Conteúdo

Objetivo

Introduzir um sistema de coordenadas no espaço Euclideano E^3.

Apresentar as diferentes formas de equação de reta:

- vetorial ou paramétrica ou simétrica,

e de equação de plano:

- vetorial ou paramétrica ou geral.

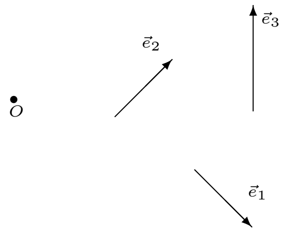
Estudar as posições relativas entre tais objetos.

R.1 Sistema de coordenadas

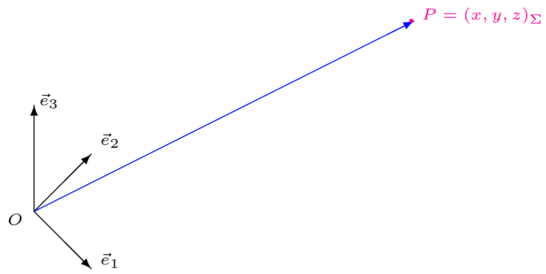
Aula 12

O sistema de coordenadas fornecerá um método para descrever pontos do espaço Euclideano E^3 através de números reais (ternas).

Sejam um ponto O de E^3 e $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3.



O par $\Sigma = (O, E)$ é chamado **sistema de coordenadas** em E^3, de **origem** O e base E.

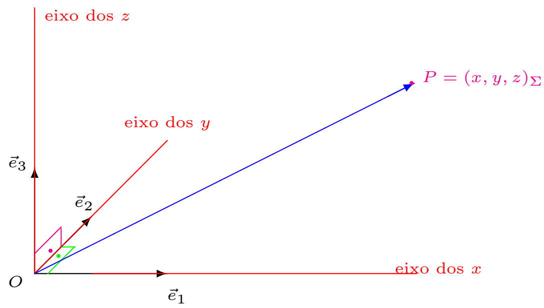


O sistema de coordenadas $\Sigma = (O, E)$ é dito **ortogonal** se a base E é **ortonornal**.

As **coordenadas do ponto** P em E^3 **no sistema de coordenadas** Σ são as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$ na base E. Escrevemos:

$$P = (x, y, z)_\Sigma \iff \overrightarrow{OP} = (x, y, z)_E. \tag{R.1.1}$$

As retas que passam por O e são paralelas aos vetores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ são chamadas **eixos coordenados**.
Cada um dos planos determinados por dois eixos coordenados chama-se **plano coordenado**.



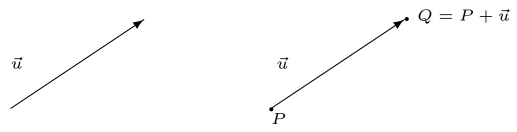
Exemplo R.1.1. [1] Ver Exercício 39 em Slide de Exercícios.

[1] Lembrar como somar vetores: Definição V.2.2 e Lei do Paralelogramo (Exemplo V.2.3)

R.1.1 Soma de ponto com vetor

Sejam P um ponto em E^3 e $\vec{u}$ um vetor em V^3.
A **soma de P com $\vec{u}$** é o (único) ponto[2] Q em E^3 tal que $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$:

$$P + \vec{u} = Q \iff \vec{u} = \overrightarrow{PQ}. \tag{R.1.2}$$



A seguir obtemos algumas propriedades utilizando as coordenadas de vetor e as coordenadas de ponto[3].

Proposição R.1.2.
Seja $\Sigma = (O, E)$ um sistema de coordenadas em E^3. Se

$$A = (x_1, y_1, z_1)_\Sigma, \quad B = (x_2, y_2, z_2)_\Sigma, \quad e \quad \vec{u} = (a, b, c)_E,$$

então

1. $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)_E$;

2. $A + \lambda\vec{u} = (x_1 + \lambda a, y_1 + \lambda b, z_1 + \lambda c)_\Sigma$, *onde* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lembre: a distância, $d(A, B)$, entre dois pontos A e B é o número real

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

---

[2] Veja Nota 1 em Slide 1
[3] Rever Seção B.1.1: Interpretação das propriedades de vetores usando coordenadas

Proposição R.1.3. *Seja $\Sigma = (O, E)$ um sistema de coordenadas ortogonal em E^3. Se*

$$A = (x_1, y_1, z_1)_\Sigma, \quad B = (x_2, y_2, z_2)_\Sigma,$$

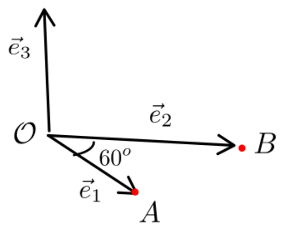
então

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Demonstração. Segue da Proposição R.1.2 e do Teorema P.2.3. □

Atenção: E se o sistema de coordenadas **não é ortogonal**?

Considere o sistema $\Sigma = (O, E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$, onde:



- $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ são vetores unitários,
- $\vec{e}_3$ é ortogonal a $\vec{e}_1, \vec{e}_2$;
- $ang(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \pi/3$.

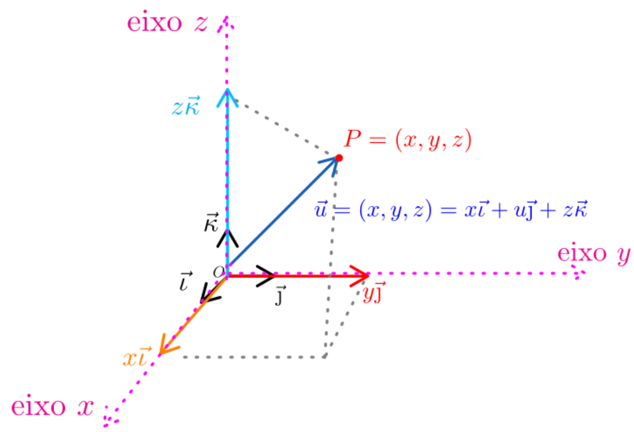
Se $(x_1, y_1, z_1)_\Sigma = A = O + \vec{e}_1$ e $(x_2, y_2, z_2)_\Sigma = B = O + \vec{e}_2$, então

$$d(A, B) = 1,$$

enquanto

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{2}.$$

Quando o sistema de coordenadas $\Sigma = (O, E)$ for *ortogonal* e a base E (ortonormal) for *positiva*, indicaremos $E = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$, chamada de **base canônica** de $V^3 \approx \mathbb{R}^3$ (p. D.7).



Fixado um **sistema ortogonal com base positiva**, usualmente não se escreve na notação de coordenadas de vetor ou de ponto os índices que indicam a base ou o sistema: assim a notação

$$(x, y, z)$$

pode representar as coordenadas do ponto

$$P = (x, y, z)_\Sigma$$

ou as coordenadas do vetor

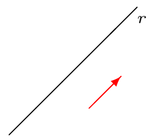
$$\vec{u} = \overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{\kappa} = (x, y, z)_E.$$

Cuidado para não confundir Ponto com Vetor!

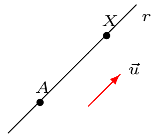
R.2 Retas

Objetivo: Dada uma reta r em E^3, encontrar uma equação para r.

Um vetor <u>não nulo</u> paralelo à reta r é chamado de **vetor diretor** de r.



R.2.1 Equação Vetorial



- $\vec{u}$ um vetor diretor de r
- A um ponto de r ($A \in r$)

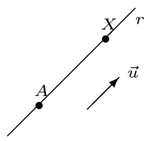
- $$\begin{aligned} X \neq A,\ X \in\ r &\iff \overrightarrow{AX} \text{ e } \vec{u} \text{ são paralelos} \\ &\iff \overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u} \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R} \\ &\overset{Eq.(R.1.2)}{\iff} X = A + \lambda\vec{u} \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A equação:

$$r\colon X = \mathbf{A} + \lambda\vec{u}, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \tag{R.2.1}$$

é chamada **equação vetorial da reta** r. O escalar λ é chamado **parâmetro** da reta.

Para as próximas equações da reta, considere fixado $\Sigma = (O, E)$ um sistema de coordenadas em E^3.



- $X = (x, y, z)_\Sigma$
- $A = (x_0, y_0, z_0)_\Sigma \in r$
- $\vec{u} = (a, b, c)_E \neq \vec{0}$ vetor diretor

R.2.2 Equações paramétricas

- Escrevendo a equação vetorial em coordenadas:

$$r\colon (x, y, z)_\Sigma = (\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0}, \mathbf{z_0})_\Sigma + \lambda(a, b, c)_E, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

O sistema:

$$r\colon \begin{cases} x = \mathbf{x_0} + \lambda a \\ y = \mathbf{y_0} + \lambda b, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \mathbf{z_0} + \lambda c \end{cases} \tag{R.2.2}$$

é chamado **sistema de equações paramétricas da reta** r (*equações paramétricas da reta* r.)

R.2.3 Equações simétricas

- $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0 \Longrightarrow$ é possível isolar λ nas equações em (R.2.2)

Se $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$, o sistema:

$$r\colon \frac{x - \mathbf{x_0}}{a} = \frac{y - \mathbf{y_0}}{b} = \frac{z - \mathbf{z_0}}{c} \tag{R.2.3}$$

é chamado **sistema de equações simétricas da reta** r (*equações simétricas da reta* r.)

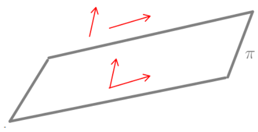
Exemplo R.2.1. Ver Exercício 40 em Slide de Exercícios.

R.3 Plano

Aula 13

Objetivo: Dado um plano π em E^3, encontrar uma equação para π.

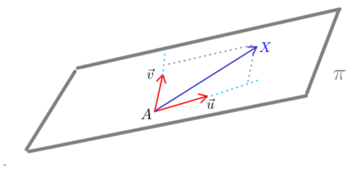
Dois vetores LI paralelos ao plano π são chamados **vetores diretores** de π.



A seguir deduzimos equações do plano π determinado pelos vetores diretores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e pelo ponto **A** $\in \pi$.

R.3.1 Equação Vetorial

- $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores diretores de π



- A um ponto de π
-

$$X \neq A,\ X \in \ \pi \overset{pag.D.3}{\iff} \overrightarrow{AX}, \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ são coplanares}$$

$$\underset{\vec{u},\vec{v} LI, base\, de\, V^2}{\overset{pag.D.4}{\iff}} \overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \text{ para algum } \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$$

$$\overset{def}{\iff} X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \text{ para algum } \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

A equação:

$$\pi\colon X = \mathbf{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \qquad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}, \tag{R.3.1}$$

é chamada **equação vetorial do plano** π. Os escalares λ e μ são chamados **parâmetros** do plano.

Para as próximas equações do plano π, considere fixado $\Sigma = (O, E)$ um sistema de coordenadas em E^3.

- $X = (x, y, z)_\Sigma$
- $\mathbf{A} = (x_0, y_0, z_0)_\Sigma$
- $\vec{u} = (r, s, t)_E, \quad \vec{v} = (m, n, p)_E$

R.3.2 Equações paramétricas

- Equação vetorial em coordenadas:

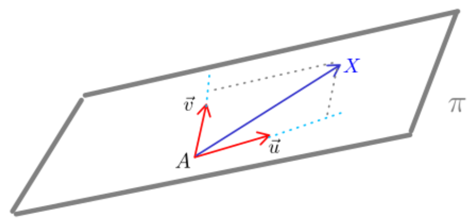
$$\pi\colon (x, y, z)_\Sigma = (x_0, y_0, z_0)_\Sigma + \lambda(r, s, t)_E + \mu(m, n, p)_E, \qquad \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}.$$

O sistema:

$$\pi\colon \begin{cases} x = \mathbf{x_0} + \lambda\, r + \mu\, m \\ y = \mathbf{y_0} + \lambda\, s + \mu\, n, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ z = \mathbf{z_0} + \lambda\, t + \mu\, p \end{cases} \tag{R.3.2}$$

é chamado **sistema de equações paramétricas do plano** π (*equações paramétricas do plano* π.)

R.3.3 Equação Geral



$$X \in \pi \overset{pag.D.3}{\iff} \overrightarrow{AX}, \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ são coplanares} \overset{Nota4-Slide2}{\iff} \overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v} \quad \text{são LD}$$

$$\overset{Prop.B.1.6}{\iff} \boxed{\begin{vmatrix} x-\mathbf{x_0} & y-\mathbf{y_0} & z-\mathbf{z_0} \\ r & s & t \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0}$$

$$\iff \underbrace{(sp-tn)}_{\mathbf{a}}x + \underbrace{(mt-rp)}_{\mathbf{b}}y + \underbrace{(rn-sm)}_{\mathbf{c}}z + \underbrace{(-ax_0-by_0-cz_0)}_{\mathbf{d}} = 0.$$

A equação[4]:

$$\pi\colon ax+by+cz+d=0, \tag{R.3.3}$$

onde

$$a = \begin{vmatrix} s & t \\ n & p \end{vmatrix}, \quad b = -\begin{vmatrix} r & t \\ m & p \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} r & s \\ m & n \end{vmatrix}, \quad d = -(ax_0+by_0+cz_0),$$

com $(x_0, y_0, z_0)_\Sigma \in \pi$ e $(r, s, t)_E$ e $(m, n, p)_E$ vetores diretores de π.

é chamada **equação geral do plano π**.

Exemplo R.3.1. Ver Exercícios 41 a 43 em Slide de Exercícios.

---

[4]Os números reais a, b, c não se anulam simultaneamente: veja Proposição B.1.4.

Resumindo:

$$\begin{cases} A = (x_0, y_0, z_0) \in \pi, \quad \vec{u} = (r, s, t)_E, \vec{v} = (m, n, p)_E \text{ vetores diretores de } \pi \\ \\ a := \begin{vmatrix} s & t \\ n & p \end{vmatrix}, \quad b := -\begin{vmatrix} r & t \\ m & p \end{vmatrix}, \quad c := \begin{vmatrix} r & s \\ m & n \end{vmatrix} \quad d := -(ax_0 + by_0 + cz_0) \\ \\ ax + by + cz + d = 0 \text{ é } \textbf{uma}^5 \text{ equação geral de } \pi \end{cases}$$

$$\overset{Prop. B.1.4}{\Longrightarrow} \begin{cases} a, b, c \text{ não se anulam simultaneamente } _{\text{(pois } \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ são LI)}} \\ \\ ax + by + cz + d = 0 \text{ é uma equação de } 1^o \text{ grau em } x, y, z \end{cases}$$

Pergunta: Dada uma equação de 1^o grau em três incógnitas x, y, z,

$$ax + by + cz + d = 0,$$

ela é equação geral de algum plano?

Aula 14

Proposição R.3.2. *Fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, E)$, toda equação de 1^o grau em três incógnitas, i.e.,*

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{R.3.4}$$

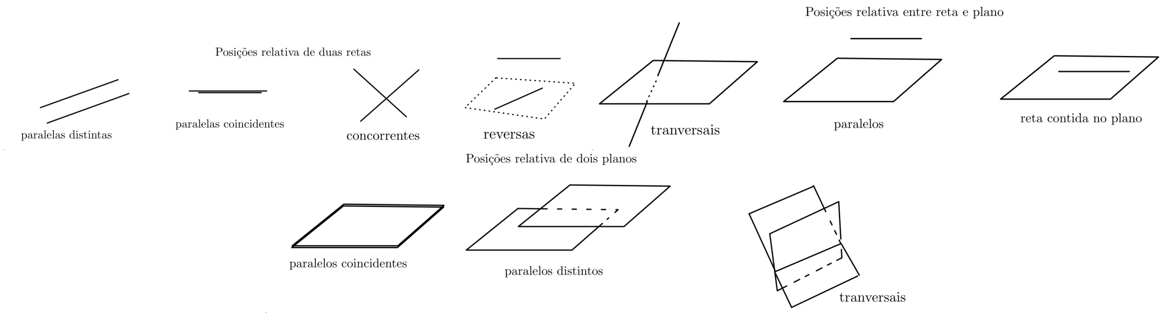
onde a, b e c são números reais que não se anulam simultaneamente, é equação geral de um plano.

Exemplo R.3.3. Ver Exercícios 44 a 46 em Slide de Exercícios.

[5] $\alpha(ax + by + c + d) = 0$ para qualquer $\alpha \neq 0$ também é uma equação geral de π pois: $\vec{u}, \alpha\vec{v}$ OU $\alpha\vec{u}, \vec{v}$ são LI, OU mais genericamente $\alpha\vec{u}, \beta\vec{v}$ ($\beta \neq 0$) são LI e $\alpha\beta(ax + by + c + d) = 0$ é uma equação geral de π.

R.4 Posição relativa entre retas e planos

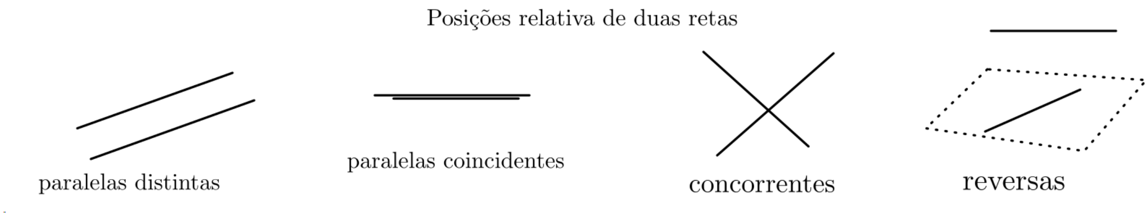
Objetivo: Conhecendo equações de retas r, s e de planos π, π_1, obter um critério para analisar a posição relativa entre tais objetos.



R.4.1 Posição relativa entre duas retas

Sejam r e s duas retas em E^3. Existem quatro possibilidades para as posições relativas de r e s

- paralelas[6] coincidentes
- paralelas distintas
- concorrentes: se interceptam num ponto
- reversas: existe um plano π que contém a reta s e que é paralelo à reta r com $r \not\subseteq \pi$



Objetivo: Obter um critério para analisar a posição relativa das retas r e s através de suas equações.

---

[6] duas retas são paralelas se possuem vetores diretores paralelos

Proposição R.4.1. *Suponha que*

$$r\colon X = A + \lambda\vec{r},\ \lambda \in \mathbb{R} \quad e \quad s\colon X = B + \mu\vec{s},\ \mu \in \mathbb{R}$$

1. *Se $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são LD*[7]*, então*

   (a) *r e s são paralelas coincidentes $\iff A \in s$ (ou $B \in r$).*

   (b) *r e s são paralelas distintas $\iff A \notin s$.*

2. *Se $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são LI, então*

   (a) *r e s são concorrentes $\iff \vec{r}, \vec{s}$ e $\overrightarrow{AB}$ são LD*[8].

   (b) *r e s são reversas $\iff \vec{r}, \vec{s}$ e $\overrightarrow{AB}$ são LI.*

Se r e s são concorrentes e $\vec{r} \perp \vec{s}$, dizemos que r e s são **perpendiculares**.

Se r e s são reversas e $\vec{r} \perp \vec{s}$, dizemos que r e s são **ortogonais**.

Exemplo R.4.2. Ver Exercícios 47 e 48 em Slide de Exercícios.

---

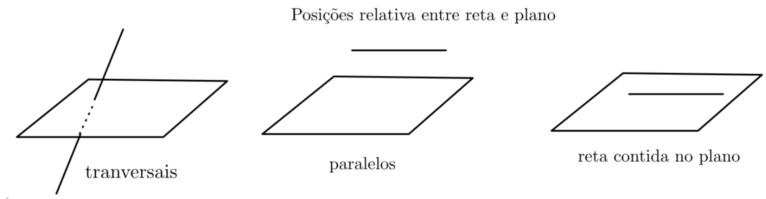
[7] Lembre-se da Proposição B.1.4.
[8] Lembre-se da Proposição B.1.6.

R.4.2 Posição relativa entre retas e planos

Aula 15

Sejam r uma reta e π um plano em E^3. Existem três possibilidades para a posição relativas de r e π

- r e π são transversais: se interceptam num ponto (**vetor** diretor de r não é **paralelo ao plano**)
- r é paralela ao plano π: **vetor** diretor de r é **paralelo ao plano** π e $r \not\subseteq \pi$
- r está contida no plano π



Objetivo: Conhecendo equações de r e π, obter um critério para analisar a posição relativa.

Proposição R.4.3. *Sejam $ax+by+cz+d=0$ uma equação geral de um plano π, $\vec{n} := (a,b,c)_E$*[9] *e $\vec{u} = (m,p,q)_E$ um vetor. Então, $\vec{u}$ é paralelo a π se, e somente se,*

$$am+bp+cq=0 \overset{\text{s.c.o}}{\iff}{}^{10} \quad \vec{n}\cdot\vec{u}=0.$$

Corolário R.4.4. *Sejam $ax+by+cz+d=0$ uma equação geral de um plano π, $\vec{n} = (a,b,c)_E$, A um ponto de uma reta r e $\vec{r} = (m,p,q)_E$ um vetor diretor de r. Então,*

1. *r e π são transversais $\iff am+bp+cq \neq 0 \overset{\text{s.c.o}}{\iff} \vec{n}\cdot\vec{r}\neq 0$;*
2. *r é paralela a $\pi \iff am+bp+cq=0$ e $A\notin\pi \overset{\text{s.c.o}}{\iff} \vec{n}\cdot\vec{r}=0$ e $A\notin\pi$;*
3. *r está contida em $\pi \iff am+bp+cq=0$ e $A\in\pi \overset{\text{s.c.o}}{\iff} \vec{n}\cdot\vec{r}=0$ e $A\in\pi$.*

Exemplo R.4.5. Ver Exercícios 49 e 50 em Slide de Exercícios.

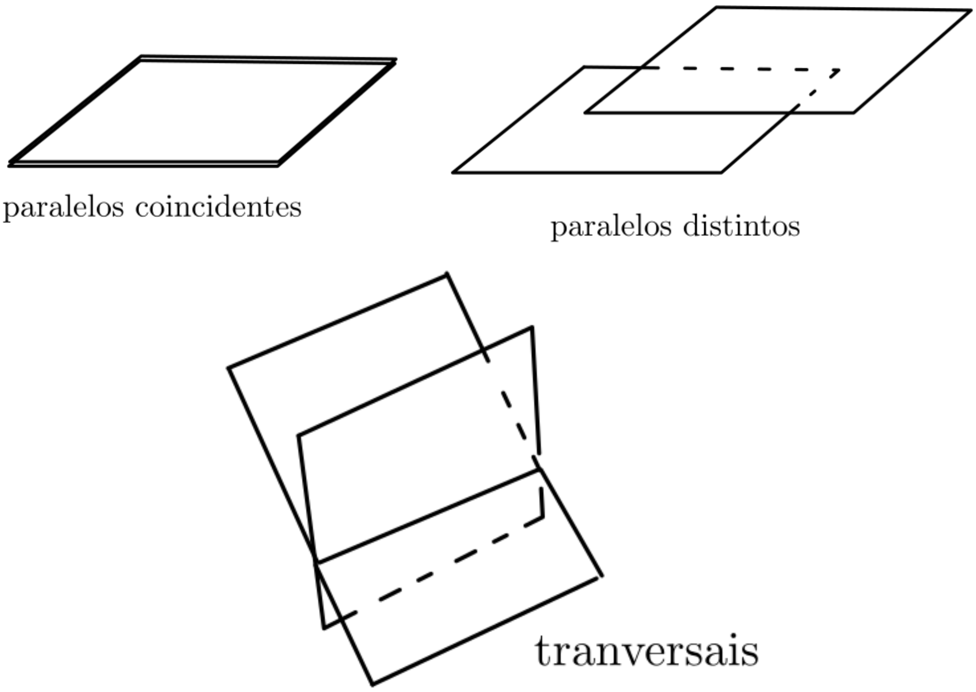
[9] O vetor $\vec{n}$ será um **vetor normal ao plano** π (ver Slide 7).
[10] **s.c.o**: um sistema de coordenadas ortogonal foi fixado. Ver Teorema P.2.3

R.4.3 Posição relativa entre dois planos

Sejam π_1 e π_2 dois planos em E^3. Sabemos que existem três possibilidades para a posição relativas.

- paralelos coincidentes
- paralelos distintos
- concorrentes/transversais: se interceptam numa reta.

Posições relativa de dois planos



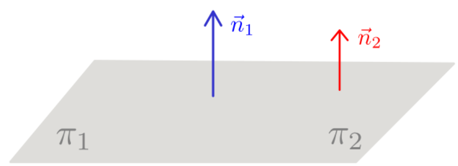
Objetivo: Conhecendo as equações dos planos π_1 e π_2, obter um critério para analisar a posição relativa.

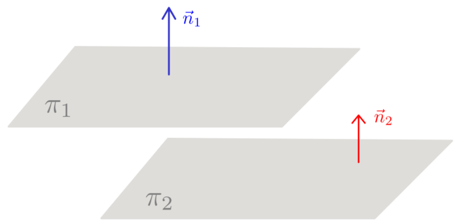
Proposição R.4.6. *Considere os planos π_1 e π_2 com equações gerais*

$$\pi_1\colon a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad e \quad \pi_2\colon a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

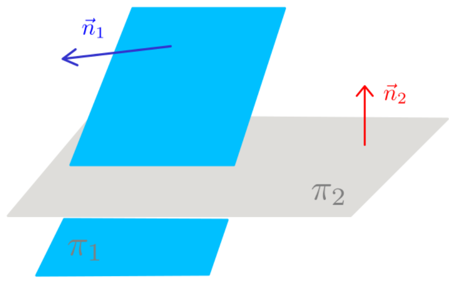
e $\vec{n}_1 := (a_1, b_1, c_1)_E$ e $\vec{n}_2 := (a_2, b_2, c_2)_E$. Então,

1. *π_1 e π_2 são paralelos $\iff$ existe $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\vec{n}_1 = k\,\vec{n}_2$.*[11]
   (a) *são coincidentes se $d_1 = kd_2$.*
   (b) *são distintos se $d_1 \neq kd_2$.*





2. *π_1 e π_2 são transversais $\iff$ $\vec{n}_1 \neq k\,\vec{n}_2$ para qualquer $k \in \mathbb{R}$.*[12]



Demonstração. Tarefa! (veja Boulos, p. 196) □

Exemplo R.4.7. Ver Exercício 51 em Slide de Exercícios.

---

[11] $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \iff \vec{n}_1, \vec{n}_2$ são LD.
[12] $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2 \iff \vec{n}_1, \vec{n}_2$ são LI.

R.4.3.1 Equação de reta: forma planar

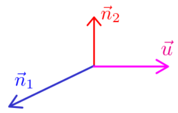
Se os vetores $\vec{n}_1 := (a_1, b_1, c_1)_E$ e $\vec{n}_2 := (a_2, b_2, c_2)_E$ são LI, então o sistema

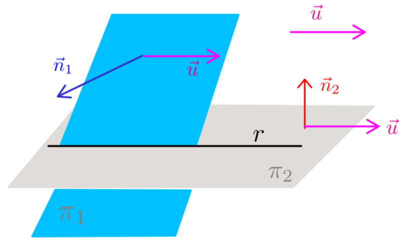
$$r : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

descreve uma reta (pois é a intersecção de dois planos transversais) e é chamado **sistema de equações na forma planar** de r .

Proposição R.4.8. *Um vetor $\vec{u} = (m, p, q)_E$ é paralelo à reta*

$$r : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$





se, e somente se,

$$a_1m + b_1p + c_1q = 0 \text{ e } a_2m + b_2p + c_2q = 0 \overset{\text{s.c.o.}}{\iff} \vec{n}_1 \cdot \vec{u} = 0 \text{ e } \vec{n}_2 \cdot \vec{u} = 0 \underset{\text{base positiva}}{\overset{\text{s.c.o.}}{\iff}} \vec{u} \parallel \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$$

Nota: Em um **sistema de coordenadas ortogonal com base positiva**, um vetor diretor da reta r obtida pela intersecção de dois planos é o produto vetorial de "vetores normais" aos planos.

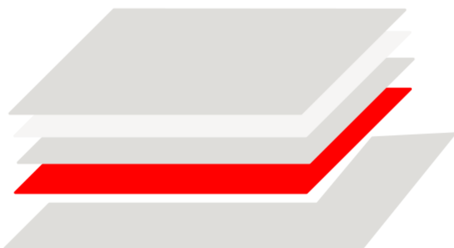
A seguir apresentaremos uma técnica específica para resolução de alguns tipos de problemas, a qual:

- auxilia em reduzir o número de incógnitas no problema
- eficiente em problemas que envolvem ângulos e distâncias

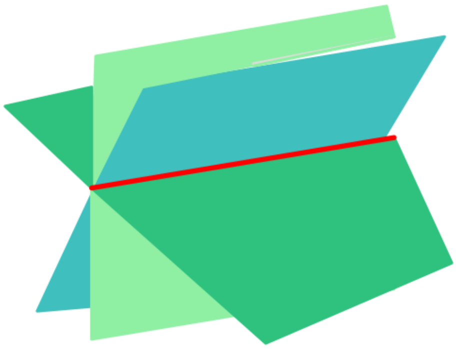
A técnica é chamada "técnica do feixe", onde feixe significa o conjunto de todos objetos de E^3 com uma dada propriedade.

Trataremos de dois casos:

- **Feixe de planos paralelos a um plano** π: conjunto de todos os planos de E^3 que são paralelos a π



- **Feixe de planos que contém uma reta** r: conjunto de todos os planos de E^3 que contém r



R.4.4 Feixe de planos paralelos a um plano π

Objetivo: Conhecendo a equação do plano π, obter um critério para determinar todos os planos paralelos a π.

- $\pi: ax + by + cz + d = 0$
- $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$
- $a_1 =?$, $b_1 =?$, $c_1 =?$, $d_1 =?$ de modo que $\pi_1 \parallel \pi$

- $\pi_1 \parallel \pi \overset{Prop. R.4.6}{\Longleftrightarrow} (a_1, b_1, c_1) = k(a, b, c)$ para algum $k \neq 0$:

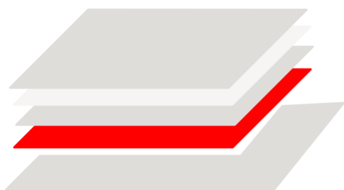
$$\pi_1: kax + kby + kcz + d_1 = 0 \Longleftrightarrow \pi_1: ax + by + cz + \frac{d_1}{k} = 0$$

- $\pi_1 \parallel \pi \Longleftrightarrow \pi_1: ax + by + cz + \alpha = 0$ para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$

Proposição R.4.9. *Dado o plano $\pi: ax + by + cz + d = 0$, a equação*

$$ax + by + cz + \alpha = 0$$

quando α percorre $\mathbb{R}$ descreve o feixe de planos paralelos a π.



Exemplo R.4.10. O feixe de planos paralelos ao plano

$$\pi : x + y + 2z - 1 = 0$$

é dado por

$$\pi_\alpha : x + y + 2z + \alpha = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

R.4.5 Feixe de planos que contém uma reta r

Objetivo: Conhecendo a equação de r, obter um critério para obter todos os planos que contém r.

- eq. planares de $r : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$ com

$$\vec{n}_1 := (a_1, b_1, c_1) \quad \text{e} \quad \vec{n}_2 := (a_2, b_2, c_2) \qquad \text{LI}$$

- $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ contém r
- $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ contém r
- $\pi : ax + by + cz + d = 0$ plano qualquer que contenha r;
- $\vec{n} := (a, b, c)$;
- $a = ?$, $b = ?$, $c = ?$, $d = ?$

- $$r \in \pi \cap \pi_1 \cap \pi_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = -d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = -d_2 \\ ax + by + cz = -d \end{cases} \quad \text{é S.P.I. (infinitas soluções)}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n} \quad \text{são LD}$$

$$\Longleftrightarrow \exists \alpha_1, \beta_1, \gamma \in \mathbb{R} \ \text{ não todos nulos}; \alpha_1\vec{n}_1 + \beta_1\vec{n}_2 + \gamma\vec{n} = \vec{0}$$

$$\underset{\alpha_1,\beta_1,\gamma \text{ não todos nulos}}{\overset{\vec{n}_1,\vec{n}_2 LI}{\Longrightarrow}} \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\text{ (não ambos nulos)}}; \vec{n} = \alpha\vec{n}_1 + \beta\vec{n}_2$$

$$\Longrightarrow (\star) \quad \begin{cases} a = \alpha a_1 + \beta a_2 \\ b = \alpha b_1 + \beta b_2 \\ c = \alpha c_1 + \beta c_2 \end{cases}$$

- $P = (x_0, y_0, z_0) \in r \cap \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1 = 0 & (\times\alpha) \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 + d_2 = 0 & (\times\beta) \\ ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 & (\times -1) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow d = \alpha d_1 + \beta d_2$$

- $\pi : \alpha(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$

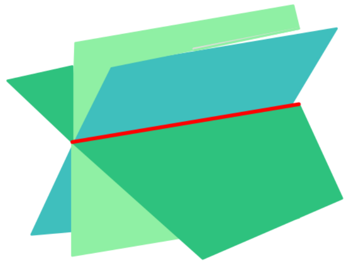
Proposição R.4.11. *Seja r a reta cujas equações planares são:*

$$r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

O feixe de planos que contém r é descrito pela equações

$$\alpha(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0,$$

onde α, $\beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.



Exemplo R.4.12. Ver Exercício 52 em Slide de Exercícios.
