□

Proposição F2.11 [“Recíproca” da conv. dominada]. Se $p \in [1, \infty]$ e $f_n \rightarrow f$ em $L^p(\Omega)$, então existe uma subsequência f_{n_k} que converge q.t.p. e é dominada, ou seja, existe $h \in L^p(\Omega)$:

- $f_{n_k} \rightarrow f$ q.t.p.
- $|f_{n_k}| \leq h$ q.t.p.

◁

Demonstração. Exercício.^[Bre11, p.94-95] (usa a construção da prova do Teorema de Fischer-Riesz F2.10) □

Teorema da Convergência Dominada F1.7. Sejam $p \in [1, \infty)$ e $\{f_n\} \subset L^p(\mu)$ tal que

- (a) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$,
- (b) existe $h \in L^p(\mu)$ tal que $|f_n| \leq h$ q.t.p. para todo n . Então $f \in L^p(\mu)$ e $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.

F3 Convexidade, reflexividade, representação de Riesz

Teorema F3.1.

- L^p é **unif. convexo** e **reflexivo** para $p \in (1, \infty)$.
- L^p **não é reflexivo** para $p = 1$ e $p = \infty$ (exceto casos “triviais”)^[S.F5]

◁

Teorema F3.2.

- $(L^p)^*$ é isometricamente isomorfo a $L^{p'}$, para $p \in (1, \infty)$.
- $(L^1)^*$ é isometricamente isomorfo a L^∞ , desde que a medida seja σ -finita.
- $(L^\infty)^*$ contém um subespaço isometricamente isomorfo a L^1 . O subespaço é próprio (exceto casos “triviais”).

◁

Lema F3.3 [1a des. de Clarkson]. *Sejam $a, b \in \mathbb{K}$ e $2 \leq p < \infty$. Então*

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \leq \frac{|a|^p + |b|^p}{2}. \quad (\text{F3.1})$$

Logo, se $f, g \in L^p(\Omega)$, $2 \leq p < \infty$, então

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{2} \|g\|_{L^p}^p. \quad (\text{F3.2})$$

◁

Corolário F3.4. L^p é *u.c. para $p \in [2, \infty)$* .

◁

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0; \quad f, g \in \overline{B^{L^p}}, \quad \text{e} \quad \|f - g\|_p \geq \epsilon \quad \xRightarrow{?} \quad \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p \leq 1 - \delta. \\ \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p \leq \frac{1}{2} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{2} \|g\|_{L^p}^p - \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^p \leq 1 - \frac{1}{2^p} \epsilon^p =: (1 - \delta)^p \end{aligned}$$

Corolário F3.5. L^p é *reflexivo para $p \in [2, \infty)$* .

◁

$$L^p \text{ Banach (T. FR F2.10) + u.c (C. F3.5)} \xrightarrow{T.MPE3.3} L^p \text{ reflexivo}$$

Lema F3.6. *Sejam p e p' conjugados.*

$$T : L^{p'} \rightarrow (L^p)^* : u \mapsto [Tu = \phi_u : f \in L^p \mapsto \phi_u(f) = \int_{\Omega} fu]$$

é uma isometria (linear) para $p \in (1, \infty)$.

O mesmo vale para $p = 1$ se a medida é σ -finita e vale para $p = \infty$. $\triangleleft$

Corolário F3.7. $L^{p'}$ é reflexivo para $p' \in (1, 2]$. $\triangleleft$

- $p \in [2, \infty) \xrightarrow{C.F3.5} L^p$ reflexivo $\xrightarrow{P.E1.3} (L^p)^*$ reflexivo

Prop. E1.3. X reflexivo $\implies X^*$ é reflexivo.

- T é linear, isometria $\xrightarrow{Ex.F3.11} T(L^p)$ é s.e.v. fechado de $(L^p)^*$
- $T(L^p)$ é reflexivo

Prop. E1.4 Se X é um espaço reflexivo (de Banach), todo seu subespaço fechado é reflexivo.

- T é linear, isometria $\implies T$ isom. isom. entre $L^{p'}$ e $T(L^p)$

Lema E1.5 Se X e Y são e.v.n isomorfos, então X é reflexivo se e só se Y é reflexivo.

- $L^{p'}$ é reflexivo

Proposição F3.8. T é sobrejetora para $p \in (1, \infty)$.

O mesmo vale para $p = 1$ se a medida é σ -finita mas não vale para $p = \infty$ (exceto casos “triviais”). $\triangleleft$

Em particular, mostramos o Teorema F3.2 e o seguinte

Teorema F3.9 [de Representação de Riesz]. *Sejam $1 \leq p < \infty$, p e p' conjugados e $\phi \in (L^p(\Omega))^*$ (no caso $p = 1$ assumimos a medida σ -finita).*

Então existe um único $u \in L^{p'}(\Omega)$ tal que

$$\langle \phi, f \rangle = \phi(f) = \int_{\Omega} u f, \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

Além disso $\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|\phi\|_{(L^p(\Omega))^}$*

◁

Isto permite identificar $L^{p'}(\Omega)$ e $(L^p(\Omega))^*$.

Lema F3.6+ Proposição F3.8:

$$T : L^{p'} \rightarrow (L^p)^* : u \mapsto [Tu = \phi_u : f \in L^p \mapsto \phi_u(f) = \int_{\Omega} f u]$$

- $p \in (1, \infty)$: é isom. isom. sobrejetor
- $p = 1$: é isom. isom. sobrejetor se a medida é σ -finita
- $p = \infty$: é isom. isom. sobre a imagem

Teorema F3.2

- $(L^p)^*$ é isometricamente isomorfo a $L^{p'}$, para $p \in (1, \infty)$.
- $(L^1)^*$ é isometricamente isomorfo a L^∞ , desde que a medida seja σ -finita.
- $(L^\infty)^*$ contém um subespaço isometricamente isomorfo a L^1 . O subespaço é próprio (exceto casos “triviais”).

Observação F3.10. Existe uma [2a desig. de Clarkson](#), que mostra que L^p é [u.c.](#) e logo [reflexivo](#) também no caso [p ∈ \(1, 2\]](#). O resultado completo é o seguinte: [**Desigualdades de Clarkson**] sejam $u, v \in L^p(\Omega)$, e $p' = \frac{p}{p-1}$.

Se $2 \leq p < \infty$, então

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2} \|u\|_{L^p}^p + \frac{1}{2} \|v\|_{L^p}^p, \quad (\text{F3.3})$$

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_{L^p}^{p'} + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_{L^p}^{p'} \geq \left(\frac{1}{2} \|u\|_{L^p}^p + \frac{1}{2} \|v\|_{L^p}^p \right)^{p'-1}. \quad (\text{F3.4})$$

Se $1 < p \leq 2$, então

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_{L^p}^{p'} + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_{L^p}^{p'} \leq \left(\frac{1}{2} \|u\|_{L^p}^p + \frac{1}{2} \|v\|_{L^p}^p \right)^{p'-1}, \quad (\text{F3.5})$$

$$2^{2-p} \left(\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_{L^p}^p \right) \geq \frac{1}{2} \|u\|_{L^p}^p + \frac{1}{2} \|v\|_{L^p}^p. \quad (\text{F3.6})$$

★

Exercícios

Exercício F3.11. Se $T : X \rightarrow Y$ é uma isometria linear e X é Banach, então $T(X)$ é um s.e.v. fechado. (ver p. [E8](#)) ★

Exercício F3.12. Faça os exercícios 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 (p. 118...) do [[Bre11](#)]. ★

F3.1 Demonstrações

F3.1.1 1a. Desigualdade de Clarkson

Prova da **1a des. de Clarkson**: Sejam $a, b \in \mathbb{K}$ e $2 \leq p < \infty$. Então

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \leq \frac{|a|^p + |b|^p}{2}. \quad (F3.1)$$

Logo, se $f, g \in L^p(\Omega)$, $2 \leq p < \infty$, então

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{2} \|g\|_{L^p}^p. \quad (F3.2)$$

Demonstração.

- Eq. (F3.2) segue da Eq. (F3.1)

considere $a = f(x)$, $b = g(x)$, a definição de $\|\cdot\|_p$ e note que $f, g, f+g, f-g \in L^p$. Portanto todas essas funções são finitas q.s. e ainda suas integrais sob um conjunto de medida nula valem zero: $\int_{\Omega} = \int_{\Omega \setminus E} + \int_E = \int_{\Omega \setminus E}$ ($\mu(E) = 0$)

Af. 1. $\alpha^p + \beta^p \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{p/2}$, $\forall \alpha, \beta \geq 0$

- $\beta = 0$: ok
- $\beta \neq 0$:

$$\begin{aligned} \alpha^p + \beta^p \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{p/2} &\iff \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^p + 1 \leq \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^{p/2}}{(\beta^2)^{p/2}} = \left(\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 + 1 \right)^{p/2} \\ &\iff \left(\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 + 1 \right)^{p/2} - \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^p - 1 \geq 0 \end{aligned}$$

- $f(x) := (x^2 + 1)^{p/2} - x^p - 1$, $x \geq 0$

Queremos $f(x) \geq 0$, $\forall x \geq 0$

- f é crescente em $[0, \infty)$ (pois $f' \geq 0$) e $f(0) = 0$

Af. 2. $\left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2}\right)^{p/2} \leq \frac{1}{2}(\alpha^p + \beta^p)$ ⁵

- tome $\alpha = \left|\frac{a+b}{2}\right|$, $\beta = \left|\frac{a-b}{2}\right|$ na Af. 1 e depois $\alpha = |a|$, $\beta = |b|$ na Af. 2 e (F3.1) está provado

□

F3.1.2 Demonstração $T : L^{p'} \rightarrow (L^p)^*$ é isom. isom. (sobrejetor)

Aula 22

Prova do Lema F3.6: Sejam p e p' conjugados.

$$T : L^{p'} \rightarrow (L^p)^* : u \mapsto [Tu = \phi_u : f \in L^p \mapsto \phi_u(f) = \int_{\Omega} f u]$$

é uma isometria (linear) para $p \in (1, \infty)$.

O mesmo vale para $p = 1$ se a medida é σ -finita e vale para $p = \infty$.

Demonstração.

- T é linear ($\forall p \in [1, \infty]$)

(I) $Tu \in (L^p)^*$, $\forall u \in L^{p'}$ e $\|Tu\|_{(L^p)^*} \leq \|u\|_{p'}$, $\forall u \in L^{p'}$ ($\forall p \in [1, \infty]$)

- $Tu : L^p \rightarrow \mathbb{K}$ é linear

- Tu é limitado

$$|Tu(f)| = |\phi_u(f)| = \left| \int_{\Omega} \underbrace{f}_{L^p} \underbrace{u}_{L^{p'}} \right| \leq \|f\|_p \|u\|_{p'}$$

Desigualdade de Hölder F2.1. $p, q \in [1, \infty]$ conjugados, $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega) \implies fg \in L^1(\Omega)$ e $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

$$\therefore \|Tu\|_{(L^p)^*} = \sup_{\substack{f \in L^p \\ \|f\|_p \leq 1}} |Tu(f)| \leq \|u\|_{p'}$$

⁵use $f(x) := x^p + 1 - 2\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right)^{p/2}$, $x \geq 0$

$$(II) \|u\|_{p'} \leq \|Tu\|_{(L^p)^*}$$

Queremos $\|u\|_{p'} \leq \|Tu\|_{(L^p)^*} = \sup_{\substack{f \in L^p \\ f \neq 0}} \frac{|Tu(f)|}{\|f\|_p}$

Basta mostrar que $\exists f_0 \in L^p, f_0 \neq 0; \|u\|_{p'} = \frac{|Tu(f_0)|}{\|f_0\|_p}$

$$\|u\|_{p'}^{p'} = \int_{\Omega} |u|^{p'} = \int_{\Omega} |u|^{p'-2} |u|^2 = \int_{\Omega} \underbrace{|u|^{p'-2} \bar{u}}_{f_0} u \stackrel{?}{=} \left(\frac{Tu(f_0)}{\|f_0\|_p} \right)^{p'}$$

- f_0 está bem definida? está em L^p ? $\|f_0\|_p = 0, \neq 0, =? ???$
 - para $p = 1$, não: $p' = \infty$ e não faz sentido a expressão $|u|^{p'-2}$: *mais trabalho*
 - para $p \in (1, \infty)$: precisa ver o caso em que $p' - 2$ pode ser negativo e arrumar a expressão para fazer sentido
 - $p = \infty$: $p' = 1$ e mesmo caso anterior com atenção nas normas

- $f_0(x) := \begin{cases} |u(x)|^{p'-2} \bar{u}(x) = |u(x)|^{p'-1} \frac{\bar{u}(x)}{|u(x)|}, & u(x) \neq 0 \\ 0, & u(x) = 0 \end{cases}$,

- f_0 está bem definida para $p \in (1, \infty)$ e é mensurável

- $f_0 \in L^p$

$$\begin{aligned} \|f_0\|_p^p &= \int_{\Omega} |f_0|^p = \int_{\Omega \setminus \{u=0\}} \left| |u|^{p'-2} \bar{u} \right|^p = \int_{\Omega \setminus \{u=0\}} \underbrace{\left(|u|^{p'-1} \left| \frac{\bar{u}}{|u|} \right| \right)^p}_{\substack{p(p'-1) \\ |u|^{p'}}} \\ &= \int_{\Omega \setminus \{u=0\}} |u|^{p'} + \int_{\{u=0\}} |u|^{p'} = \|u\|_{p'}^{p'} < \infty \end{aligned}$$

- $\|f_0\|_p = 0 \implies \|u\|_{p'} = 0 \implies u = 0$ q.s. e (II) vale

- $\|f_0\|_p \neq 0 \Rightarrow \|u\|_{p'} = \frac{|Tu(f_0)|}{\|f_0\|_p}$ e (II) vale

$$\begin{aligned} Tu(f_0) &= \int |u|^{p'-2} \bar{u} u = \|u\|_{p'}^{p'} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{|Tu(f_0)|}{\|f_0\|_p} &= \frac{\|u\|_{p'}^{p'}}{\|f_0\|_p} = \frac{\|u\|_{p'}^{p'}}{\|u\|_{p'}^{\frac{p'}{p}}}} = \|u\|_{p'}^{p' - \frac{p'}{p}} = \|u\|_{p'}^{\frac{p'}{p}(p-1)} = \|u\|_{p'} \end{aligned}$$

- *para* $p = \infty$: $p' = 1$,

$$f_0 = \begin{cases} \frac{\bar{u}(x)}{|u(x)|}, & u(x) \neq 0 \\ 0, & u(x) = 0 \end{cases}, \quad Tu(f_0) = \|u\|_1, \quad \|f_0\|_\infty = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \text{e (II) vale}$$

- *para* $p = 1$: $p' = \infty$:

$$(II') \quad \|u\|_\infty \leq \|Tu\|_{(L^1)^*}$$

Passo 1: $\mu(\Omega) < \infty$

$$A_\varepsilon := \{x \in \Omega : |u(x)| \geq \|Tu\|_{(L^1)^*} + \varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0)$$

Basta mostrar que $\mu(A_\varepsilon) = 0$, $\forall \varepsilon > 0$ pois daí

$$|u(x)| < \|Tu\|_{(L^1)^*} + \varepsilon \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega$$

$$\|u\|_\infty = \inf\{c : |u(x)| \leq c \text{ q.s. em } \Omega\} \leq \|Tu\|_{(L^1)^*} + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

e vale (II')

$$f_0(x) := \begin{cases} \frac{\bar{u}(x)}{|u(x)|} \chi_{A_\varepsilon}(x), & u(x) \neq 0 \\ 0, & u(x) = 0 \end{cases}$$

- f_0 está bem definida e é mensurável

- $f_0 \in L^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |f_0| = \int_{\Omega \setminus \{u=0\}} \frac{|\bar{u}(x)|}{|u(x)|} \chi_{A_\varepsilon}(x) \stackrel{u \neq 0}{=} \int_{A_\varepsilon} 1 = \mu(A_\varepsilon) \leq \mu(\Omega) < \infty$$

$$\|f_0\|_1 = \mu(A_\varepsilon)$$

- qual propriedade $|Tu(f_0)|$ satisfaz ???

$$|Tu(f_0)| \leq \|Tu\|_{(L^1)^*} \|f_0\|_1 = \|Tu\|_{(L^1)^*} \mu(A_\varepsilon), \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\begin{aligned} |Tu(f_0)| &= \left| \int_{\Omega} f_0 u \right| = \left| \int_{\Omega} \frac{\bar{u}(x)}{|u(x)|} \chi_{A_\varepsilon}(x) u(x) \right| = \left| \int_{\Omega} |u(x)| \chi_{A_\varepsilon}(x) \right| \\ &= \int_{A_\varepsilon} |u(x)| \\ &\stackrel{\text{def. } A_\varepsilon}{\geq} \left(\|Tu\|_{(L^1)^*} + \varepsilon \right) \int_{A_\varepsilon} 1 \\ &= \left(\|Tu\|_{(L^1)^*} + \varepsilon \right) \mu(A_\varepsilon), \quad \forall \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

- $\left(\|Tu\|_{(L^1)^*} + \varepsilon \right) \mu(A_\varepsilon) \leq \|Tu\|_{(L^1)^*} \mu(A_\varepsilon), \quad \forall \varepsilon > 0$

- $\mu(A_\varepsilon) = 0$ para todo $\varepsilon > 0$

se para algum $\varepsilon > 0$, $\mu(A_\varepsilon) \neq 0$

$$\left(\|Tu\|_{(L^1)^*} + \varepsilon \right) \leq \|Tu\|_{(L^1)^*} \quad \rightsquigarrow \leftarrow$$

Passo 2: Ω é σ -finito

Basta mostrar que $A_\varepsilon := \{x \in \Omega : |u(x)| \geq \|Tu\|_{(L^1)^*} + \varepsilon\}$ tem medida nula

- $\exists \Omega_n \in \Sigma; \Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ com $\mu(\Omega_n) < \infty$ (Ω σ -finito)

- $A_\varepsilon = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_\varepsilon^n,$

$$A_\varepsilon^n := \{x \in \Omega_n : |u(x)| \geq \|Tu\|_{(L^1)^*} + \varepsilon\}$$

- $\mu(A_\varepsilon^n) = 0, \forall n$ (Passo 1: $\mu(\Omega_n) < \infty$)
- $\mu(A_\varepsilon) = 0$

□

Prova da Proposição F3.8:

$$T : L^{p'} \rightarrow (L^p)^* : u \mapsto [Tu = \phi_u : f \in L^p \mapsto \phi_u(f) = \int_{\Omega} f u]$$

é sobrejetora para $p \in (1, \infty)$.

O mesmo vale para $p = 1$ se a medida é σ -finita mas não vale para $p = \infty$.

Demonstração.

Caso $1 < p < \infty$

- $T(L^{p'})$ é s.e.v. fechado em $(L^p)^*$

Ex. F3.11: Se $T : X \rightarrow Y$ é uma isometria linear e X é Banach, então $T(X)$ é um s.e.v. fechado. (ver p. E8: prova de dual refl. implica esp. refl.)

Basta mostrar que $T(L^{p'})$ é denso em $(L^p)^*$, *pois daí*

$$T(L^{p'}) = \overline{T(L^{p'})} = (L^p)^*$$

Ex. B2.6 Um subespaço M de em e.v.n. X é denso se e só se vale que

$$\forall \phi \in X^* \text{ t.q. } \phi|_M = 0, \text{ vale } \phi \equiv 0$$

- $\Phi \in (L^p)^{**}$; $\Phi|_{T(L^{p'})} = 0$, i.e., $\Phi(T(u)) = 0, \forall u \in L^{p'}$

Queremos $\Phi = 0$

- L^p é reflexivo (Corolários F3.5 ($p \in [2, \infty]$)+F3.7($p \in (1, 2]$))
- $J : L^p \rightarrow (L^p)^{**}$ o mergulho canônico é sobrejetor
- $\exists f \in L^p$; quad $Jf = \Phi$
Basta mostrar que $f = 0$ (lembre: $f = 0 \in L^p$ diz $f = 0$ q.s.)

$$0 = \Phi(T(u)) = Jf(T(u)) \stackrel{\text{Def. } J}{=} Tu(f) = \int f u, \quad \forall u \in L^{p'}$$

- $u(x) := \begin{cases} |f(x)|^{p-2} \bar{f}(x) = |f(x)|^{p-1} \frac{\bar{f}(x)}{|f(x)|}, & f(x) \neq 0 \\ 0, & f(x) = 0 \end{cases} \in L^{p'} \quad (\text{p.F23})$

•

$$0 = \int f u = \int f |f(x)|^{p-2} \bar{f}(x) = \int |f(x)|^p \stackrel{p < \infty}{=} \|f\|_p^p$$

- $f = 0$ q.s.

Caso $p = 1$

$$T : L^\infty \rightarrow (L^1)^* : u \mapsto [Tu = \phi_u : f \in L^1 \mapsto \phi_u(f) = \int_\Omega f u]$$

Passo 1: $\mu(\Omega) < \infty$

- $\phi \in (L^1)^*$

Queremos $u \in L^\infty$; $Tu = \phi$

- $L^2(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$ ($p = 1, q = 2$)

$$|\phi(f)| \stackrel{\phi \in (L^1)^*}{\leq} \|\phi\|_{(L^1)^*} \|f\|_1 \stackrel{\text{O.F2.5}}{\leq} c \|\phi\|_{(L^1)^*} \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2$$

Obs. F2.5. Se $\mu(\Omega) < \infty$ então $L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < q \leq \infty$ (inclusão contínua: $\|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{1/p-1/q} \|f\|_q$).

- $\phi|_{L^2} \in (L^2)^*$
- $T : L^2 \rightarrow (L^2)^*$ é sobrejetor (Caso $1 < p < \infty$)
- $\exists u \in L^2; Tu = \phi|_{L^2}$, i.e., $\int_{\Omega} fu = \phi(f), \forall f \in L^2$

Af. 1. $u \in L^\infty$

Como na prova anterior: **Mostraremos que** $\|u\|_\infty \leq \|\phi\|_{(L^1)^*}$

$$A_\varepsilon := \{x \in \Omega : |u(x)| \geq \|\phi\|_{(L^1)^*} + \varepsilon\}, \quad f_0(x) := \frac{\bar{u}(x)}{|u(x)|} \chi_{A_\varepsilon}(x)$$

- $f_0 \in L^1(\Omega)$
- $(\|Tu\|_{(L^1)^*} + \varepsilon) \mu(A_\varepsilon) \leq \|Tu\|_{(L^1)^*} \mu(A_\varepsilon), \quad \forall \varepsilon > 0$
- $\mu(A_\varepsilon) = 0$ para todo $\varepsilon > 0$

Af. 2. $Tu = \phi$, i.e., $\int_{\Omega} fu = \phi(f), \forall f \in L^1$

Função de truncamento: $T_n(z) = \frac{z}{|z|} \min\{n, |z|\}$, $n \in \mathbb{N}$;
 $T_n \circ f \rightarrow f$ pontualmente e $|T_n \circ f| \leq |f|$

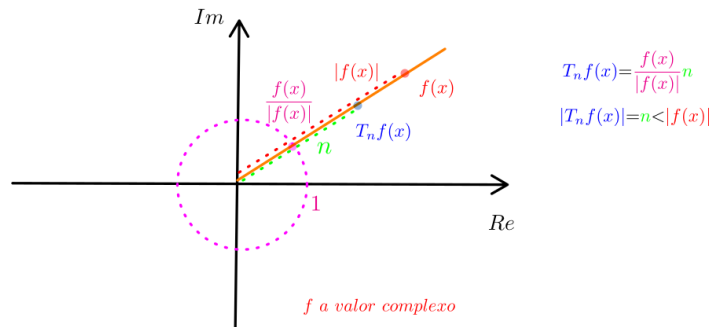
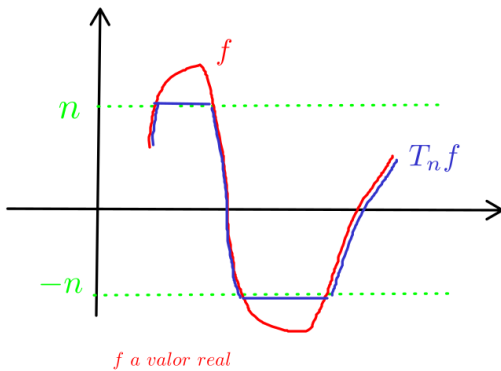


Figura 2: $T_n(f) = \begin{cases} f & |f| \leq n \\ sg(f)n & n < |f| \end{cases}$ onde $sg(f) = \frac{f}{|f|}$. No caso real, $sg(f) = \pm 1$. No caso complexo, $|sg(f)| = 1$ e $T_n f(x)$ altera o módulo sem alterar a direção de $f(x)$ (caso $n < |f(x)|$)

- seja $f \in L^1$
- $T_n(f)$ função de truncamento é mensurável
- Para cada n , $|T_n f| \leq n$
- $T_n(f) \in L^p \quad (\forall p \in [1, \infty]) \quad (\mu(\Omega) < \infty)$
- $|T_n f| \leq |f|$ e $T_n f(x) \rightarrow f(x)$

Teorema da Convergência Dominada F1.7. Seja $\{f_n\} \subset L^1(\mu)$ tal que
 (a) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$,
 (b) existe $h \in L^1(\mu)$ tal que $|f_n| \leq h$ q.t.p. para todo n . Então $f \in L^1(\mu)$ e $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$.

- $T_n f \rightarrow f$ em L^1
- $\phi(T_n f) \rightarrow \phi(f)$ em $L^1 \quad (\phi \text{ contínua})$
- $\phi(T_n f) \overset{T_n f \in L^2}{=} Tu(T_n f) = \int u T_n f \rightarrow \int u f$ em $L^1 \quad (\text{TCD F1.7})$

$$u(x)T_n f(x) \rightarrow u(x)T f(x)$$

$$|u T_n f| \leq \|u\|_\infty |T f| \leq \|u\|_\infty |f|$$

- $\phi(f) = \int u f = Tu(f)$

Passo 2: Ω é σ -finito Justifique as passagens!

- $\exists \Omega_n \in \Sigma; \Omega = \coprod_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ com $\mu(\Omega_n) < \infty \quad (\Omega \text{ } \sigma\text{-finito})$

Sejam $\phi \in (L^1)^*$ e $f \in L^1(\Omega)$:

- $\exists u_n \in L^\infty(\Omega_n); Tu_n(f) = \phi(f)$
- $u := \sum_{n=1}^\infty u_n$ está bem definida e $u \in L^\infty(\Omega) \quad (\|u\|_\infty \leq \|\phi\|)$

- $u_n = u \chi_{\Omega_n}$
- $f_n := f \chi_{\Omega_n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightarrow f$ em L^1
- $\int \sum_{n=1}^N u_n f \rightarrow \int u f$ em L^1 (TCD)
- $\int \sum_{n=1}^N u_n f \rightarrow \phi(f)$ em L^1 (ϕ contínua)
- $\phi(f) = \int u f = Tu(f)$

□

F4 Densidade, separabilidade

Aula 23

Um espaço métrico (X, d) é dito **separável** se existir um subconjunto enumerável $D \subseteq X$ que é denso em X .

Alguns resultados da teoria da medida:

- ([Fol99, Th.2.40]) Se $E \subseteq \mathbb{R}^N$ é Lebesgue mensurável, então sua medida de Lebesgue satisfaz

$$\mu(E) = \inf \{ \mu(A) : E \subseteq A \text{ aberto} \} = \sup \{ \mu(K) : E \supseteq K \text{ compacto} \}$$

Além disso, se $\mu(E) < \infty$, para cada $\epsilon > 0$ existe uma coleção finita de retângulos disjuntos $\{R_j\}_{j=1}^m$ cujos lados são intervalos tais que $\mu(E \Delta \bigcup_{j=1}^m R_j) < \epsilon$.^a

^a $E \Delta R = (E \setminus R) \cup (R \setminus E)$, diferença simétrica

Proposição F4.1. [Fol99, p.183..]

- (a) Se $1 \leq p \leq \infty$, o conjunto das funções simples $f = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{E_j}$ é denso em $L^p(\Omega)$.
- (b) Se $1 \leq p < \infty$, os E_j podem ser tomados de medida finita.
- (c) Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e a medida é a de Lebesgue, os E_j de medida finita podem ser substituídos por (multi-)retângulos de extremos racionais. $\triangleleft$

Demonstração.

(a)

- $f \in L^p$ e $\varepsilon > 0$

Queremos $\phi = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{E_j}$ **para algum** N , $E_j \in \Sigma$; $\|\phi - f\|_p < \varepsilon$

Proposição F1.2. Se $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ é mensurável, existe uma sequência $\{\phi_n\}$ funções simples tais que $0 \leq |\phi_1| \leq |\phi_2| \leq \dots \leq |f|$, $\phi_n \rightarrow f$ pontualmente e $\phi_n \rightarrow f$ uniformemente em qualquer subconjunto onde f é limitada.

- $\exists \phi_n = \sum_{j=1}^{N_n} a_{n_j} \chi_{E_{n_j}}$ com $a_{n_j} \neq 0$ e $E_{n_j} \cap E_{n_k} = \emptyset$;
 - $0 \leq |\phi_1| \leq |\phi_2| \leq \dots \leq |f|$
 - $\phi_n \rightarrow f$ pontualmente
 - $\phi_n \rightarrow f$ uniformemente em qualquer subconjunto onde f é limitada

$1 \leq p < \infty$:

- $|\phi_n| \leq |f| \in L^p$
- $\phi_n \in L^p, \forall n$
- $\phi_n(x) \rightarrow f(x)$ em Ω

Teorema da Convergência Dominada F1.7. Seja $\{f_n\} \subset L^p(\mu)$ tal que
 (a) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$,
 (b) existe $h \in L^p(\mu)$ tal que $|f_n| \leq h$ q.t.p. para todo n . Então $f \in L^p(\mu)$ e $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.

- $\|\phi_n - f\|_p \rightarrow 0$, i.e., $\exists n_0; \|\phi_n - f\|_p \leq \varepsilon, \forall n \geq n_0$
- tome $\phi = \phi_{n_0}$: $\|\phi - f\|_p \leq \varepsilon$

$p = \infty$:

Exercício F2.6: $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ q.s., $\forall f \in L^\infty$.

- f é limitada q.s.
- $\phi_n \rightarrow f$ uniformemente q.s., i.e.,

$$\exists n_0; n \geq n_0 \implies |\phi_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \text{ q.s.}$$

- $\|\phi_n - f\|_\infty = \inf\{c : |\phi_n(x) - f(x)| \leq c \text{ q.s. em } \Omega\} \leq \varepsilon, n \geq n_0$
- tome $\phi = \phi_{n_0}$: $\|\phi - f\|_\infty \leq \varepsilon$

(b) Se $1 \leq p < \infty$, os E_j podem ser tomados de medida finita

Af.: $\mu(E_{n_j}) < \infty, \forall j$

(E_{n_j} como em (a))

$1 \leq p < \infty$:

•

($E_{n_j} \cap E_{n_k} = \emptyset$ e $\phi_n \in L^p$)

$$\begin{aligned}
 \|\phi_n\|_p^p &= \int |\phi_n|^p = \int \left| \sum_{j=1}^{N_n} a_{n_j} \chi_{E_{n_j}}(x) \right|^p \\
 &\stackrel{\substack{\chi_{E_{n_j}}(x) \neq 0 \\ \text{max. unico } j}}{=} \int \sum_{j=1}^{N_n} |a_{n_j}|^p \chi_{E_{n_j}}(x) \\
 &= \sum_{j=1}^{N_n} |a_{n_j}|^p \int \chi_{E_{n_j}}(x) \\
 &= \sum_{j=1}^{N_n} |a_{n_j}|^p \mu(E_{n_j}) \leq \infty
 \end{aligned}$$

• $\mu(E_{n_j}) < \infty$

($a_{n_j} \neq 0$)

Note que para $p = \infty$:

$$\|\phi_n\|_\infty = \inf \left\{ c : \left| \sum_{j=1}^{N_n} a_{n_j} \chi_{E_{n_j}}(x) \right| \leq c \text{ q.s. em } \Omega \right\} = \inf \{ c : |a_{n_j}| \leq c \text{ q.s. em } \Omega \} < \infty$$

mas não envolve $\mu(E_{n_j})$

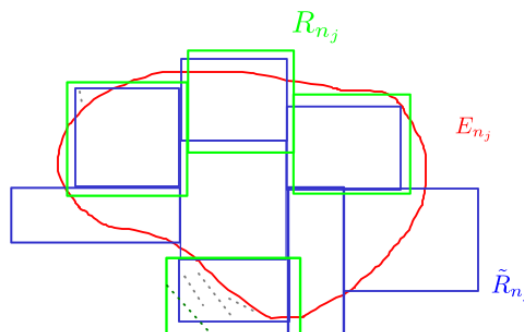
(c) Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e a medida é a de Lebesgue, os E_j de medida finita podem ser substituídos por (multi-)retângulos de extremos racionais.

- $\exists \phi = \sum_{j=1}^{N_n} a_{n_j} \chi_{E_{n_j}}, \quad \mu(E_{n_j}) < \infty; \quad \|\phi - f\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (item (a)+(b))
- para cada E_{n_j} , existe uma coleção finita de retângulos disjuntos $\{\tilde{R}_{n_{jk}}\}$; $\mu(E_{n_j} \Delta \cup_k \tilde{R}_{n_{jk}}) < \frac{\delta}{2}$

([Fol99, Th.2.40]) Se $E \subseteq \mathbb{R}^N$ é Lebesgue mensurável e $\mu(E) < \infty$, para cada $\epsilon > 0$ existe uma coleção finita de retângulos disjuntos $\{R_j\}_{j=1}^m$ cujos lados são intervalos tais que $\mu(E \Delta \cup_{j=1}^m R_j) < \epsilon$.^a

^a $E \Delta R = (E \setminus R) \cup (R \setminus E)$, diferença simétrica

- existe uma coleção finita de retângulos $\{R_{n_{jk}}\}$ com vértices em $\mathbb{Q}$ tais que $\mu(E_{n_j} \Delta \cup_k R_{n_{jk}}) < \delta$ ($\mathbb{Q}^N$ é denso em $\mathbb{R}^N$)



- $\tilde{\phi} := \sum_{j=1}^{N_n} a_{n_j} \chi_{\cup_k R_{n_{jk}}}$

Queremos δ adequado de modo que $\|\tilde{\phi} - \phi\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$$\|\tilde{\phi} - f\|_p \leq \|\tilde{\phi} - \phi\|_p + \|\phi - f\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Af. Para $\delta = ??$, vale $\|\tilde{\phi} - \phi\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$

•

$$\begin{aligned}
\left\| \tilde{\phi} - \phi \right\|_p &= \left\| \sum_{j=1}^{N_n} a_{n_j} \left(\chi_{\cup_k R_{n_{jk}}} - \chi_{E_{n_j}} \right) \right\|_p \\
&\stackrel{Minkowski}{\leq} \sum_{j=1}^{N_n} |a_{n_j}| \left\| \chi_{\cup_k R_{n_{jk}}} - \chi_{E_{n_j}} \right\|_p \\
&\leq \max_j \{|a_{n_j}|^p\} \sum_{j=1}^{N_n} \underbrace{\left\| \chi_{\cup_k R_{n_{jk}}} - \chi_{E_{n_j}} \right\|_p}_p
\end{aligned}$$

•

$$\left| \chi_{\cup_k R_{n_{jk}}}(x) - \chi_{E_{n_j}}(x) \right| = \begin{cases} 1, & x \in (\cup_k R_{n_{jk}} \setminus E_{n_j}) \cup (E_{n_j} \setminus \cup_k R_{n_{jk}}) = E_{n_j} \Delta \cup_k R_{n_{jk}} \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

•

$$\underbrace{\left\| \chi_{\cup_k R_{n_{jk}}} - \chi_{E_{n_j}} \right\|_p}_p^p = \int \left| \chi_{\cup_k R_{n_{jk}}}(x) - \chi_{E_{n_j}}(x) \right|^p = \mu(E_{n_j} \Delta \cup_k R_{n_{jk}})$$

•

$$\begin{aligned}
\left\| \tilde{\phi} - \phi \right\|_p &\leq \max_j \{|a_{n_j}|^p\} \sum_{j=1}^{N_n} \left(\underbrace{\mu(E_{n_j} \Delta \cup_k R_{n_{jk}})}_p \right)^{1/p} \\
&\leq \underbrace{\max_j \{|a_{n_j}|^p\} N_n}_{c=c(n,p)>0} \underbrace{\delta}_{\delta}^{1/p}
\end{aligned}$$

• para $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{2c}\right)^p$ vale $\left\| \tilde{\phi} - \phi \right\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$

□

A demonstração anterior fornece: se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e a medida é a de Lebesgue, então o conjunto das funções simples $f = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{R_j}$, $a_j \in \mathbb{R}$, R_j multi-retângulos com vértices racionais, é denso em $L^p(\Omega)$. Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, prove que “ $a_j \in \mathbb{R}$ podem ser substituídos por $b_j \in \mathbb{Q}$ ”. (Análogo se $a_j \in \mathbb{C}$)

Logo, o conjunto das funções simples $f = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{R_j}$, $a_j \in \mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$), R_j multi-retângulos com vértices racionais, é enumerável e denso em $L^p(\Omega)$.

Corolário F4.2. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e a medida é a de Lebesgue, então $L^p(\Omega)$ é separável para $1 \leq p < \infty$. $\triangleleft$

Proposição F4.3. $L^\infty(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ não é separável (exceto casos “triviais”) $\triangleleft$

Prova da Proposição F4.3 para o caso $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. [Bre11, p.103]
aberto

Proposição E2.7. Se existe uma família não enumerável de abertos em X , não vazios e 2 a 2 disjuntos, então X não é separável.

• $a \in \Omega, \exists r_a > 0; B_{r_a}(a) \subset \Omega$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$)
aberto

• $O_a := \left\{ f \in L^\infty(\Omega) : \|f - \chi_{B_{r_a}(a)}\|_\infty < \frac{1}{2} \right\}$

• cada O_a é não vazio

$$\|\chi_{B_{r_a}(a)}\|_\infty = 1 \text{ e } \chi_{B_{r_a}(a)} \in O_a : \quad \|\chi_{B_{r_a}(a)} - \chi_{B_{r_a}(a)}\|_\infty = 0 < \frac{1}{2}$$

• cada O_a é aberto

$$O_a = B_{\frac{1}{2}}(\chi_{B_{r_a}(a)})$$

• $\{O_a\}_{a \in \Omega}$ é não enumerável (todo aberto não vazio de $\mathbb{R}^N$ é não enumer.)

• $O_a \cap O_b = \emptyset, a \neq b$

$$f \in O_a \cap O_b \implies$$

$$\|\chi_{B_{r_a}(a)} - \chi_{B_{r_b}(b)}\|_\infty \leq \|\chi_{B_{r_a}(a)} - f\|_\infty + \|f - \chi_{B_{r_b}(b)}\|_\infty \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$|\chi_{B_{r_a}(a)}(x) - \chi_{B_{r_b}(b)}(x)| = \begin{cases} 1, & x \in \underbrace{B_{r_a}(a) \Delta B_{r_b}(b)}_{\neq \emptyset, \mu > 0} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \implies \|\chi_{B_{r_a}(a)} - \chi_{B_{r_b}(b)}\|_\infty = 1$$

$\Rightarrow \Leftarrow$

□

Proposição F4.4. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e a medida é a de Lebesgue, então $\mathcal{C}_c(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$. $\triangleleft$

Demonstração.

- $f \in L^p$ e $\varepsilon > 0$
- $S := \{\sum_{j=1}^N a_j \chi_{E_j}, \mu(E_j) < \infty\}$ é denso em $L^p(\Omega)$

Proposição F4.1. (a) Se $1 \leq p \leq \infty$, o conjunto das funções simples $f = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{E_j}$ é denso em $L^p(\Omega)$. (b) Se $1 \leq p < \infty$, os E_j podem ser tomados de medida finita.

- $\exists \phi \in S; \quad \|f - \phi\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Basta mostrar que para cada $E \in \Sigma$ com $\mu(E) < \infty$, $\exists f \in \mathcal{C}_c(\Omega);$
 $\|\chi_E - f\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2 \text{const.}}$

$$\exists g = \sum a_j f_j \in \mathcal{C}_c; \quad \|\phi - g\|_p = \left\| \sum a_j (\chi_{E_j} - f_j) \right\|_p \leq \text{const.} \varepsilon$$

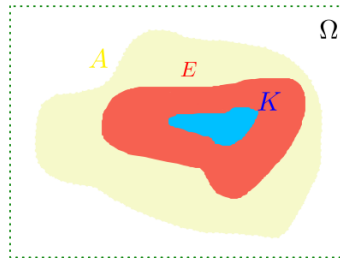
$$\|f - g\|_p \leq \|f - \phi\|_p + \|\phi - g\|_p \leq \varepsilon$$

(ver pag. F35)

- $E \in \Sigma$ com $\mu(E) < \infty$
- $\exists A \supseteq E$ ($A \subset \Omega$) aberto e $K \subseteq E$ compacto; $\mu(A \setminus K) < \varepsilon^p$ (Ω ab.)

([Fol99, Th.2.40]) Se $E \subseteq \mathbb{R}^N$ é Lebesgue mensurável, então sua medida de Lebesgue satisfaz

$$\mu(E) = \inf \{ \mu(A) : E \subseteq A \text{ aberto} \} = \sup \{ \mu(K) : E \supseteq K \text{ compacto} \}$$



Resultado da topologia: lema de Urysohn
(versão particular)

- ([Fol99, p. 122]) Sejam (X, d) um espaço métrico, $A \subset X$ um aberto e $K \subset A$ um compacto. Então, existe uma função $f \in \mathcal{C}(X, [0, 1])$ tal que $\chi_K \leq f \leq \chi_A$. A saber

$$f(x) = \frac{d(x, X \setminus A)}{d(x, X \setminus A) + d(x, K)}.$$

Ainda mais, $f = 1$ em K , $f = 0$ em $X \setminus A$ e $f \in \mathcal{C}_c(X, [0, 1])$.

- $\exists f \in \mathcal{C}_c(\Omega); \chi_K \leq f \leq \chi_A$ ($K \subset A \subset \Omega$)
- $\chi_K \leq \chi_E \leq \chi_A$ ($K \subset E \subset A$)

Queremos $\|\chi_E - f\|_p \leq \varepsilon$

$$\|\chi_E - f\|_p^p = \int_{\Omega} |\chi_E - f|^p$$

$$\left. \begin{array}{l} \chi_E - f \leq \chi_A - \chi_K \\ -(\chi_A - \chi_K) = \chi_K - \chi_A \leq \chi_E - f \end{array} \right\} \Rightarrow |\chi_E - f| \leq \chi_A - \chi_K$$

- ($K \subset A \subset \Omega$)

$$\|\chi_E - f\|_p^p \leq \int_{\Omega} |\chi_A - \chi_K|^p = \mu(A \setminus K)^{1/p} \leq \varepsilon$$

□

Exercícios

Exercício F4.5. $L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ é separável para $1 \leq p < \infty$ se $\mathcal{M}$ é gerada por uma família enumerável de seus elementos (espaço de medida separável). Veja exemplo de espaço de medida e comentários em [Bre11, p. 98]. ★

Exercício F4.6. Procure exemplos de

- $L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ não separável com $p \in (1, \infty)$.
(Dica: $L^p(\mathbb{R}, P(\mathbb{R}), \mu)$, μ medida de contagem)
- sequência limitada em $L^1([0, 1])$ (medida de Lebesgue) que não admite subsequências fracamente convergentes.
- $\phi \in (L^1)^*$ que não pode ser representada por $u \in L^\infty$.

★

Exercício F4.7. Mostre que $(\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$ não é separável. ★

F5 Particularidades de L^1 e L^∞

Quando a medida é σ -finita (por ser o dual de L^1), L^∞ tem as propriedades:

- a bola fechada é compacta na $\sigma^* = \sigma(L^\infty, L^1)$,

T. Banach-Alaoglu D5.2. Seja X um e.v.n. A bola fechada $\overline{B^{X^*}} = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$ é compacta na topologia fraca* $\sigma(X^*, X)$.

- quando L^1 é separável, a bola fechada é metrizável e seq. limitadas tem subseq conv. fraco*

T. E2.10 Seja X um e.v.n. X é separável, se e somente se, $(\overline{B^{X^*}}, \sigma(X^*, X))$ é metrizável.

C. E2.14. Se X é um e.v.n. separável e $\{f_n\}$ é uma sequência limitada de X^* , então existe subsequência $\{f_{n_k}\}$ que converge em $\sigma(X^*, X)$ (conv. fraca*).

- $(L^\infty)^*$ contém um subespaço isometricamente isomorfo a L^1 , que coincide com a imagem da isometria $T_1 : L^1 \rightarrow (L^\infty)^* : f \mapsto [\phi_f : u \mapsto \int_\Omega f u]$

Isto permite identificar L^1 e $T_1(L^1) \subseteq (L^\infty)^*$.

Porém (exceto casos triviais quando L^1 é reflexivo), T_1 não é sobrejetora

(L. F3.6 + P. F3.8)

- Quando L^1 e L^∞ são e.v.n. **finito dimensionais** (medida com apenas finitos conjuntos de medida positiva, a menos de conjuntos nulos), vale

- eles são reflexivos e separáveis,

- $(L^\infty)^*$ é isometricamente isomorfo a L^1 e $(L^1)^*$ é isometricamente isomorfo a L^∞

- em caso contrário

- L^1 e L^∞ não são reflexivos e L^∞ não é separável.

- $(L^1)^*$ é isometricamente isomorfo a L^∞ se a medida é σ -finita mas $(L^\infty)^*$ não é isometricamente isomorfo a L^1 . (L. F3.6 + P. F3.8)

- se a medida não é σ -finita pode existir $\phi \in (L^1)^*$ não representado por uma $u \in L^\infty$ (Ex. F4.6)

Prova: $L^1(\Omega)$ não é reflexivo se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e a medida é a de Lebesgue. [Bre11, p. 101]
aberto

- S.P.G.: $0 \in \Omega$
- $\mu(B_{1/n}(0)) > 0$
- $f_n := \alpha_n \chi_{B_{1/n}} \in L^1(\Omega), \quad \alpha_n := \mu(B_{1/n}(0))^{-1} \quad (f_n \geq 0)$

$$\int_{\Omega} |f_n| = \int_{\Omega} \mu(B_{1/n}(0))^{-1} \chi_{B_{1/n}} = \mu(B_{1/n}(0))^{-1} \int_{B_{1/n}} 1 = 1$$

- $\|f_n\|_1 = 1$
- $\{f_n\}$ é seq. limitada em $L^1(\Omega)$
- Supor $L^1(\Omega)$ é reflexivo

T. E2.15. Seja X um e.v.n reflexivo (de Banach) e $\{x_n\}$ uma sequência limitada em X . Então existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ que converge em $\sigma(X, X^*)$ (conv. fraca).

- $\exists \{f_{n_k}\}$ e $\exists f \in L^1(\Omega); \quad f_{n_k} \rightharpoonup f$
- $\Phi(f_{n_k}) \rightarrow \Phi(f) \quad \forall \Phi \in (L^1)^*$

P. D3.7. Seja $\{x_n\}$ uma sequência em X . Temos que:
 (i) $x_n \rightharpoonup x \iff \phi(x_n) \rightarrow \phi(x) \quad \forall \phi \in X^*$

- $\int_{\Omega} \varphi f_{n_k} \rightarrow \int_{\Omega} \varphi f \quad \forall \varphi \in L^{\infty} \quad (\text{medida de Lebesgue é } \sigma\text{-finita})$

T. de Representação de Riesz]F3.9. Sejam $1 \leq p < \infty$, p e p' conjugados e $\Phi \in (L^p(\Omega))^*$ (no caso $p = 1$ assumimos a medida σ -finita). Então existe um único $\varphi \in L^{p'}(\Omega)$ tal que

$$\langle \Phi, f \rangle = \Phi(f) = \int_{\Omega} \varphi f, \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

L. F3.6 + P. F3.8: $T : L^{p'} \rightarrow (L^p)^*$ é bijetora

Af. $\int_{\Omega} g f_{n_k} = 0 \quad \forall g \in \mathcal{C}_c(\Omega \setminus \{0\}), \quad \forall n_k \text{ sufic. grande}$

- $g \in \mathcal{C}_c(\Omega \setminus \{0\}) \implies g \in L^{\infty}$

Dizemos que f tem **suporte compacto** em Ω se existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $f \equiv 0$ em $\Omega \setminus K$.

contínua de suporte compacto é limitada

- $\int_{\Omega} g f = \lim \int_{\Omega} g f_{n_k} \stackrel{\text{Af.}}{=} 0, \quad \forall g \in \mathcal{C}_c(\Omega \setminus \{0\})$
- $f = 0$ q.s. em Ω

Outro resultado de medida

- ([Fol99]) Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ e f definida em Ω tal que $f \chi_K \in L^1(\Omega)$, para todo $K \subset \Omega$ compacto. Se

$$\int_{\Omega} g f = 0, \quad \forall g \in \mathcal{C}_c(\Omega)$$

então $f = 0$ q.s. em Ω .

- $\varphi = 1 \in L^{\infty}$:

$$1 = \|f_{n_k}\|_1 = \int_{\Omega} f_{n_k} \rightarrow \int_{\Omega} f = 0 \quad \rightsquigarrow \longleftarrow$$

Prova Af.: $\int_{\Omega} g f_{n_k} = 0 \quad \forall g \in \mathcal{C}_c(\Omega \setminus \{0\}), \quad \forall n_k \text{ sufic. grande}$

- $\text{supp}(g) \subset \Omega \setminus \{0\}$
- $B_{1/n_k}(0) \not\subset \text{supp}(g)$ para n_k sufic. grande

$$\int_{\Omega} g f_{n_k} = \int_{\Omega} g \alpha_n \chi_{B_{1/n_k}} = \alpha_n \int_{B_{1/n_k}} g = 0$$

□

Prova: $L^\infty(\Omega)$ não é reflexivo .

- L^1 é Banach (Teorema F2.10)
- $(L^1)^* \approx L^\infty$ (T. de Representação de Riesz F3.9)
- $L^\infty(\Omega)$ reflexivo $\implies (L^1)^*$ reflexivo $\implies L^1$ reflexivo $\rightsquigarrow \leftarrow$

P. E1.6. Se X é um espaço de Banach e X^* é reflexivo, então X é reflexivo.
 L. E1.5. Se X e Y são e.v.n isomorfos, então X é reflexivo se e só se Y é reflexivo.

□

Exercícios

Exercício F5.1 (EF1). Faça o exercício 4.13 (p. 121...) do [Bre11]. ★

Exercício F5.2 (Espaços L^p : B,S,R,U.C.). Preencha a seguinte tabela com S (para sim) e N (para não). Especifique, se necessário, o espaço de medida.

	Ban.	Separ.	Refl.	U.C.	Dual	(Ω, Σ, μ)
$(L^\infty(\Omega), \ \cdot\ _\infty)$						
$(L^1(\Omega), \ \cdot\ _1)$						
$(L^p(\Omega), \ \cdot\ _p), p \in (1, \infty)$						

★

FIM DA AULA 23

F6 Convolução

cont. Aula 28

Definição F6.1.

- O **suporte** $\text{supp}(f)$ de uma função $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ é o menor fechado F tal que $f|_{F^c} \equiv 0$.

O **suporte** de uma função (classe de eq.) $f \in L^p(\Omega)$ é a interseção dos fechados F tais que $f|_{F^c} = 0$ q.t.p.

Vale que $f = 0$ q.t.p. no complementar de $\text{supp}(f)$

- Dadas $f, g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{K}$ definimos a **convolução** de f com g por:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)g(y)dy. \quad (\text{F6.1})$$

- Se $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^N$, definimos a **translação**

$$(\tau_h f)(x) := f(x + h).$$



Proposição F6.2. *Se as integrais (F6.1) correspondentes existem,*

- $f * g = g * f$
- $(f * g) * h = f * (g * h)$
- $\tau_h(f * g) = (\tau_h f) * g = f * (\tau_h g)$
- $\text{supp}(f * g) \subset \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)}$.

*Em particular, se os supp. de f, g são compactos então o de $f * g$ também é compacto.*



Teorema F6.3. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq p \leq \infty$, então,*

- $f(x - y)g(y)$ é integrável em y (para q.t.x)
- $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$



Demonstração. Caso $p = \infty$:

- $|g(y)| \leq \|g\|_\infty$ q.s. em $\mathbb{R}^N$

- $|f(x-y)g(y)| \leq |f(x-y)| \|g\|_\infty$ q.s. em $\mathbb{R}^N$
- $y \mapsto f(x-y)g(y)$ é integrável em $\mathbb{R}^N$ ($f \in L^1$)

-

$$|(f * g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| |g(y)| dy \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$$

(mud. variav. e $|J| = 1$)

- $\|(f * g)(x)\|_\infty \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$

Caso $p = 1$:

- $F(x, y) := f(x-y)g(y)$

-

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |F(x, y)| dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| |g(y)| dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| dx \\ &= |g(y)| \|f\|_1 < \infty, \quad \text{para q.t.p. } y \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

(g $\in L^1$)

Prop. F1.5. Se $f \geq 0$ é mensurável e $\int f d\mu < \infty$, então $\{x : f(x) = \infty\}$ é um conjunto de medida nula ($f < \infty$ q.t.p.)

-

$$\int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} |F(x, y)| dx = \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)| dy \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| dx = \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty$$

- $F \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$

Teorema de Tonelli. Sejam X e Y abertos de $\mathbb{R}^N$. Se $F : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $\int_X |F(x, y)| dx < \infty$ q.t.p. $y \in Y$ e $\int_Y dy \int_X |F(x, y)| dx < \infty$ então $F \in L^1(X \times Y)$.

- $F(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$

Teorema Fubini. Sejam X e Y abertos de $\mathbb{R}^N$. Se $F \in L^1(X \times Y)$, então $F(x, \cdot) \in L^1(Y)$ para quase todo $x \in X$, $F(\cdot, y) \in L^1(X)$ para quase todo $y \in Y$, as funções definidas quase sempre $g(x) = \int_Y |F(x, y)| dy$ e $h(y) = \int_X |F(x, y)| dx$ estão em $L^1(X)$ e $L^1(Y)$, respectivamente, e vale

$$\int_{X \times Y} |F| dx dy = \int_X \left[\int_Y |F(x, y)| dy \right] dx = \int_Y \left[\int_X |F(x, y)| dx \right] dy$$

- $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)g(y) dx$ é integrável em y para q.t. $x \in \mathbb{R}^N$ ($f \in L^1$)

•

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^N} |(f * g)(x)| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |f(x - y)| |g(y)| dy \right] dx \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |f(x - y)| |g(y)| dx \right] dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)| dy \int_{\mathbb{R}^N} |f(x - y)| dx \stackrel{\square}{=} \|g\|_1 \|f\|_1 \end{aligned}$$

Caso $1 < p < \infty$:

- $g \in L^p \implies g^p \in L^1$
- $f \in L^1 \implies f^{1/p} \in L^p$ ou $f^{1/q} \in L^q$

- $f * g^p \in L^1$ (caso $p = 1$)

•

$$\begin{aligned}
|(f * g)(x)|^p &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| |g(y)| dy \right)^p \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} \underbrace{|f(x-y)|^{1/p} |g(y)|}_{\in L^p} \underbrace{|f(x-y)|^{1/q}}_{\in L^q} dy \right)^p \\
&\stackrel{\text{Holder}}{\leq} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| |g(y)|^p dy \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| dy \right)^{1/q} \right]^p \\
&= \left[(|f| * |g|^p)(x)^{1/p} \|f\|_1^{1/q} \right]^p \\
&= (|f| * |g|^p)(x) \|f\|_1^{p/q}
\end{aligned}$$

$$\bullet \int_{\mathbb{R}^N} |(f * g)(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} (|f| * |g|^p)(x) dx \|f\|_1^{p/q} < \infty$$

(f * g^p \in L^1, caso p = 1)

$$\bullet \boxed{(f * g) \in L^p}$$

•

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_p &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^N} (|f| * |g|^p)(x) dx \|f\|_1^{p/q} \right]^{1/p} \\
&= \|f\|_1^{1/q} \underbrace{\| |f| * |g|^p \|_1^{1/p}} \\
&\stackrel{\text{caso 1}}{\leq} \|f\|_1^{1/q} (\|f\|_1 \|g^p\|_1)^{1/p} \\
&= \|f\|_1 \left(\|g\|_p^p \right)^{1/p} = \boxed{\|f\|_1 \|g\|_p}
\end{aligned}$$

□

F6.1 Sequência regularizante

Na prova do Teorema de Frechét-Kolmogorov usaremos seq. regularizantes:

Definição F6.4. Chamamos **sequência regularizante** (ou de molificadores) toda sequência $(\rho_n)_{n \geq 1}$ de funções tais que

$$\boxed{\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)}, \quad \boxed{\text{supp}(\rho_n) \subset B_{\frac{1}{n}}(0)}, \quad \boxed{\int \rho_n = 1}, \quad \boxed{\rho_n \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^N}.$$

★

Exemplo F6.5. Um exemplo pode ser construído assim: seja $\rho : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}}, & \|x\| < 1 \\ 0, & \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

Então $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\text{supp}(\rho) \subset B_1(0)$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) dx > 0$.

Logo,

$$\rho_n := \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) dx \right)^{-1} n^N \rho(nx)$$

fornece uma sequência regularizante.

★

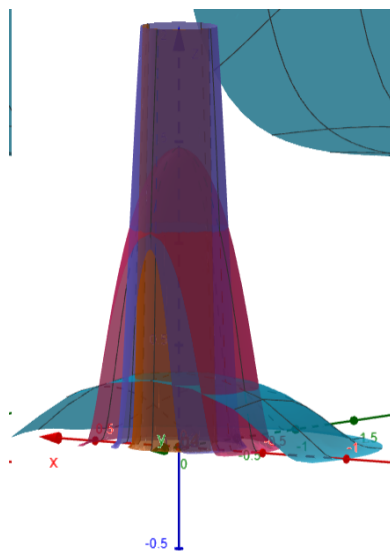


Figura 3: Geogebra

Sequências regularizantes também são usadas para provar que o espaço das funções de classe C^∞ com suporte compacto é denso em L^p :

Proposição F6.6. Se $f \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ então ⁶

$$f * g \in C^k(\mathbb{R}^N) \text{ e } D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g, \quad |\alpha| \leq k. \quad \triangleleft$$

Proposição F6.7. Seja ρ_n uma sequência regularizante.

- Se $f \in C(\mathbb{R}^N)$ então $\rho_n * f \rightarrow f$ uniformemente em compactos de $\mathbb{R}^N$.
- Se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$, então $\rho_n * f \rightarrow f$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. $\triangleleft$

Uma função contínua em um compacto é uniformemente contínua.

Ver Figuras na próxima página.

Corolário F6.8. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto qualquer. Então $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$. $\triangleleft$

Corolário F6.9. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto qualquer e $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ tal que $\int u f = 0$ para toda $f \in C_c^\infty(\Omega)$. Então $u = 0$ q.t.p. em Ω . $\triangleleft$

⁶ $C_c^k(\Omega) := C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$

$L_{loc}^p(\Omega)$ é o espaço das funções que são $L^p(K)$ para qualquer compacto $K \subset \Omega$

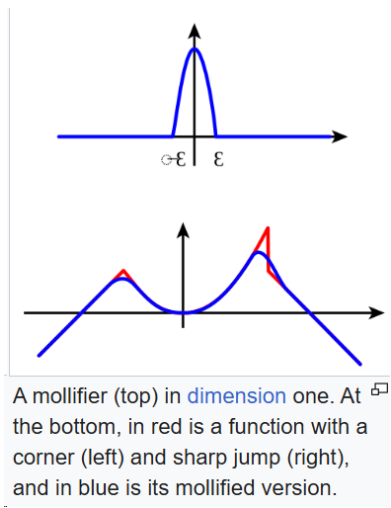


Figura 4: [Wikipedia](#)

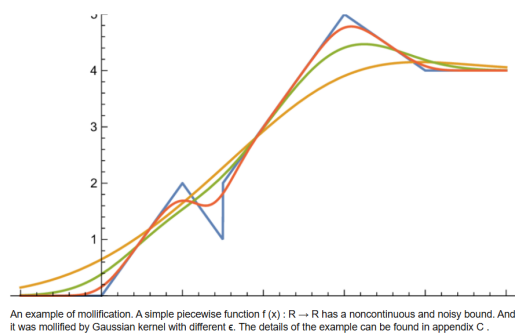


Figura 5: em azul a função f , [artigo Axiomatization of Gradient Smoothing in Neural Networks](#)

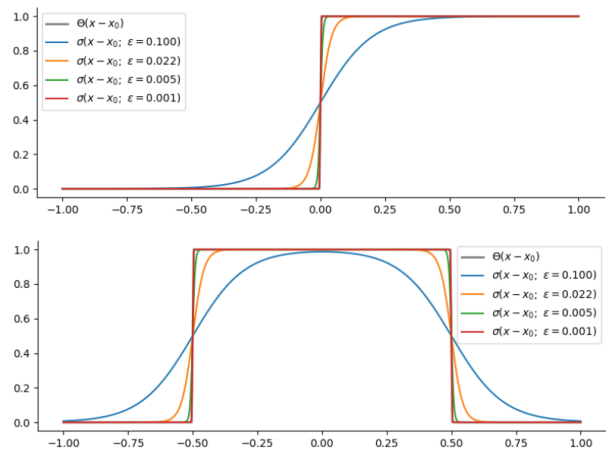


Figura 6: verde: $n = 200$, [artigo Non-Differentiable Functions in Machine Learning](#)

Compactos em $\mathcal{C}(K)$: Arzelá-Ascoli

Um conjunto E num espaço métrico (X, d) , é dito **totalmente limitado** se, para cada $\epsilon > 0$, E pode ser coberto por um número finito de bolas de raio ϵ .

Teorema F6.10. *[Fol99, p.15] Um conjunto E num espaço métrico (X, d) , é compacto se e só se é completo e tot. limitado.*

◁

E totalmente limitado $\Rightarrow$ E limitado
 $\nRightarrow$

E totalmente limitado $\iff \overline{E}$ totalmente limitado

Definição F6.11. Uma família $\mathcal{F}$ de funções é dita

- **equicontínua em x** se para todo $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança U de x tal que $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ para $y \in U$ e $f \in \mathcal{F}$,
- **equicontínua** se for equicontínua em todo ponto
- **pontualmente limitada** se $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ é limitado para todo x . ★

Teorema F6.12 [Arzelá-Ascoli]. *[Fol99, p.137] Se K é um espaço compacto e Hausdorff e $\mathcal{F}$ uma família equicontínua e pontualmente limitada em $(\mathcal{C}(K), \| \cdot \|_\infty)$, então $\mathcal{F}$ é totalmente limitada e seu fecho é compacto ($\mathcal{F}$ é relativamente compacto).*

◁

F7 Compactos em L^p : Fréchet-Kolmogorov

Teorema F7.1 [Fréchet-Kolmogorov]. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, $\omega \subset\subset \Omega$ ⁷ e $1 \leq p < \infty$. Se $\mathcal{F} \subseteq L^p(\Omega)$ satisfaz:

- $\mathcal{F}$ é limitado
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \delta < \text{dist}(\omega, \partial\Omega)$ tal que

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon, \quad \forall h \in \mathbb{R}^N \text{ com } |h| < \delta \text{ e } \forall f \in \mathcal{F}. \quad (\text{F7.1})$$

Então $\mathcal{F}|_\omega$ é relativamente compacto em $L^p(\omega)$, i.e., $\overline{\mathcal{F}|_\omega}$ é compacto. $\triangleleft$

Demonstração.

- $\overline{\mathcal{F}|_\omega}$ é completo (L^p é completo)

Exerc. A2.12 Um subconj. fechado de um espaço métrico completo é completo

Basta mostrar que $\mathcal{F}|_\omega$ é totalmente limitado

Dado $\varepsilon > 0$ queremos $f_1, \dots, f_l \in L^p(\omega)$;

$$\mathcal{F}|_\omega \subset \bigcup_{j=1}^l B_\varepsilon(f_j)$$

- **SPG: Ω limitado**

$$\bar{\omega} \subset \Omega \text{ e } \bar{\omega} \subset B_n(0)$$

$$\tilde{\Omega} = \Omega \cap B_n(0) \text{ é aberto, limitado e } \omega \subset\subset \tilde{\Omega}$$

- $f \in \mathcal{F}$
- $\tilde{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

⁷ $\omega \subset\subset \Omega$ significa que ω é aberto e $\bar{\omega}$ é um compacto contido em Ω .

- $\tilde{\mathcal{F}} := \{\tilde{f} : f \in \mathcal{F}\}$

Af. 1. $\tilde{\mathcal{F}}$ é limitado em $L^p(\mathbb{R}^N)$ e em $L^1(\mathbb{R}^N)$

Af. 2. para cada $n \in \mathbb{N}$, (ρ_n uma seq. regularizante)

$$\rho_n * \tilde{\mathcal{F}} = \{\rho_n * f : f \in \tilde{\mathcal{F}}\}$$

é equicontínua e pontualmente limitada em $C(\mathbb{R}^N)$, logo

$$\mathcal{H}_n := (\rho_n * \tilde{\mathcal{F}})|_{\bar{\omega}}$$

é equicontínua e pontualmente limitada em $C(\bar{\omega})$

- $\mathcal{H}_n$ é relativamente compacto em $C(\bar{\omega})$ ($\bar{\omega}$ compacto, T. Ascoli-Arzelá)
- $\overline{\mathcal{H}_n}$ é totalmente limitado em $C(\bar{\omega})$
- $\overline{\mathcal{H}_n}$ (e $\therefore \mathcal{H}_n$) é totalmente limitado em $L^p(\omega)$: $\exists f_1^n, \dots, f_l^n \in L^p(\omega)$; ($\mu(\Omega) < \infty$, Ω lido)

$$\mathcal{H}_n \subset \bigcup_{j=1}^l B_{\epsilon/2}(f_j^n)$$

Ideia: queremos $\|f|_{\omega} - f_j\| < \epsilon$ para algum j

$$\|f|_{\omega} - f_j\|_{L^p(\omega)} \leq \underbrace{\|f|_{\omega} - h_n\|_{L^p(\omega)}}_{??} + \underbrace{\|h_n - f_j\|_{L^p(\omega)}}_{ok!!}$$

$$h_n = \rho_n * \tilde{f}$$

$$f|_{\omega} = \tilde{f}|_{\omega}$$

$$(\omega \subset \Omega, f|_{\Omega} = \tilde{f}|_{\Omega})$$

Af. 3. dada $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}}|_{\omega}$, $\left\| \tilde{f} - \rho_n * \tilde{f} \right\|_{L^p(\omega)} < \frac{\epsilon}{2}$, se $n > \frac{1}{\delta}$

Af. 4. As convenientes bolas correspondentes de raio ϵ cobrem $\tilde{\mathcal{F}}|_{\omega}$ em $L^p(\omega)$

- $\tilde{\mathcal{F}}|_{\omega} = \mathcal{F}|_{\omega}$
- $\mathcal{F}|_{\omega} \subset \bigcup_{j=1}^l B_{\epsilon}(f_j^n)$, $\mathcal{F}|_{\omega}$ é totalmente limitado

Prova da Af.1. $\tilde{\mathcal{F}}$ é limitado em $L^p(\mathbb{R}^N)$ e em $L^1(\mathbb{R}^N)$

- $\|\tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^p(\Omega)}$

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

- $(\mu(\Omega) < \infty, \text{ limitado})$

$$\|\tilde{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{f}| = \int_{\Omega} |f| \cdot 1 \stackrel{\text{Holder}}{\leq} \|f\|_{L^p(\Omega)} \left(\int_{\Omega} 1 \right)^{1/q} = \|f\|_{L^p(\Omega)} \underbrace{\mu(\Omega)}_{\text{const.}}$$

- $\mathcal{F}$ é limitado em $L^p(\Omega)$ $\therefore$ vale Af.1.:

$$\|\tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \text{constante}, \quad \forall \tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}} \quad (\text{para } p = 1 \text{ e } p \neq 1)$$

(hipótese)

Prova da Af.2. para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\rho_n * \tilde{\mathcal{F}} = \{\rho_n * f : f \in \tilde{\mathcal{F}}\}$$

é equicontínua e pontualmente limitada em $C(\mathbb{R}^N)$

Passo 1: $\rho_n * \tilde{\mathcal{F}} \subset C(\mathbb{R}^N)$

- $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}}, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$ (dado $\varepsilon > 0$ tome $\delta = \frac{\varepsilon}{C_n}$)

$$\begin{aligned} |\rho_n * \tilde{f}(x_1) - \rho_n * \tilde{f}(x_2)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\rho_n(x_1 - y) - \rho_n(x_2 - y)| |\tilde{f}(y)| dy \\ &\stackrel{\text{TVM}}{=} \int_{z \in [x_1 - y, x_2 - y]} |\nabla \rho_n(z) \cdot (x_1 - y - (x_2 - y))| |\tilde{f}(y)| dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla \rho_n\|_{\infty} \|x_1 - x_2\| |\tilde{f}(y)| dy \\ &= \underbrace{\|\nabla \rho_n\|_{\infty} \|\tilde{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}}_{\text{const. } C_n} \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

Passo 2: $\rho_n * \tilde{\mathcal{F}}$ é equicontínuo

■ $\tilde{\mathcal{F}}$ é limitado em $L^1(\Omega)$ (Af. 1.)

$$\|\tilde{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq C, \quad \forall \tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}}$$

■

$$\begin{aligned} |\rho_n * \tilde{f}(x_1) - \rho_n * \tilde{f}(x_2)| &\leq \underbrace{\|\nabla \rho_n\|_\infty}_{const.C_n} \|\tilde{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|x_1 - x_2\| \\ &\leq C_n C \|x_1 - x_2\|, \quad \forall \tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}} \end{aligned}$$

Passo 3: $\rho_n * \tilde{\mathcal{F}}$ é pontualmente limitada (equilimitada)

■

$$|\rho_n * \tilde{f}(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\rho_n(x-y)| |\tilde{f}(y)| dy \leq \underbrace{\|\rho_n\|_\infty}_{C_n} \|\tilde{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq C_N C$$

*Prova da Af. 3. dada $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}}|_\omega$, $\|\tilde{f} - \rho_n * \tilde{f}\|_{L^p(\omega)} < \frac{\epsilon}{2}$, se $n > \frac{1}{\delta}$*

$$\bullet \left\| \tilde{f} - \rho_n * \tilde{f} \right\|_{L^p(\omega)}^p = \int_\omega |(\rho_n * \tilde{f})(x) - \tilde{f}(x)|^p dx$$

$$|(\rho_n * \tilde{f})(x) - \tilde{f}(x)| = ?$$

$$Eq.(F6.1): \quad (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy$$

$$P.F6.2: \quad f * g = g * f$$

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} g(x-y)f(y)dy$$

•

$$\begin{aligned}
|(\rho_n * \tilde{f})(x) - \tilde{f}(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}(x-y) \rho_n(y) dy - \tilde{f}(x) \right| \\
&\stackrel{\int \rho_n = 1}{=} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}(x-y) \rho_n(y) dy - \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y) \tilde{f}(x) dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(y)| |\rho_n(y)| dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \underbrace{|\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(y)|}_{\in L^p} |\rho_n(y)|^{1/p} \underbrace{|\rho_n(y)|^{1/q}}_{\in L^q} dy \\
&\stackrel{Holder}{\leq} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(y)|^p |\rho_n(y)| dy \right)^{1/p} \\
&\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\rho_n(y)| dy \right)^{1/q} \\
&\stackrel{\int \rho_n = 1}{=} \left(\int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} |\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(y)|^p |\rho_n(y)| dy \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
\left\| \tilde{f} - \rho_n * \tilde{f} \right\|_{L^p(\omega)}^p &\leq \int_{\omega} \int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} |\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(y)|^p |\rho_n(y)| dy dx \\
&\stackrel{Fubini}{=} \int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} |\rho_n(y)| \left[\int_{\omega} |\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(y)|^p dx \right] dy \\
&\stackrel{(\tau_h f)(x) := f(x+h)}{=} \int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} |\rho_n(y)| \underbrace{\|\tau_{-y} f - f\|_{L^p(\omega)}^p}_{\tilde{f}|_{\omega} = f} dy
\end{aligned}$$

hipótese: $\forall \varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists \delta > 0, \delta < \text{dist}(\omega, \partial\Omega)$ tal que

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon, \quad \forall h \in \mathbb{R}^N \text{ com } |h| < \delta \text{ e } \forall f \in \mathcal{F}.$$

hipótese da Af. 3.: $n > \frac{1}{\delta}$

- $|y| < \frac{1}{n} < \delta$

$$\left\| \tilde{f} - \rho_n * \tilde{f} \right\|_{L^p(\omega)}^p \leq \left(\frac{\epsilon}{2} \right)^p \int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} |\rho_n(y)| dy = \left(\frac{\epsilon}{2} \right)^p \quad \text{se } n > \frac{1}{\delta}$$

Prova Af. 4. As convenientes bolas correspondentes de raio ϵ cobrem $\tilde{\mathcal{F}}|_\omega$ em $L^p(\omega)$

- $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}}|_\omega$
- fixe $n_0 > \frac{1}{\delta}$
- $h_{n_0} := \rho_{n_0} * \tilde{f} \in \mathcal{H}_{n_0} \subset \bigcup_{j=1}^l B_{\epsilon/2}(f_j^{n_0})$
- $h_{n_0} = \rho_{n_0} * \tilde{f} \in B_{\epsilon/2}(f_j^{n_0})$ para algum $j = j(\tilde{f})$
-

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{f} - f_j^{n_0} \right\|_{L^p(\omega)} &\leq \left\| \tilde{f} - \rho_{n_0} * \tilde{f} \right\|_{L^p(\omega)} + \left\| \rho_{n_0} * \tilde{f} - f_j^{n_0} \right\|_{L^p(\omega)} \\ &\stackrel{Af.3}{\leq} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

- $\tilde{f} \in B_\epsilon(f_j^{n_0})$
- $\tilde{\mathcal{F}}|_\omega \subset \bigcup_{j=1}^l B_\epsilon(f_j^{n_0})$

□

Observação F7.2. $\mathcal{X}_{[n,n+1]}$ em $\mathbb{R}$ satisfaz as hipóteses, mas não possui subsequência convergente. O mesmo com $n\mathcal{X}_{(0,1/n)}$ em $L^1((0,1))$.

Para concluir a compacidade em $L^p(\Omega)$ precisa uma condição a mais: ★

Corolário F7.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $1 \leq p < \infty$. Se $\mathcal{F} \subseteq L^p(\Omega)$ é limitado, satisfaz (F7.1) para todo $\omega \subset\subset \Omega$ e além disso vale:*

$$\text{dado } \varepsilon > 0, \text{ existe } \omega \subset\subset \Omega \text{ tal que } \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} < \varepsilon. \quad (\text{F7.2})$$

Então $\mathcal{F}$ é relativamente compacto em $L^p(\Omega)$. ◁

Proposição F7.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $1 \leq p < \infty$. Se $\mathcal{F}$ é relativamente compacto em $L^p(\Omega)$, então satisfaz as condições do Corolário F7.3.*

◁

Exercícios

Exercício F7.5. Prove a Proposição acima (ex. 4.34 do [Bre11]). ★

Um exemplo de compacto pode ser obtido da seguinte forma:

Corolário F7.6. *Seja $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ uma função fixa e $\mathcal{B}$ um subconjunto limitado de $L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$. Se*

$$\mathcal{F} = g * \mathcal{B} := \{g * b : b \in \mathcal{B}\},$$

então $\mathcal{F}|_\omega$ é relativamente compacto em $L^p(\omega)$ para todo $\omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado. ◁

Referências

- [Bre11] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011, pp. xiv+599. ISBN: 978-0-387-70913-0.
- [Fol99] G. B. Folland. *Real analysis*. Second. Pure and Applied Mathematics (New York). Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, pp. xvi+386. ISBN: 0-471-31716-0.

Lista dos teoremas

F1.1	Proposição	F3
	Proposição	F3
F1.2	Proposição	F3
F1.3	Definição (q.t.p)	F5
F1.4	Teorema (da Convergência Monótona)	F5
F1.5	Proposição	F5
F1.6	Lema (de Fatou)	F5
F1.7	Teorema (da Convergência Dominada)	F5
F1.8	Teorema (de Fubini-Tonelli)	F6
F1.9	Definição (truncamento)	F6
F1.10	Definição (suporte/sup. compacto)	F6
F2.1	Lema (Hölder - integral)	F7
F2.2	Lema (Minkowski - integral)	F7
F2.3	Observação	F7
F2.4	Observação	F8
F2.5	Observação (Algumas obs. simples)	F8
F2.10	Teorema (Fischer-Riesz)	F11
F2.11	Proposição (“Recíproca” da conv. dominada)	F16
F3.1	Teorema (Refl. L^p)	F16
F3.2	Teorema (Dual de L^p)	F16
F3.3	Lema (1a des. de Clarkson)	F17
F3.4	Corolário	F17
F3.5	Corolário	F17
F3.6	Lema	F18
F3.7	Corolário	F18
F3.8	Proposição	F18
F3.9	Teorema (de Representação de Riesz)	F19

F3.10	Observação (Clarkson)	F20
F4.1	Proposição (simples densas em L^p)	F31
F4.2	Corolário (Separab. L^p)	F36
F4.3	Proposição (Não separab. L^∞)	F36
F4.4	Proposição (C_c denso em L^p)	F37
F6.1	Definição (Suporte, convol, transl.)	F44
F6.2	Proposição (convolução)	F44
F6.3	Teorema (convolução em L^p)	F44
F6.4	Definição (seq. regularizante)	F48
F6.5	Exemplo	F48
F6.6	Proposição (convolução $\mathcal{C}_c$ - L^1)	F49
F6.7	Proposição (conv. seq. regularizada)	F49
F6.8	Corolário (C_c^∞ denso em L^p)	F49
F6.9	Corolário (função test em C_c^∞)	F49
F6.10	Teorema	F51
F6.11	Definição	F51
F6.12	Teorema (Arzelá-Ascoli)	F51
F7.1	Teorema (Fréchet-Kolmogorov)	F52
F7.2	Observação	F58
F7.3	Corolário	F58
F7.4	Proposição (Reciproca)	F58
F7.6	Corolário	F58

Lista dos exercícios

F2.6	Exercício	F8
F2.7	Exercício	F8
F2.8	Exercício	F8
F2.9	Exercício	F8
F3.11	Exercício	F20
F3.12	Exercício	F20
F4.5	Exercício	F39
F4.6	Exercício	F39
F4.7	Exercício	F39
F5.1	Exercício (EF1)	F43
F5.2	Exercício (Espaços L^p : B,S,R,U.C.)	F43

F7.5 Exercício F58