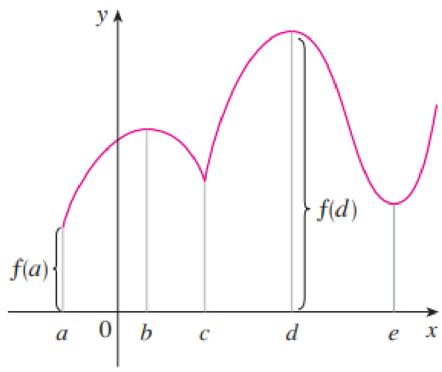
Conteúdo

M.1 Máximos e mínimos

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $p \in D_f$

- p é **ponto de máximo global (absoluto) de f** (**PMA**) se
$$\forall\, x \in D_f \text{ vale } f(x) \leq f(p)$$
  - $f(p)$ é o **valor máximo global (absoluto) de f (VMA)**.
- p é **ponto de máximo local de f** (**PML**) se
$$\exists\, \delta : \forall\, x \in D_f \cap V_\delta(p) \text{ vale } f(x) \leq f(p)$$
  - $f(p)$ é o **valor máximo local de f (VML)**.
- p é **ponto de mínimo global (absoluto) de f** (**pma**) se
$$\forall\, x \in D_f \text{ vale } f(x) \geq f(p)$$
  - $f(p)$ é o **valor mínimo global (absoluto) de f (vma)**.
- p é **ponto de mínimo local de f** (**pml**) se
$$\exists\, \delta : \forall\, x \in D_f \cap V_\delta(p) \text{ vale } f(x) \geq f(p)$$
  - $f(p)$ é o **valor mínimo local de f (vml)**.
- p é **ponto de extremo (local ou global) de f** se for ponto de máximo ou de mínimo (local ou global) de f.



Fonte: Stewart, Cálculo, vol.1. Se $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, inferimos que a, c, e são pml, a é pma e b, d PML.

Qual a relação entre os pontos onde ocorre os extremos de f e a derivada de f nesses pontos?

Teorema (**de Fermat**). $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $p \in D_f$.

Se $p \in D_f$ é ponto de extremo, **então**

- **ou f não é derivável em p;**
- **ou f é derivável em p e $f'(p) = 0$.**

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $p \in D_f$

- p é **ponto crítico (pc) de f** se: f é derivável em p e $f'(p) = 0$ ou f não é derivável em p.

Consequências: Se $p \in D_f$ e

- *p é ponto de extremo, então p é ponto crítico;*
- *p é tal que $f'(p) \neq 0$, então p não é ponto de extremo.*

Exemplo 1. Exercício 44 em Slides de Exercícios.

RESUMO: **Possíveis pontos de extremo**:

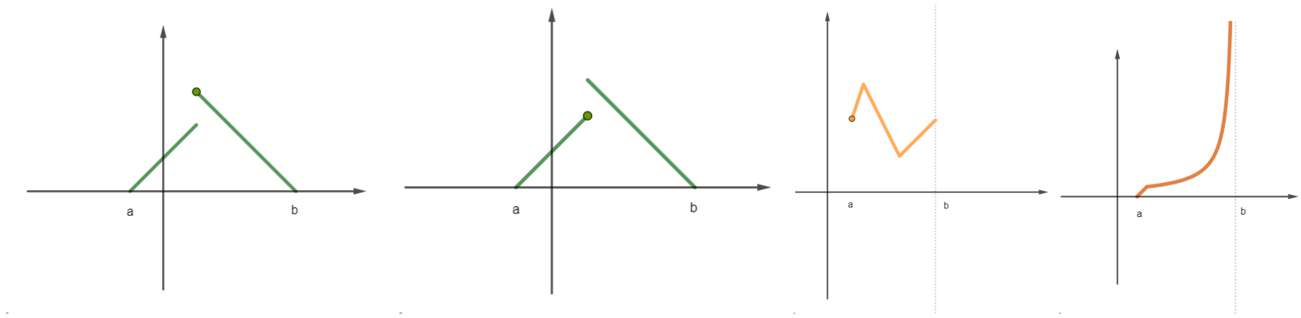
- pontos *interiores de $D_{f'}$* que tenham derivada nula,
- pontos de D_f *onde f não é derivável*,
- ponto *na borda de $D_{f'}$*,
- pontos de D_f *onde f não é contínua*.

COMO DECIDIR QUANDO UM PONTO CRÍTICO É UM PONTO DE EXTREMO LOCAL/ABSOLUTO?

Teorema (Teorema de Weiestrass).
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua no intervalo fechado $[a, b]$. **Então existem**

$$x_1, x_2 \in [a, b] : \; f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \forall\, x \in [a, b],$$

ou seja, f assume o valor máximo absoluto e o valor mínimo absoluto.



Se alguma hipótese do T. Weierstrass não está contemplada, a função pode ou não assumir os valores extremos.

M.1.1 Máximos e mínimos absolutos em intervalos fechados

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$:

1. encontre os pontos $p \in (a, b)$ em que f é derivável e $f'(p) = 0$;
2. encontre os pontos $q \in (a, b)$ em que f não é derivável;
3. calcule os valores de f em cada p e em cada q (valores de f nos pc);
4. calcule os valores de f em a e em b
5. o maior valor entre os valores dos passos 3 e 4 é o VMA de f em $[a, b]$ e o menor valor desses valores é o vma de f em $[a, b]$.

Exemplo 2. Exercício 45 em Slides de Exercícios.

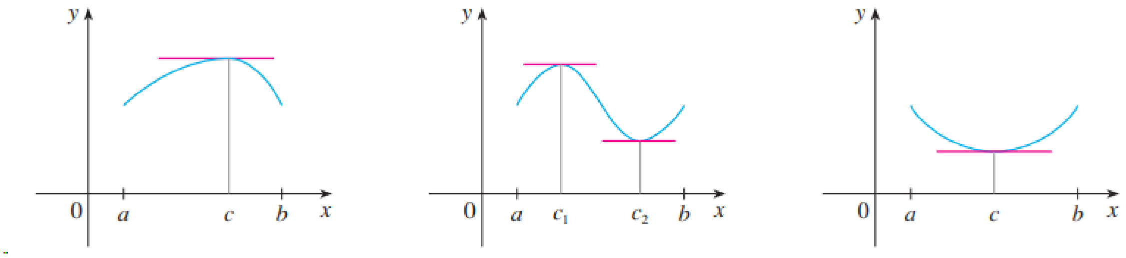
E QUANTO AOS EXTREMOS LOCAIS?

M.2 Uso da derivada primeira

M.2.1 Teoremas importantes

Teorema M.2.1 (de Rolle).
Seja f contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b): se $f(a) = f(b)$ **então existe** $c \in (a, b)$ **tal que**

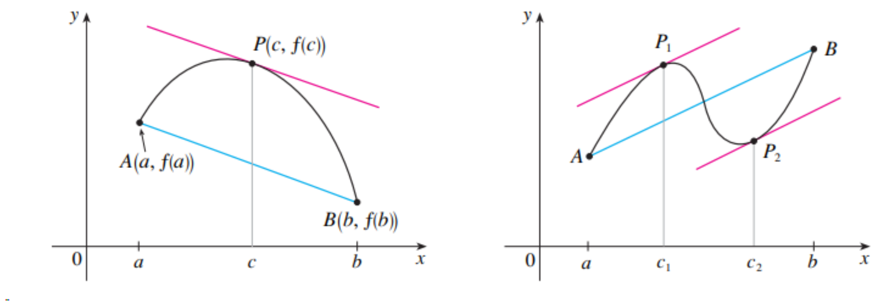
$$f'(c) = 0.$$



Fonte: Stewart, Cálculo, vol. 1. A reta tangente ao gráfico de f em $(c, f(c))$ é horizontal.

Teorema M.2.2 (do valor médio).
Seja f contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b): **então existe** $c \in (a, b)$ **tal que**

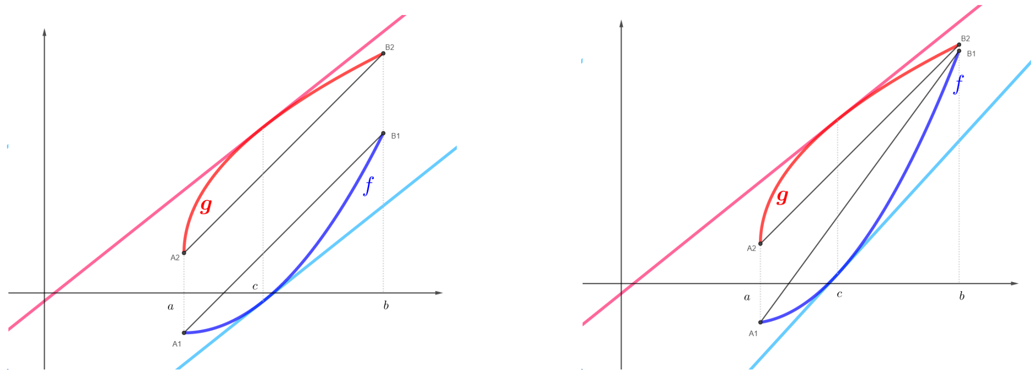
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Fonte: Stewart, Cálculo, vol. 1. A reta tangente ao gráfico de f em $(c, f(c))$ é paralela à reta secante AB.

Teorema M.2.3 (de Cauchy).
Sejam f, g contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b): **então existe** $c \in (a, b)$ **tal que**

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

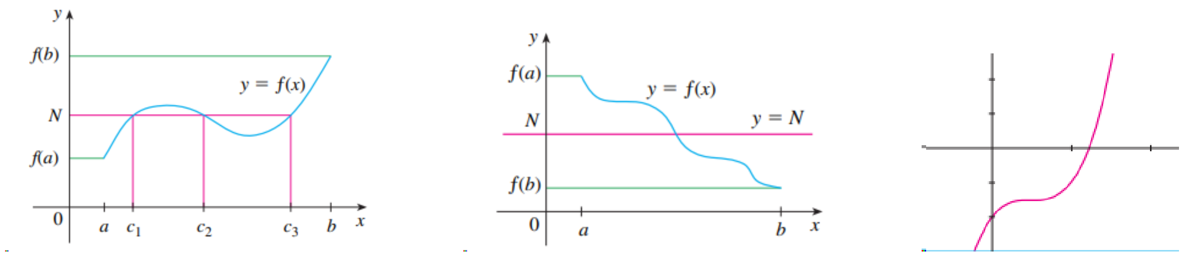


Geogebra. Na esquerda, as retas secantes $A1B1$ e $A2B2$ são paralelas e as retas tangentes aos gráficos de f e g em $(c, f(c))$ e $(c, g(c))$ são paralelas. Na direita, a reta secante $A1B1$ de f é mais inclinada que a reta secante $A2B2$ de g, e as inclinação da reta tangente ao gráfico de f em $(c, f(c))$ é mais inclinada que a reta tangente ao gráfico de g em $(c, g(c))$ na mesma proporção das inclinações das secantes.

Teorema M.2.4 (do valor intermediário).
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, e seja $N \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(a) > N > f(b) \qquad ou \qquad f(a) < N < f(b)$$

então existe $c \in (a, b) : \ f(c) = N$. (Em particular f assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$.)



Fonte: Stewart, Cálculo, vol. 1

M.2.2 Relação entre f' e f

Corolário M.2.5.
Seja f contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b):

- se $f'(x) > 0$ em (a, b), **então f é estritamente crescente em $[a, b]$**,
- se $f'(x) \geq 0$ em (a, b), **então f é crescente em $[a, b]$**,
- se $f'(x) < 0$ em (a, b), **então f é estritamente decrescente em $[a, b]$**,
- se $f'(x) \leq 0$ em (a, b), **então f é decrescente em $[a, b]$**,
- se $f'(x) = 0$ em (a, b), **então f é constante em $[a, b]$**.

Corolário. *Se f e g são contínuas em $[a, b]$, deriváveis em (a, b) com $f'(x) = g'(x)$, para todo $x \in (a, b)$,* **então $f = g + c$ é constante em (a, b).**

Exemplo 3. Exercício 46 em Slides de Exercícios.

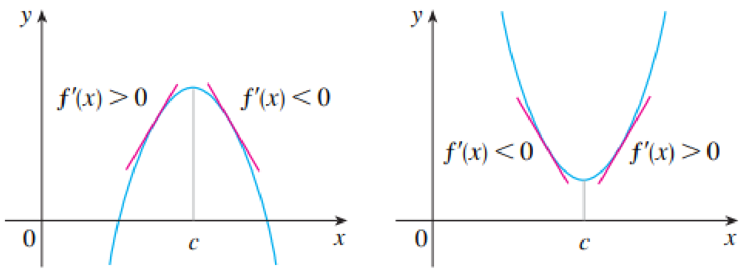
Também vale: se f é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b):

- se f é crescente (ou estr. cresc.) em $[a, b]$ **então $f'(x) \geq 0$ em (a, b)**,
- se f é decrescente (ou estr. decresc.) em $[a, b]$ **então $f'(x) \leq 0$ em (a, b)**.

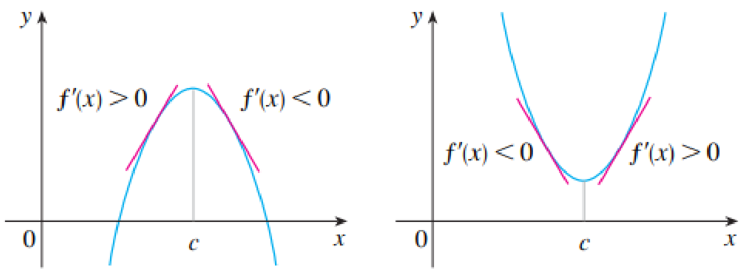
M.2.2.1 Teste da Derivada Primeira

Corolário M.2.6 (teste da derivada primeira).
Seja $c \in (a, b)$, f contínua em $[a, b]$ e derivável em $(a, b) \setminus \{c\}$[1]:

- se $f'(x) \geq 0$ em (a, c) e $f'(x) \leq 0$ em (c, b), **então c é ponto de máximo local**;
- se $f'(x) \leq 0$ em (a, c) e $f'(x) \geq 0$ em (c, b), **então c é ponto de mínimo local**.



(a) Máximo local (b) Mínimo local



(a) Máximo local (b) Mínimo local

Stewart, Cálculo, vol. 1.

Exemplo 4. Exercício 47 em Slides de Exercícios.

---

[1] podendo ser ou não derivável em c

M.3 Uso da derivada segunda

Notação: Denotemos por

$$T_p(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$$

a reta tangente no ponto $(p, f(p))$ ao gráfico de f.

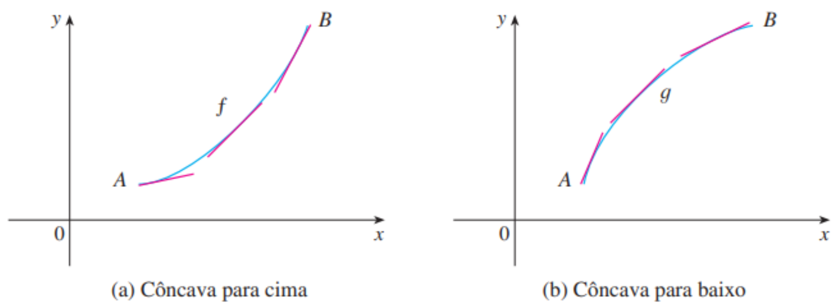
Seja f derivável em (a, b): dizemos que

- **f tem concavidade para cima em (a, b)** se

$$\forall\, x, p \in (a, b),\ \ x \neq p, \qquad \text{vale } f(x) > T_p(x)\,;$$

- **f tem concavidade para baixo em (a, b)** se

$$\forall\, x, p \in (a, b),\ \ x \neq p, \qquad \text{vale } f(x) < T_p(x)\,.$$



Stewart, Cálculo, vol. 1.

Teorema M.3.1.
Se f é derivável em (a, b) e

- f' é estrit. crescente em (a, b), **então f tem concavidade para cima em (a, b)**,
- f' é estrit. decrescente em (a, b), **então f tem concavidade para baixo em (a, b)**.

M.3.1 Relação entre f'' e f

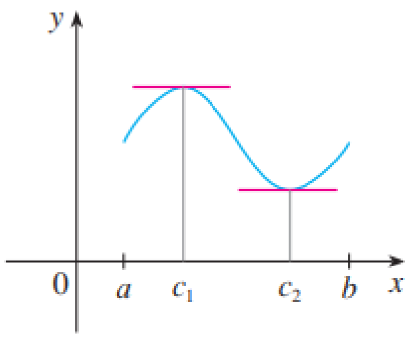
Corolário M.3.2.
Se f é duas vezes derivável em (a, b) e

- $f'' > 0$ em (a, b), **então f tem concavidade para cima em (a, b)**,
- $f'' < 0$ em (a, b), **então f tem concavidade para baixo em (a, b)**.

M.3.1.1 Teste da Derivada Segunda

Corolário M.3.3 (teste da derivada segunda).
Seja f duas vezes derivável em $(p - \delta, p + \delta)$, $f'(p) = 0$ e f'' contínua em p:

- se $f''(p) > 0$ **então p é ponto de mínimo local**,
- se $f''(p) < 0$ **então p é ponto de máximo local**.



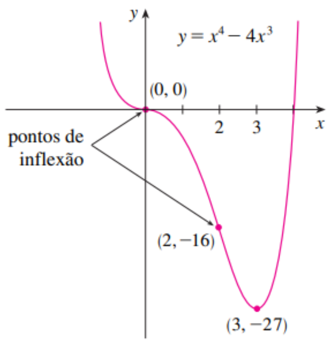
Stewart, Cálculo, vol. 1.

Definição: p é dito **ponto de inflexão (pi) de f** se existir um $\delta > 0$ tal que:

- f é contínua em $(p-\delta, p+\delta)$, derivável em $(p-\delta, p)$ e em $(p, p+\delta)$, e vale uma das seguintes:
  - f tem concavidade para cima em $(p-\delta, p)$ e para baixo em $(p, p+\delta)$,
  - f tem concavidade para baixo em $(p-\delta, p)$ e para cima em $(p, p+\delta)$.

Além disso, se f é derivável em p, classificamos em

- **ponto de inflexão horizontal**, se $f'(p) = 0$,
- **ponto de inflexão oblíqua**, se $f'(p) \neq 0$.



Stewart, Cálculo, vol. 1.

Vale o seguinte:

- se f é duas vezes derivável em $(p-\delta, p+\delta)$ e p é de inflexão **então** $f''(p) = 0$,
- se f é três vezes derivável em $(p-\delta, p+\delta)$, $f''(p) = 0$ e $f'''(p) \neq 0$ **então** p **é de inflexão**.

M.4 Assíntotas

Verticais

- $x = p$ é uma **assíntota vertical** (**AV**) do gráfico de f quando:

$$\lim_{\mathbf{x \to p}} f(x) = \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\mathbf{x \to p}} f(x) = -\infty$$

ou

$$\lim_{\mathbf{x \to p^+}} f(x) = \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\mathbf{x \to p^+}} f(x) = -\infty$$

ou

$$\lim_{\mathbf{x \to p^-}} f(x) = \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\mathbf{x \to p^-}} f(x) = -\infty$$

Horizontais

- $y = L$ é uma **assíntota horizontal** (**AH**) do gráfico de f quando:

$$\lim_{\mathbf{x \to +\infty}} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{\mathbf{x \to -\infty}} f(x) = L$$

Oblíquas

- $y = mx + b$ é uma **assíntota oblíqua** (**AO**) do gráfico de f quando:

$$\lim_{\mathbf{x \to +\infty}} [f(x) - (mx + n)] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{\mathbf{x \to -\infty}} [f(x) - (mx + n)] = 0$$

- determine m, caso exista, por:

$$m = \lim_{\mathbf{x \to +\infty}} \frac{f(x)}{x} \quad \text{ou} \quad m = \lim_{\mathbf{x \to -\infty}} \frac{f(x)}{x}$$

- calcule

$$n = \lim_{\mathbf{x \to +\infty}} [f(x) - mx] \quad \text{ou} \quad n = \lim_{\mathbf{x \to -\infty}} [f(x) - mx]$$

- se $n < \infty$ e $m \neq 0$, a reta $y = mx + n$ é AO.
- se $n < \infty$ e $m = 0$, a reta $y = mx + n$ é AH.

Exemplo 5. Exercício 48 em Slides de Exercícios.