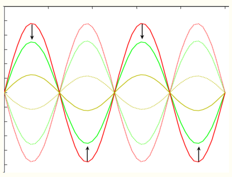
Conteúdo

Veja na apostila de EDP - Prof. Massa explicação de como as "**equações da onda e do calor**" aparecem em modelos físicos:

p. 51 a 54:

- Vibração de varinha: modelando um corpo elástico em dimensão um
- Corda vibrante: modelando uma corda que vibra transversalmente

(Figura da internet)  (Um video sobre corda vibrante)

- Membrana vibrante: modelando uma membrana (bi-dimensional) que vibra transversalmente
- Campos eletro-magnético no vácuo
- Calor/difusão: modelando a difusão de um poluente num meio

p. 82 - 83:

- Entendendo a vibração de uma corda de guitarra usando a solução da equação da onda

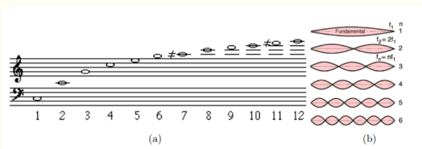


Figura 5.1: Harmônicas de Do_2.

E1 Equações do calor e da onda

Problema de valores iniciais e de fronteira para a **equação do calor**

$$\begin{cases} u_t - \alpha u_{xx} = 0, & t > 0, x \in (0, \pi)\,, \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in (0,\pi)\,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0\,; \end{cases} \tag{E1.1}$$

Possível interpretação:
- u indica temperatura de uma varinha na posição x no instante t,
- extremos da varinha em 0 e π com temperatura fixada a 0 (E1.1-3),
- temperatura inicial nos demais pontos da varinha é ϕ (E1.1-2),
- α indica condutividade/calor.específico da varinha.

Trocando a condição **de Dirichlet** (E1.1-3) por $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ (condição **de Neumann**), o extremo é isolado (não tem passagem de calor[1]).

Problema de valores iniciais e de fronteira para a **equação da onda**

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2\, u_{xx} = 0, & t > 0, x \in (0, \pi)\,, \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in (0,\pi)\,, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in (0,\pi)\,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0\,; \end{cases} \tag{E1.2}$$

Possível interpretação:
- u indica o deslocamento de uma corda de guitarra,
- extremos da corda **fixados** em 0 e em π (E1.2-4),
- posição inicial nos demais pontos da corda é ϕ (E1.2-2),
- velocidade inicial nos demais pontos da corda é ψ (E1.2-3),
- c^2 indica tensão/peso da corda.

Trocando a condição (E1.2-4) por $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ o extremo é solto (movimento transversal livre)

[1] o fluxo de calor é proporcional á derivada da temperatura

E1.1 O método de separação das variáveis

1) chute: solução $u(x,t) = X(x)\,T(t)$ (a variáveis separadas);

2) substituímos na equação;

3) manipulamos a equação até chegar numa igualdade do tipo

$$F(D^i X(x)|_{i\le k}) = G(D^i T(t)|_{i\le k}) :$$

isso implica que os dois lados da igualdade devem ser constantes, obtemos então duas EDOs.

- Se a equação for linear e homogênea, poderemos sobrepor diferentes soluções a variáveis separadas, isto é:

equação linear: o grau da variável é 1, ou seja, as derivadas não possuem potência > 1

equação homogênea: as EDO's (em X ou T) são iguais a zero e não a alguma função

no caso do chute $u(x,t) = X(x)\,T(t)$

- conhecendo-se as soluções das EDO's (digamos X_n e T_n), então:

- os produtos $X_n T_n$ serão soluções da equação calor/onda

e pela linearidade:

a sobreposição das soluções ($\sum X_n T_n$) será solução da equação calor/onda

equação do calor é a EDP: $u_t - \alpha u_{xx} = 0$

equação da onda é a EDP: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ [2]

[2] α e c^2 são constantes positivas e o quadrado na constante c é por conveniência para quando escrever a solução da equação.

E1.1.1 Resolvendo as EDP's

Substituindo o chute $u(x,t) = X(x)\,T(t)$:

- na equação do calor:

$$X(x)T'(t) - \alpha X''(x)T(t) = 0\,.$$

obtemos

$$\frac{1}{\alpha}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} := -\lambda \tag{E1.3}$$

- na equação da onda:

$$X(x)T''(t) - c^2 X''(x)T(t) = 0\,.$$

Supondo $X \neq 0$ e $T \neq 0$ obtemos

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} := -\lambda \tag{E1.4}$$

E1.2 Condição de extremo não isolado/preso (condição de Dirichlet)

Em ambos casos (calor ou onda) e considerando as condições iniciais $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, precisamos estudar o PVI:

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X & em \;\; (0,\pi), \\ X(0) = 0 = X(\pi)\,, \end{cases} \tag{E1.5}$$

onde λ é um parâmetro real.

As únicas soluções são do tipo $C\sin(\sqrt{\lambda}x)$, com $\lambda = n^2,\; n \in \mathbb{N},\; C \in \mathbb{R}$.

- Resolvendo $T' = -\alpha n^2 T$ obtemos soluções da forma $Ae^{-\alpha n^2 t}$, para o calor,

- resolvendo $T'' = -c^2 n^2 T$ obtendo soluções da forma $A\cos(c\,n\,t) + B\sin(c\,n\,t)$ parta a onda.

E1.2.1 Solução dos PVIF's

Obtivemos então
- soluções da equação do calor da forma

$$Ae^{-\alpha n^2 t}\sin(nx)\,,$$

que correspondem a $\phi(x) = A\sin(nx)$

e
- soluções da equação da onda da forma

$$[A\cos(c\,n\,t) + B\sin(c\,n\,t)]\sin(nx)\,,$$

que correspondem a $\phi(x) = A\sin(nx)$ e $\psi(x) = cnB\sin(nx)$.

Como os problemas são lineares, também combinações lineares de soluções são soluções. Chegamos então nos seguintes resultados.

Se, no caso do calor, a condição inicial for

$$u(x,0) = \phi(x) = \sum_{n\in N} a_n \sin(nx)\,, \tag{E1.6}$$

então a (única) solução será (?)

$$u(x,t) = \sum_{n\in N} a_n e^{-\alpha n^2 t}\sin(nx)\,. \tag{E1.7}$$

Observação E1.1 (Soma finita ou infinita)**.** Se N tem cardinalidade finita, então a igualdade em (E1.7) é sempre válida. Se $N = \mathbb{N}$, a igualdade em (E1.7) é garantida nas condições do teorema abaixo. ★

Teorema E1.2 [Solução PVIF para equação do calor]. *Se em (E1.6) $\sum_{n\in N}|a_n|$ converge, então a série em (E1.7) converge uniformemente a uma função contínua em $[0,\pi]\times[0,\infty)$ e infinitas vezes derivável em $[0,\pi]\times(0,\infty)$, e é solução de (E1.1).* ◁

No caso da onda, com condições

$$u(x,0) = \phi(x) = \sum_{n\in N} a_n \sin(nx), \qquad u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n\in N} b_n \sin(nx) \tag{E1.8}$$

teremos a (única) solução (?)

$$u(x,t) = \sum_{n\in N} \left[a_n \cos(c\,n\,t) + \frac{b_n}{cn} \sin(c\,n\,t) \right] \sin(nx)\,. \tag{E1.9}$$

Teorema E1.3 [Solução PVIF para equação da onda]. *Se em* (E1.8) $\sum_{n\in N} n^2|a_n|$ *e* $\sum_{n\in N} n|b_n|$ *convergem então a série em* (E1.9) *converge uniformemente a uma função contínua e com derivadas de primeira e segunda ordens contínuas em* $[0,\pi]\times[0,\infty)$ *e é solução de* (E1.2). $\triangleleft$

Observação E1.4. As hipóteses do Teorema E1.3 implicam que $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ e $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, de fato estas são condições conhecidas para obter soluções do problema da onda.

As hipóteses do Teorema E1.2 são bem mais fracas, de fato para o calor é suficiente uma condição inicial contínua para ter soluções, as quais são sempre infinitas vezes deriváveis. ★

Observação E1.5. Se for dada ϕ (ou ψ) em $[0,\pi]$ podemos sempre escrevê-la como em (E1.6) (ou (E1.8)), prolongando-a até $[-\pi,0]$ de forma ímpar e calculando a série de Fourier da função resultante, que será uma série só de senos. ★

Observação E1.6 (Solução Generalizada)**.** Mesmo quando as hipóteses dos Teoremas E1.2 e E1.3 não valem, podemos escrever as séries em (E1.7) e (E1.9) e usá-las como definição de "solução generalizada" dos PVIF (E1.1) e (E1.2).

De fato, a solução generalizada pode representar uma aproximação da solução do problema físico considerado, mesmo não satisfazendo exatamente os problemas nas formas (E1.1) ou (E1.2).

★

E1.3 Condição de extremo isolado/solto (condição de Neumann)

Se trocamos a condição nos extremos de $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ para

$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0,$$

precisamos estudar o PVI:

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X & em \quad (0,\pi), \\ X'(0) = 0 = X'(\pi)\,, \end{cases} \tag{E1.10}$$

onde λ é um parâmetro real.

Análogo ao caso anterior, as únicas soluções são do tipo

$$C\cos(\sqrt{\lambda}\pi), \qquad \text{com } \lambda = n^2,\ n \in \mathbb{N} \cap \{0\},\ C \in \mathbb{R}$$

(note que para $n = 0$ a solução é constante!)

Obtemos então
- soluções da equação do calor da forma

$$B\,,\ n = 0, \quad \text{e} \quad Ae^{-\alpha n^2 t}\cos(nx)\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

que correspondem a $\phi(x) = A\cos(nx)$

e

- soluções da equação da onda da forma

$$D + Ct\,,\ n = 0, \quad \text{e} \quad [A\cos(c\,n\,t) + B\sin(c\,n\,t)]\cos(nx)\,, \quad n \in \mathbb{N},$$

que correspondem a $\phi(x) = A\cos(nx)$ e $\psi(x) = cnB\cos(nx)$

Podemos obter resultados análogos aos vistos na Seção E1.2, em particular:

> se for dada ϕ (ou ψ) em $[0,\pi]$, podemos prolongar até $[-\pi,0]$ de forma par e obter agora uma série só de cossenos.

A saber:

Se, no caso do calor, a condição inicial for

$$u(x,0) = \phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\in N} a_n \cos(nx)\,, \tag{E1.11}$$

então a (única) solução será (?)

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\in N} a_n e^{-\alpha n^2 t} \cos(nx)\,. \tag{E1.12}$$

A mesma hipótese do Teorema E1.2 garante a convergência uniforme da série acima para a solução do PVIF para a equação do calor com condição de Neumann.

No caso da onda, com condições

$$u(x,0) = \phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\in N} a_n \cos(nx), \quad u_t(x,0) = \psi(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n\in N} b_n \cos(nx) \tag{E1.13}$$

teremos a (única) solução (?)

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \frac{b_0}{2}t + \sum_{n\in N} \left[a_n \cos(c\,n\,t) + \frac{b_n}{cn}\sin(c\,n\,t)\right]\cos(nx)\,. \tag{E1.14}$$

As mesmas hipóteses do Teorema E1.3 garante a convergência uniforme da série acima para a solução do PVIF para a equação da onda com condição de Neumann.

E1.4 Soluções dos PVIF para as equações do calor e da onda em $(0, L)$ com as condições de Dirichlet e de Neumann homogêneas

A mesma hipótese do Teorema E1.2 garante a convergência uniforme das séries abaixo para a solução dos seguintes PVIF:

A solução do PVIF para a equação do calor com condição de Dirichlet

$$\begin{cases} u_t - \alpha u_{xx} = 0 & \text{para } x \in (0, L),\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{para } t \geq 0 \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{para } x \in (0, L) \end{cases}$$

é (?)

$$u(x,t) = \sum_{n \in N} a_n e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2 t}{L^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

onde a série de Fourier de senos de ϕ tem coeficientes a_n.

A solução do PVIF para a equação do calor com condição de Neumann

$$\begin{cases} u_t - \alpha u_{xx} = 0 & \text{para } x \in (0, L),\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 & \text{para } t \geq 0 \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{para } x \in (0, L) \end{cases}$$

é (?)

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \in N} a_n e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2 t}{L^2}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

onde a série de Fourier de cossenos de ϕ tem coeficientes a_n $(n \in N \cup \{0\})$.

As mesmas hipóteses do Teorema E1.2 garante a convergência uniforme das séries abaixo para a solução u:

A solução do PVIF para a equação da onda com condição de Dirichlet

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} & \text{para } x \in (0, L),\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{para } t \geq 0 \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{para } x \in (0, L) \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \text{para } x \in (0, L). \end{cases}$$

é (?)

$$u(x,t) = \sum_{n \in N} \left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) + \frac{L}{cn\pi} b_n \sin\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

onde a série de Fourier de senos de ϕ tem coeficientes a_n e a série de Fourier de senos de ψ tem coeficientes b_n.

A solução do PVIF para a equação da onda com condição de Neumann

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{para } x \in (0, L),\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 & \text{para } t \geq 0 \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{para } x \in (0, L) \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \text{para } x \in (0, L). \end{cases}$$

é (?)

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \frac{b_0}{2} t + \sum_{n \in N} \left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) + \frac{L}{cn\pi} b_n \sin\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

onde a série de Fourier de cossenos de ϕ tem coeficientes a_n e a série de Fourier de cossenos de ψ tem coeficientes b_n ($n \in N \cup \{0\}$).

E1.5 Solução do PVIF para a equação do calor com condição de Dirichlet não homogênea

$$\begin{cases} u_t - \alpha u_{xx} = 0, & t > 0, x \in (0, L)\,, \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in (0, L)\,, \\ \underline{u(0,t) = T_1, \quad u(L,t) = T_2}, & t \geq 0\,; \end{cases} \tag{E1.15}$$

- A solução estacionária do PVI:

$$\begin{cases} u_t - \alpha u_{xx} = 0, & t > 0, x \in (0, L)\,, \\ u(0,t) = T_1, u(L,t) = T_2 & t \geq 0\,; \end{cases}$$

  isto é, a solução que não varia com o tempo é da forma

$$u(x,t) = v(x),$$

  onde v é então a solução do PVI

$$\begin{cases} v''(x) = 0, & t > 0, x \in (0, L)\,, \\ v(0) = T_1, v(L) = T_2 & t \geq 0\,; \end{cases}$$

  que é dada por

$$v(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

- A solução de (E1.15) será então da forma

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t),$$

  onde w é solução do PVIF para eq. do calor com condição de Dirichlet homogênea:

$$\begin{cases} w_t - \alpha w_{xx} = 0, & t > 0, x \in (0, L)\,, \\ w(x,0) = \phi(x) - v(x), & x \in (0, L)\,, \\ w(0,t) = 0 = w(L,t), & t \geq 0\,; \end{cases}$$

- Portanto

A solução do PVIF para a equação do calor com condição de Dirichlet não homogênea

$$\begin{cases} u_t - \alpha u_{xx} = 0 & \text{para } x \in (0, L),\ t > 0 \\ u(0,t) = T_1, \quad u(L,t) = T_2 & \text{para } t \geq 0 \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{para } x \in (0, L) \end{cases}$$

é

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t),$$

onde

$$v(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

é a correspondente **solução estacionária** e w é a solução do PVIF para a equação do calor com condição de Dirichlet homogênea (**solução transiente**):

$$\begin{cases} w_t - \alpha w_{xx} = 0 & \text{para } x \in (0, L),\ t > 0 \\ u(0,t) = 0 = w(L,t) & \text{para } t \geq 0 \\ w(x,0) = \phi(x) - v(x) & \text{para } x \in (0, L), \end{cases}$$

ou seja,

$$w(x,t) \stackrel{(?)}{=} \sum_{n \in N} a_n e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2 t}{L^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

onde a série de Fourier de senos de $\phi - v$ tem coeficientes a_n.

A mesma hipótese do Teorema E1.2 garante a convergência uniforme da série acima para a solução w.

Observação E1.7 (Interpretação física da solução do PVIF para a equação do calor)**.**

Considerando a solução generalizada:

1. No caso da equação do calor com condição de Dirichlet homogênea (varinha com extremos fixados a 0^o, não isolados): quando $t \to \infty$ a temperatura da varinha (solução) tende à zero,
$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$$
"passando pelo seno"(veja solução do problema quando $\phi(x) = 3$ em $[0, \pi]$, $\alpha = 1$, no Geogebra).

2. No caso da equação do calor com condição de Neumann homogênea (varinha com extremos isolados): quando $t \to \infty$ a temperatura da varinha (solução) tende à média,
$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{a_0}{2},$$
"passando pelo cosseno"(veja solução do problema quando $\phi(x) = x$ em $[0, \pi]$, $\alpha = 1$, no Geogebra).

3. No caso da equação do calor com condição de Dirichlet não homogênea (varinha com extremos fixados a temperaturas diferentes, não isolados): quando $t \to \infty$ a temperatura da varinha (solução) tende à temperatura estacionária (ou de equilíbrio),
$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = v(x),$$
ou seja, a temperatura da varinha tende a minimizar as oscilações já que na prática $w(x,t)$ "desaparece" com o passar do tempo (e daí o nome "solução transiente"). Também vale:
$$\lim_{t\to\infty} u_x(x,t) = v'(x)$$
(veja solução do problema quando $\phi(x) = 3$ em $[0, \pi]$, $u(0,t) = 0$, $u(\pi, t) = \pi$ $(v(x) = x)$, $\alpha = 1$, no Geogebra).

★

Conteúdo

Lista dos teoremas