

Conteúdo

E1 Reflexividade	E2
E1.1 Adjunto do adjunto	E2
E1.2 Principais resultados	E4
E1.2.1 Prova da Proposição: X refl. $\implies X^*$ refl.	E4
E1.2.2 Prova da Proposição: s.e.v. fech. de refl. é refl.	E5
E1.2.3 Prova da Proposição: e.v.n isom.: X refl. $\Leftrightarrow Y$ refl. Aula 16	E7
E1.2.4 Prova da Proposição: X Banach e X^* refl. $\implies X$ refl.	E8
E1.2.5 Teorema de Kakutani	E11
E1.2.6 Prova dos Lemas Técnico, Helly e Goldstine Aula 17	E13
E2 Separabilidade e metrização da bola	E19
E2.1 Definição e propriedades	E19
E2.1.1 Demonstrações Aula 18	E21
E2.2 Metrização da bola	E25
E2.2.1 Consequências Aula 19	E30
E3 Espaços uniformemente convexos	E34
E3.1 Aplicação: para pessoal de equações!	E40
E4 Mais exercícios	E41

E1 Reflexividade

Um e.v.n. X é **reflexivo** quando o mergulho canônico é sobrejetor:

$$\begin{aligned} J : X &\longrightarrow X^{**} \\ x &\longmapsto J(x) = \Phi : X^* \rightarrow \mathbb{K} \\ \phi &\longmapsto \Phi(\phi) = (Jx)(\phi) = \hat{\phi}(x) = \phi(x) \end{aligned}$$

E1.1 Adjunto do adjunto

Adjunto de operador linear densamente definido não-limitado

Sejam X, Y espaços de Banach e $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$

$$T^* : D(T^*) \subseteq Y^* \rightarrow X^* : g \mapsto T^*g = f$$

s.e.v.

onde

$$D(T^*) = \{g \in Y^* : g \circ T : D(T) \rightarrow \mathbb{K} \text{ é limitada}\}$$

e $f = \overline{g \circ T}$ é a única extensão linear contínua em X de $g \circ T$.

$$(T^*g)(x) = g(Tx) \quad \forall \quad x \in D(T), \quad g \in D(T^*).$$

$$\langle T^*g, x \rangle_{X^*, X} = \langle g, Tx \rangle_{Y^*, Y} \quad \forall \quad x \in D(T), \quad g \in D(T^*).$$

$$\mathcal{J} : Y^* \times X^* \rightarrow X^* \times Y^* : (g, f) \mapsto (-f, g) \quad (\text{isomof., Proposição C3.6})$$

$$G(T)^\perp = \mathcal{J}(G(T^*))$$

T^* é linear e fechado.

(Teorema C2.3)

T é fechada $\implies D(T^*)$ separa os pontos de Y :

$$\forall y \in Y \setminus \{0\}, \exists g \in D(T^*) : g(y) \neq 0.$$

Spoiler: Se Y é reflexivo então $D(T^*)$ é denso em Y^* . **Poderá ser definido o adjunto do adjunto.**

$$T \in L(X, Y) \implies T^* \in L(Y^*, X^*) \text{ e } \|T\| = \|T^*\|$$

Proposição E1.1. *Seja $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ uma transformação linear densamente definida e fechada. Se Y é reflexivo então $D(T^*)$ é denso em Y^* .*

Podemos definir o adjunto do adjunto $\triangleleft$

Demonstração.

Exercício B2.6. Um subespaço M de um e.v.n. X é denso se e só se vale que

$$\forall \phi \in X^* \text{ t.q. } \phi|_M = 0, \text{ vale } \phi \equiv 0$$

Queremos: $\forall \Phi \in Y^{**} \text{ t.q. } \Phi|_{D(T^*)} = 0, \text{ vale } \Phi \equiv 0$

- supor $D(T^*)$ não é denso em Y^*
- $\exists \Phi \in Y^{**} \setminus \{0\}; \quad \Phi|_{D(T^*)} = 0$
- $\exists y \in Y \setminus \{0\}; \quad \Phi = Jy \quad (Y \text{ é reflexivo: } J(Y) = Y^{**})$
- $D(T^*)$ separa pontos de $Y \quad (T \text{ fechada, Teorema a C2.3})$
- $\exists \phi \in D(T^*); \quad \phi(y) \neq 0$

$$0 = \Phi(\phi) \equiv Jy(\phi) = \phi(y) \neq 0 \quad \rightsquigarrow \leftarrow$$

□

$$T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y \quad \text{dens. def.} \quad \text{fechada, } Y \text{ reflexivo}$$

$$\underline{T^*} : D(T^*) \subseteq_{s.e.v.} Y^* \rightarrow X^* : g \mapsto T^*g = f \quad \text{dens. def.}$$

$$\underline{T^{**}} : D(T^{**}) \subseteq_{s.e.v.} X^{**} \rightarrow Y^{**} : \Phi \mapsto T^{**}\Phi = \Psi$$

Proposição E1.2. *Sejam X, Y espaços reflexivos, $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ uma transformação linear densamente definida e fechada. Então, $T^{**} : D(T^{**}) \subseteq X^{**} \rightarrow Y^{**}$ satisfaz (após identificação de X com X^{**} e de Y com Y^{**})*

$$T^{**} = T.$$

$\triangleleft$

Demonstração. Exercício. □

E1.2 Principais resultados

Proposição E1.3. *Se X é um espaço reflexivo (de Banach), então X^* é reflexivo.* $\triangleleft$

Proposição E1.4. *Se X é um espaço reflexivo (de Banach), todo seu subespaço fechado é reflexivo.* $\triangleleft$

Lema E1.5. *Se X e Y são e.v.n isomorfos, então X é reflexivo se e só se Y é reflexivo.* $\triangleleft$

As Proposições E1.3, Proposições E1.4 e o Lema E1.5, implicam:

Proposição E1.6. *Se X é um espaço de Banach e X^* é reflexivo, então X é reflexivo.* $\triangleleft$

As Proposições E1.3 e E1.6 implicam:

Teorema E1.7. *Seja X um espaço de Banach. Então, X é reflexivo se, e somente se, X^* é reflexivo.* $\triangleleft$

E1.2.1 Prova da Proposição: X refl. $\implies X^*$ refl.

Prova da Proposição E1.3: X reflexivo (de Banach) $\implies X^$ é reflexivo.*

- X Banach (Proposição D4.2)
- o mergulho canônico J é sobrejetor: $J(X) = X^{**}$ (X reflexivo)

$$J : X \longrightarrow X^{**}$$

$$x \longmapsto J(x) : X^* \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\phi \longmapsto (Jx)(\phi) = \phi(x)$$

Queremos o mergulho canônico K sobrejetor: $K(X^*) = X^{*}$**

$$K : X^* \longrightarrow X^{***}$$

$$\phi \longmapsto K(\phi) = \Psi : X^{**} \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\psi \longmapsto (K\phi)(\psi) = \psi(\phi)$$

- $\Psi \in X^{***}$

Queremos: $\phi \in X^*$; $K(\phi) = \Psi$

$$\iff K(\phi)(\psi) = \Psi(\psi), \forall \psi \in X^{**}$$

J é bijetor $\iff K(\phi)(Jx) = \Psi(Jx), \forall x \in X$

- $J^* : X^{***} \rightarrow X^*$ é tq $(J^*\Psi) \in X^*$ e vale (ppdd de adjunto)

$$(J^*\Phi)(x) = \Phi(Jx) \quad \forall \quad x \in X, \quad \Phi \in X^{***}$$

-

$$\Psi(Jx) \stackrel{\text{pink}}{=} J^*\Psi(x) \stackrel{\text{blue}}{\stackrel{\text{def.}J}{=}} Jx(J^*\Psi) \stackrel{\text{yellow}}{\stackrel{\text{def.}K}{=}} K(\textcolor{green}{J^*\Psi})(Jx) \quad \forall \quad x \in X$$

☐

E1.2.2 Prova da Proposição: s.e.v. fech. de refl. é refl.

Prova da Proposição E1.4: X reflexivo (de Banach) $\implies M \overset{s.e.v}{\underset{fechado}{\subset}} X$ é reflexivo.

o mergulho canônico J_X é sobrejetor: $J_X(X) = X^{**}$ (X reflexivo)

$$J_X : X \longrightarrow X^{**}$$

$$y \longmapsto J_X(y) : X^* \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\phi \mapsto (J_X y)(\phi) = \phi(y)$$

Queremos o mergulho canônico J_M sobrejetor: $J_M(M) = M^{}$**

$$J_M : M \longrightarrow M^{**}$$

$$x \longmapsto J_M(x) : M^* \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\psi \mapsto (J_M x)(\psi) = \psi(x)$$

i.e., $\forall \varphi \in M^{**}$, $\exists x \in M$; $J_M x = \varphi$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{M} \subset X & \xrightleftharpoons[J_X^{-1}]{J_X} & X^{**} \\
 \uparrow & & \uparrow ?? \\
 M & \xrightarrow{J_M} & M^{**}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 M^{**} & \xrightarrow{??} & X^{**} \xrightarrow{J_X^{-1}} X : \\
 & \searrow J_X^{-1} \circ ?? & \nearrow
 \end{array}
 \quad
 \varphi \mapsto ??\varphi \mapsto \underbrace{J_X^{-1} ??\varphi}_{\in X} \in \mathbf{M} ?$$

- $R : X^* \rightarrow M^* : \varphi \mapsto \boxed{R(\varphi) = \varphi|_M}$ (restrição)
 - R é linear
 - R é sobrejetora (T. H-B para e.v.n. B2.3)

Corolário[Extensão de funcional mantendo a norma] B2.3 Sejam X um e.v.n. sobre $\mathbb{K}$, M um subespaço e $f \in M^*$. Então existe um funcional $\tilde{f} \in X^*$ tal que $\tilde{f}|_M = f$ e $\|\tilde{f}\|_{X^*} = \|f\|_{M^*}$.

- $R^* : M^{**} \rightarrow X^{**}$
- $\varphi \in M^{**}$

Af.1. $x := J_X^{-1} R^* \varphi \in M$

Af.2. $J_M(x) = \varphi$ ■

Prova da Af.1. $x := J_X^{-1} R^* \varphi \in M$

- Suponha $x \in X \setminus M$

Teorema [Existem muitos funcionais] B2.4 a. M s.e.v. fechado de X e $x_0 \in X \setminus M \implies, f \in X^*, f|_M = 0$, e $f(x_0) = d(x_0, M) > 0$.

- $\exists \psi \in X^* : \boxed{\psi|_M = 0}, \quad \psi(x) \neq 0.$

$$0 \neq \psi(x) \stackrel{\text{def } Jx}{=}_{x \in X} J_X(x)(\psi) \stackrel{\text{def } x}{=}_{J_X x = R^* \psi} R^* \varphi(\psi) \stackrel{ppdd R^*}{=}_{\varphi \in D_{R^*}, \psi \in D_R} \varphi(R\psi) \\ \stackrel{\text{def } R}{=} \varphi(\boxed{\psi|_M}) = \varphi(0) = 0 \quad \rightsquigarrow \leftarrow$$

Prova da Af.2. $J_M(x) = \varphi$, i.e., $J_M(x)(\psi) = \varphi(\psi) \forall \psi \in M^*$

- $\psi \in M^*$
- $\exists \eta \in X^*; \boxed{R\eta = \eta|_M = \psi} \quad (R : X^* \rightarrow M^* : \varphi \mapsto \boxed{R(\varphi) = \varphi|_M} \text{ é sobrej.})$

$$J_M(x)(\psi) = J_M(x)(\boxed{\eta|_M}) \stackrel{\text{def } R}{=}_{\eta \in X^*} J_M(x)(R\eta) \stackrel{\text{def } J_M}{=}_{R\eta \in M^*} R\eta(x) \stackrel{\text{def } R}{=}_{x \in M} \eta(x) \\ \stackrel{x \in M}{=}_{M \subset X} J_X x(\eta) \stackrel{\text{def } x}{=}_{J_X x = R^* \psi} R^* \varphi(\eta) \stackrel{ppdd R^*}{=}_{\varphi \in D_{R^*}, \eta \in D_R} \varphi(R\eta) \\ \stackrel{\text{def } R}{=} \varphi(\eta|_M) = \varphi(\boxed{\psi}) \quad \square$$

E1.2.3 Prova da Proposição: e.v.n. isom.: X refl. $\iff Y$ refl.**Aula 16**

Prova do Lema E1.5: Se X e Y são e.v.n. isomorfos, então X é reflexivo (de Banach) se e só se Y é reflexivo (de Banach).

$J_Y : Y \rightarrow Y^{**} = J(Y)$ o mergulho canônico:

(Y reflexivo)

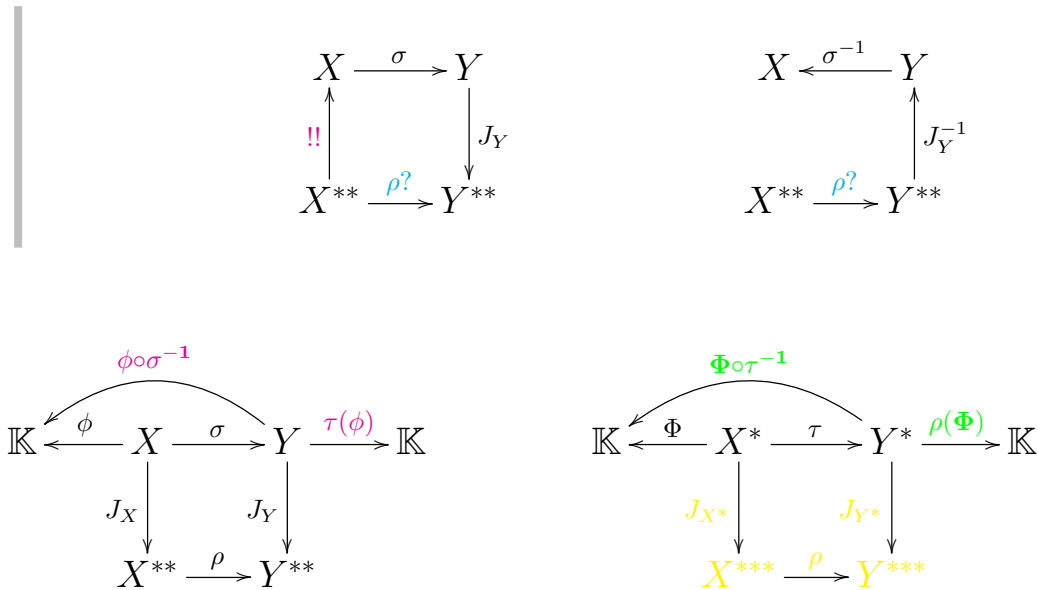
$$(J_Y y)(\psi) = \psi(y), \quad \forall y \in Y, \psi \in Y^*.$$

$J_X : X \rightarrow J(X) \subseteq X^{**}$ o mergulho canônico:

$$(J_X x)(\phi) = \phi(x), \quad \forall x \in X, \phi \in X^*.$$

Queremos: J_X sobrejetor: $\forall \Phi \in X^{**}, \overset{?}{\exists} x \in X; J_X x = \Phi, i.e,$

$$\phi(x) = J_X x(\phi) = \Phi(\phi), \quad \forall \phi \in X^*$$



- $\sigma : X \rightarrow Y : \quad x \mapsto \sigma(x) = y \quad$ o isomorfismo (linear, bij., isométrico)
- $\tau : X^* \rightarrow Y^* : \quad \phi \mapsto \tau(\phi) : Y \rightarrow \mathbb{K} : \quad y \mapsto (\tau\phi)(y) := \boxed{\phi(\sigma^{-1}(y))}$
- $\rho : X^{**} \rightarrow Y^{**} : \quad \Phi \mapsto \rho(\Phi) : Y^* \rightarrow \mathbb{K} : \quad \psi \mapsto (\rho\Phi)(\psi) = \boxed{\Phi(\tau^{-1}(\psi))}$

- τ e ρ são isomorfismos

Queremos: $x = ?? \in X; \phi(x) = J_X x(\phi) = \Phi(\phi), \forall \phi \in X^*$

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\sigma^{-1}} & Y \\ & & \uparrow J_Y^{-1} \\ X^{**} & \xrightarrow{\rho} & Y^{**} \end{array}$$

- $\Phi \in X^{**}, \phi \in X^*$
- $x := \sigma^{-1}(J_Y^{-1}(\rho(\Phi))) \in X$

$$\boxed{\phi(x)} = \phi(\sigma^{-1}(J_Y^{-1}(\rho(\Phi)))) \stackrel{\text{def.}\tau}{=} (\tau\phi)\left(\boxed{J_Y^{-1}(\rho(\Phi))}\right)$$

$$\tau : X^* \rightarrow Y^* : \phi \mapsto \tau(\phi) : Y \rightarrow \mathbb{K} : y \mapsto (\tau\phi)(y) := \boxed{\phi(\sigma^{-1}(y))}$$

$$\boxed{\Phi(\phi)} = \Phi(\tau^{-1}(\tau\phi)) \stackrel{\text{def.}\rho}{=} \underbrace{\rho(\Phi)(\tau\phi)}_{\in Y^{**}} \stackrel{J_Y \text{ sob.}}{=} J_Y y(\tau\phi) \stackrel{\text{def.} J_Y}{=} \tau\phi(\boxed{y})$$

$$\rho : X^{**} \rightarrow Y^{**} : \Phi \mapsto \rho(\Phi) : Y^* \rightarrow \mathbb{K} : \psi \mapsto (\rho\Phi)(\psi) = \boxed{\Phi(\tau^{-1}(\psi))}$$

$$J_Y : Y \rightarrow Y^{**} \text{ sobrejetor} : \exists y \in Y; \boxed{J_Y y = \rho(\Phi)}$$

□

E1.2.4 Prova da Proposição: X Banach e X^* refl. $\implies X$ refl.

Prova da Proposição E1.6: Se X é um espaço de Banach e X^* é reflexivo, então X é reflexivo.

- o mergulho canônico $J : X \rightarrow J(X)$ é um isomorfismo
- X^{**} é reflexivo (Prop. E1.3, X^* é refl.)

Af.1 $J(X) \subset X^{**}$ é s.e.v. fechado

- $J(X)$ é reflexivo (Prop. E1.4, X^{**} é refl.)
- X é reflexivo (Lema E1.5)

Prova da Af.1:

- $\Phi \in \overline{J(X)}$

Queremos: $\Phi \in J(X)$, i.e., $\overset{?}{\exists} x \in X; J_X x = \Phi$

- $\exists x_n \in X; \quad \underline{J_X x_n \rightarrow \Phi}$
- $\{J_X x_n\}$ é de Cauchy (é convergente)

$$\|x_n - x_m\| \stackrel{J \text{ isom. isom.}}{=} \|J_X(x_n - x_m)\| \rightarrow 0$$

- $\{x_n\}$ é de Cauchy
- $\{x_n\}$ é convergente: $x_n \rightarrow \underline{x \in X}$ (X Banach)
- $\underline{J_X x_n \rightarrow J_X x}$ (Teo. D4.1, J_X é cont.)
- $\underline{J_X x = \Phi}$ (unicidade)

□

De fato a prova anterior fornece: Se X é Banach,

- $J(\overline{B^X}) \subset X^{**}$ é fechado na topologia forte $\tau_{X^{**}}$ (note: $\|x\| = \lim \|x_n\| \leq 1$)

Logo,

- $J(\overline{B^X})$ é denso em $\overline{B^{X^{**}}}$ na topologia forte $\tau_{X^{**}}$ se só se

$$J(\overline{B^X}) = \overline{J(\overline{B^X})}^{\tau_{X^{**}}} = \overline{B^{X^{**}}}$$

Ainda, se X e.v.n.,

- $J(\overline{B^X}) = \overline{B^{X^{**}}}$ se só se X é reflexivo

$J(\overline{B^X}) = \overline{B^{X^{**}}} \implies X$ é reflexivo, i.e, $J(X) = X^{**}$

$$\Phi \in X^{**} \implies \Phi \in \overline{B_R^{X^{**}}(0)}, \text{ p/ algum } R > 0 \implies \frac{\Phi}{R} \in \overline{B^{X^{**}}} = J(\overline{B^X}) \implies \Phi \in J(\overline{B_R^X(0)}) \subset J(X)$$

X é reflexivo $\implies J(\overline{B^X}) = \overline{B^{X^{**}}}$ (hip.: J é isometria, sobrej.)

$$\bullet x \in \overline{B^X} \implies \|Jx\|_{X^{**}} = \|x\|_X \leq 1 \implies J(\overline{B^X}) \subset \overline{B^{X^{**}}} \quad \therefore J(\overline{B^X}) \subset \overline{B^{X^{**}}}$$

$$\bullet \Phi \in \overline{B^{X^{**}}} \subset X^{**} \xrightarrow{J \text{ sob.}} \exists x \in X; \underline{Jx = \Phi}$$

$$\|x\|_X = \|Jx\|_{X^{**}} = \|\Phi\|_{X^{**}} \leq 1 \implies \underline{x \in \overline{B^X}} \quad \text{e} \quad \underline{\Phi \in J(\overline{B^X})} \quad \therefore \overline{B^{X^{**}}} \subset J(\overline{B^X})$$

Exercícios

Exercício E1.8. ℓ_p com $p \in (1, \infty)$ é reflexivo. [Muj, p.51] ★

Exercício E1.9. Não são reflexivos $\ell_1, \ell_\infty, c_{00}, c_0$ e c . ★

Conclua:

- A recíproca da Proposição E1.3 não vale^(dual reflex. $\nRightarrow$ esp. refl.): $(c_{00})^*$ é isometricamente isomorfo a ℓ_2 .
- No caso particular de sequencias finitas $(\mathbb{K}^n)$, temos então que o dual de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ é isometricamente isomorfo a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_{p'})$. Isso inclusive para $p = \infty$ (podemos ver $\mathbb{K}^n$ como subconjunto de c_0). Todos são então reflexivos.

Teorema de Riez A5.7:

Em um e.v.n. X temos então que $\overline{B_1^X(0)}$ é compacta (na topologia forte) se e só se X tem dimensão finita.

E1.2.5 Teorema de Kakutani

Teorema E1.10 [Kakutani]. *Seja X um e.v.n.. X é reflexivo se, e somente se, $\overline{B^X}$ é compacta na topologia fraca.*

◁

Lema E1.11. *Seja X um e.v.n.. Então, $J : X_\sigma \rightarrow X_{\sigma^*}^{**}$ é contínua e (quando existe) sua inversa é contínua.*

◁

$J(\overline{B^X})$ é denso em $\overline{B^{X^{**}}}$ com a topologia forte

$X \xrightarrow[\text{Banach}]{J} J(\overline{B^X}) = \overline{B^{X^{**}}}$

$X \xrightarrow[\text{e.v.n.}]{J} X$ reflexivo

Lema E1.12 [Lema (Goldstine)]. *Seja X um e.v.n. Então $J(\overline{B^X})$ é denso em $\overline{B^{X^{**}}}$ com a topologia $\sigma^* = \sigma(X^{**}, X^*)$. Também $J(X)$ é denso em X^{**} com a mesma topologia.*

◁

Lema E1.13 [Lema (Helly)]. *Sejam X um e.v.n., $(f_1, \dots, f_n) \in (X^*)^n$, $\alpha \in \mathbb{K}^n$ e*

$$\mathbf{T} : X \rightarrow \mathbb{K}^n : x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x));$$

então, são equivalentes

i) *Para todo $\epsilon > 0$ existe $x_\epsilon \in \overline{B^X}$ tal que*

$$\|\mathbf{T}(x_\epsilon) - \alpha\|_\infty < \epsilon,$$

ii) *Para todo $\beta \in \mathbb{K}^n$,*

$$|\beta \cdot \alpha| \leq \|\beta \cdot \mathbf{T}\|_{X^*}.$$

◁

Prova do Teorema Kakutani E1.10: X é reflexivo se só se $\overline{B^X}$ é compacta na topologia fraca.

($\Rightarrow$)

- $J : X \rightarrow X^{**}$ é bijetor (X reflexivo)

- $\overline{B^{X^{**}}} = J(\overline{B^X}) \quad \therefore \overline{B^X} = J^{-1}(\overline{B^{X^{**}}})$

$J(\overline{B^X}) = \overline{B^{X^{**}}}$ se só se X é reflexivo (pág. E9)

- $\overline{B^{X^{**}}}$ é compacta na topologia fraca* do bidual $\sigma^* = \sigma(X^{**}, X^*)$ (T. B-A)

Teorema Banach-Alaoglu D5.2. Seja X um e.v.n. A bola fechada $\overline{B^{X^*}} = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$ é compacta na topologia fraca* $\sigma(X^*, X)$.

- $J^{-1} : (X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*)) \rightarrow (X, \sigma(X, X^*))$ é contínua

Lema E1.11. Seja X um e.v.n.. Então, $J : X_\sigma \rightarrow X_{\sigma^*}^{**}$ é contínua e (quando existe) sua inversa $J^{-1} : X_{\sigma^*}^{**} \rightarrow X_\sigma$ é contínua.

- $\overline{B^X} = J^{-1}(\overline{B^{X^{**}}})$ é compacto na top. fraca de X (Ex. de top. D5-(a))

($\Leftarrow$)

- $\overline{B^X}$ é compacto na topologia fraca (hipótese)

- $J(\overline{B^X})$ é compacto na topologia fraca* do bidual $\sigma(X^{**}, X^*)$ (Lemma E1.11)

- $J(\overline{B^X})$ é fechado na topologia fraca* do bidual $\sigma(X^{**}, X^*)$ (Ex. de top. D5-(b))

$$\therefore J(\overline{B^X}) = \overline{J(\overline{B^X})}^{\sigma^*} \stackrel{\text{Goldstine}}{=} \overline{B^{X^{**}}}$$

Lema (Goldstine) E1.12 Seja X um e.v.n.. Então $J(\overline{B^X})$ é denso em $\overline{B^{X^{**}}}$ com a topologia $\sigma^* = \sigma(X^{**}, X^*)$.

- X é reflexivo (pág. E9)

□

Juntando resultados obtidos, temos esta importante consequência:

Corolário E1.14. *Seja X é um espaço reflexivo (de Banach). Se $K \subseteq X$ é fechado, limitado e convexo, então K é compacto na topologia fraca.*

◁

Demonstração.

- K é fechado na top. fraca $\sigma(X, X^*)$ (T. Mazur, K fech. conv. top. forte)

Teorema Mazur D3.10 Se X é um e.v.n. sobre $\mathbb{K}$ e $C \subseteq X$ é convexo, são equivalentes:

- a) C fechado na topologia forte
- b) C fechado na topologia fraca

- $K \subset \overline{B_R^X(0)}$, para algum $R > 0$ (K limitado)
- $\overline{B_1^X(0)}$ é compacto na top. fraca (Kakutani, X reflexivo)
- $\overline{B_R^X(0)} = R\overline{B_1^X(0)}$ compacto na top. fraca
- K é compacto na top. fraca (Ex. de top. D5-(c))

□

E1.2.6 Prova dos Lemas Técnico, Helly e Goldstine

Aula 17

A seguir provaremos os Lemas E1.11, de Helly E1.13 e Goldstine E1.12.

Prova do Lema E1.11: Seja X um e.v.n.. Então, $J : X_\sigma \rightarrow X_{\sigma^*}^{**}$ é contínua e (quando existe) sua inversa é contínua.

Proposição D3.3 T é contínua se, e somente se, $\varphi \circ T : Z \rightarrow \mathbb{K}$ é contínua, $\forall \varphi \in X^*$.

$$(Z, \Sigma) \xrightarrow{T} (X, \sigma(X, X^*)) \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$$

$$\searrow \varphi \circ T \nearrow$$

pag. D43: **De fato, resultado análogo vale em geral trocando o esp. (X, σ) pelo esp. topológico $(Y, \tilde{\sigma})$ e trocando φ por todas as funções que define $\tilde{\sigma}$ a menor topologia que as deixa contínuas.**

$$(Z, \Sigma) \xrightarrow{T} (X^*, \sigma^*) \xrightarrow{Jx} (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}}) \quad (\text{E1.1})$$

$$\searrow Jx \circ T \nearrow$$

T é contínua $\iff Jx \circ T$ é contínua para todo $x \in X$

Lembre: a top. fraca* $\sigma^* = \sigma(X^*, X)$ em X^* é a induzida pela família $J(X) = \{Jx\}_{x \in X}$, $J : X \rightarrow X^{**}$ mergulho canônico: $Jx(f) = f(x), \forall f \in X^*, x \in X$.

Todo $\Phi \in J(X)$ será ainda contínuo com respeito à topologia fraca*.

Analogamente toda mapa $\phi \in X^* \mapsto \phi(x)$ (avaliação em $x \in X$ fixado) será contínua com respeito à topologia fraca*.

- Temos: J é contínua $\iff Kf \circ J$ é contínua para todo $f \in X^*$

$$(X, \sigma(X, X^*)) \xrightarrow{J} (X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*)) \xrightarrow{Kf} (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$$

$$\searrow Kf \circ J \nearrow$$

Analogamente: a top. fraca* $\sigma(X^{**}, X^*)$ em X^{**} é a induzida pela família $K(X^*) = \{Kf\}_{f \in X^*}$, $K : X^* \rightarrow X^{***}$ mergulho canônico: $Kf(\phi) = \phi(f), \forall \phi \in X^{**}, f \in X^*$.

Todo $\Phi \in K(X^*)$ será ainda contínuo com respeito à topologia fraca* $\sigma(X^{**}, X^*)$.

Analogamente toda mapa $\phi \in X^{**} \mapsto \phi(f)$ (avaliação em $f \in X^*$ fixado) será contínua com respeito à topologia fraca* $\sigma(X^{**}, X^*)$.

■ $f \in X^*$

$$x \mapsto Jx \mapsto Kf(Jx) \xrightarrow[\text{merg.can.}]{K} Jx(f) \xrightarrow[\text{merg.can.}]{J} f(x)$$

a qual é contínua na top. forte, e portanto é contínua na top. fraca $\sigma(X, X^*)$ (def. top. fraca D3.1)

- Temos: J^{-1} é contínua $\iff f \circ J^{-1}$ é contínua para todo $f \in X^*$ $(\exists J^{-1})$

$$(\mathbf{J}(\mathbf{X}) \subseteq X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*)) \xrightarrow{J^{-1}} (X, \sigma(X, X^*)) \xrightarrow{f} (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$$

$\xrightarrow{f \circ J^{-1}}$

■ $f \in X^*$

$$\phi \mapsto \boxed{J^{-1}\phi = x} \mapsto f(J^{-1}\phi) \equiv f(x) \stackrel{J}{\underset{\text{merg.can.}}{=}} \boxed{Jx}(f) = \boxed{\phi}(f)$$

a qual é contínua na top. fraca* $\sigma(X^{**}, X^*)$

(def. top. fraca* D4.3)

□

.....

Prova do Lema (Helly) E1.13: Sejam X um e.v.n, $(f_1, \dots, f_n) \in (X^*)^n$, $\alpha \in \mathbb{K}^n$ e

$$\mathbf{T} : X \rightarrow \mathbb{K}^n : x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x));$$

então, são equivalentes

i) Para todo $\epsilon > 0$ existe $\boxed{x_\epsilon \in \overline{B^X}}$ tal que

$$\|\mathbf{T}(x_\epsilon) - \alpha\|_\infty = \max_{j=1, \dots, n} \{|f_j(x_\epsilon) - \alpha_j|\} < \epsilon,$$

ii) Para todo $\beta \in \mathbb{K}^n$,

$$|\beta \cdot \alpha| \leq \|\beta \cdot \mathbf{T}\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |\beta \cdot Tx|.$$

i) $\implies$ ii)

$$|\beta \cdot \alpha| - |\beta \cdot Tx_\epsilon| \leq |\beta \cdot \alpha - \beta \cdot Tx_\epsilon| = |\beta \cdot Tx_\epsilon - \beta \cdot \alpha| = |\beta \cdot (Tx_\epsilon - \alpha)|$$

$$|\beta \cdot \alpha| \leq |\beta \cdot Tx_\epsilon| + |\beta \cdot (Tx_\epsilon - \alpha)| \leq \|\beta \cdot \mathbf{T}\|_{X^*} \boxed{\|x_\epsilon\|} + |\beta \cdot (Tx_\epsilon - \alpha)|$$

Holder A2.5

$$\leq \|\beta \cdot \mathbf{T}\|_{X^*} + \underbrace{\|\beta\|_1}_{const.} \|Tx_\epsilon - \alpha\|_\infty$$

$$(\sum |\xi_j \eta_j| \leq (\sum |\xi_j|^p)^{1/p} (\sum |\eta_j|^q)^{1/q})$$

hipotese

$$\leq \|\beta \cdot \mathbf{T}\|_{X^*} + c\epsilon, \quad \forall \epsilon > 0$$

Note: i) $\left(\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in \overline{B^X}; \|T(x_\epsilon) - \alpha\|_\infty < \epsilon \right) \iff \alpha \in \overline{T(\overline{B^X})} \subset \mathbb{K}^n$

ii) $\implies$ i): Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Suponha $\alpha \notin \overline{T(\overline{B^X})}$

Queremos encontrar $\beta \in \mathbb{R}^n; |\beta \cdot \alpha| > \|\beta \cdot T\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |\beta \cdot Tx|$.

- $\{\alpha\} \cap \overline{T(\overline{B^X})} = \emptyset$
- $\{\alpha\}$ convexo compacto
- $\overline{T(\overline{B^X})}$ convexo fechado (prova do lema TAA pag. B21, T linear)

Teorema B3.4 [Hahn-Banach - Forma Geométrica 2] Sejam X um e.v.n. real e $A, B \subseteq X$ conjuntos convexos, não vazios e disjuntos. Se A é fechado e B é compacto, então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido forte: $\exists \alpha \in \mathbb{R}, f \in X^*; f|_B \geq \alpha + \epsilon > \alpha > \alpha - \epsilon \geq f|_A$.

- $\exists \xi \in \mathbb{R}, \varphi \in (\mathbb{R}^n)^*; \quad \varphi(\alpha) > \xi > \varphi|_{\overline{T(\overline{B^X})}}$
- $\exists \beta \in \mathbb{R}^n; \quad \varphi(x) = \beta \cdot x$ (linear em $\mathbb{R}^n$)

$$\begin{aligned} \xi > \varphi|_{\overline{T(\overline{B^X})}} &\implies \varphi(Tx) < \xi, x \in \overline{B^X} \iff \beta \cdot Tx < \xi, x \in \overline{B^X} \\ &\stackrel{\text{simetria}}{\iff} |\beta \cdot Tx| < \xi, x \in \overline{B^X} \\ &\implies \|\beta \cdot T\|_{X^*} \leq \xi \end{aligned}$$

$$\therefore \|\beta \cdot T\|_{X^*} \leq \xi < \varphi(\alpha) = \beta \cdot \alpha \leq |\beta \cdot \alpha|$$

ii) $\implies$ i): Caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Exercício. **Sugestão:** escreva

$$f_j = \Re f_j + i \Im f_j, \quad \alpha_j = \alpha_j^1 + i \alpha_j^2, \quad \beta_j = \beta_j^1 + i \beta_j^2, \quad j = 1, \dots, n$$

e aplique o Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. □

Prova do Lema (Goldstine) E1.12: Seja X um e.v.n.. Então,

$$\overline{J(\overline{B^X})}^{\sigma(X^{**}, X^*)} = \overline{B^{X^{**}}} , \quad \overline{J(X)}^{\sigma(X^{**}, X^*)} = X^{**}.$$

Af.1. $\overline{J(\overline{B^X})}^{\sigma(X^{**}, X^*)} \subset \overline{B^{X^{**}}}$

- $J(\overline{B^X}) \subset \overline{B^{X^{**}}}$ ($J : X \rightarrow X^{**}$ merg. canônico: isometria)
- $\overline{J(\overline{B^X})}^{\sigma(X^{**}, X^*)} \subset \overline{\overline{B^{X^{**}}}}^{\sigma(X^{**}, X^*)}$
- $\overline{B^{X^{**}}}$ comp. na top. fraca* $\sigma(X^{**}, X^*)$, logo fechado (T.B-A D5.2, ex. top. D5)
- $\overline{\overline{B^{X^{**}}}}^{\sigma(X^{**}, X^*)} = \overline{B^{X^{**}}}$

Af.2. $\overline{B^{X^{**}}} \subset \overline{J(\overline{B^X})}^{\sigma(X^{**}, X^*)}$

- $\varphi \in \overline{B^{X^{**}}}$

Queremos $\forall_{\varphi \ni V \in \sigma(X^{**}, X^*)}, \quad V \cap J(\overline{B^X}) \neq \emptyset, \text{ i.e., } \exists x \in \overline{B^X}; \quad Jx \in V$

- $V \in \sigma(X^{**}, X^*) ; V \ni \varphi$
- $\exists \epsilon > 0, f_1, \dots, f_n \in X^*; V_{\epsilon, f_1, \dots, f_n}(\varphi) = \{\eta \in X^{**} : |(\eta - \varphi)(f_j)| < \epsilon, \forall j\} \subset V$

Basta mostrar: $\exists x \in \overline{B^X}; \quad |(Jx - \varphi)(f_j)| < \epsilon, \forall j = 1, \dots, n$

$$\iff |f_j(x) - \underbrace{\varphi(f_j)}_{\in \mathbb{K}}| < \epsilon, \forall j = 1, \dots, n$$

Lema (Helly) E1.13: Sejam X um e.v.n, $(f_1, \dots, f_n) \in (X^*)^n$, $\alpha \in \mathbb{K}^n$ e

$$T : X \rightarrow \mathbb{K}^n : x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x));$$

então, são equivalentes

- i) Para todo $\epsilon > 0$ existe $x_\epsilon \in \overline{B^X}$ tal que

$$\|T(x_\epsilon) - \alpha\|_\infty = \max_{j=1, \dots, n} \{|f_j(x_\epsilon) - \alpha_j|\} < \epsilon,$$

ii) Para todo $\beta \in \mathbb{K}^n$,

$$|\beta \cdot \alpha| \leq \|\beta \cdot \mathbf{T}\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |\beta \cdot Tx|.$$

- $\mathbf{T} : X \rightarrow \mathbb{K}^n : x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$
- $\alpha := (\varphi(f_1), \dots, \varphi(f_n)) \in \mathbb{K}^n$
- $\beta \in \mathbb{K}^n$

$$\begin{aligned}
 |\beta \cdot \alpha| &= \left| \sum_{i=1}^n \beta_i \varphi(f_i) \right| \\
 &\stackrel[\varphi \in \overline{B^{X^{**}}}]{{\text{linearidade}}}{=} \left| \varphi \left(\sum_{i=1}^n \beta_i f_i \right) \right| \\
 &\stackrel[\beta_i f_i \in X^*]{\varphi \in X^{**}}{\leq} \|\varphi\|_{X^{**}} \left\| \sum_{i=1}^n \beta_i f_i \right\|_{X^*} \\
 &= \|\varphi\|_{X^{**}} \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \left| \sum_{i=1}^n \beta_i f_i(x) \right| \\
 &= \|\varphi\|_{X^{**}} \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |\beta \cdot \mathbf{T}x| \\
 &= \|\varphi\|_{X^{**}} \|\beta \cdot \mathbf{T}\|_{X^*} \\
 &\stackrel[\leq]{\varphi \in \overline{B^{X^{**}}}}{\leq} \|\beta \cdot \mathbf{T}\|_{X^*}
 \end{aligned}$$

Af. 3. $\overline{J(X)}^{\sigma(X^{**}, X^*)} = X^{**}$

Exercício.

□

E2 Separabilidade e metrização da bola

E2.1 Definição e propriedades

Um espaço métrico (X, d) é dito **separável** se existir um subconjunto enumerável $D \subseteq X$ que é denso em X .

LEMBRETE: [Fol99, pag. 6]

- $\text{card}(X) \leq$ (resp. $=$ // resp. $\geq$) $\text{card}(Y)$ significa que existe $f : X \rightarrow Y$ injetora (resp. bijetora // , resp. sobrej.)
- a desigualdade estrita $<$ (resp. $>$) significa que existe uma injeção (resp. sobrejeção) mas não uma bijeção.
- X enumerável significa $\text{card}(X) \leq \text{card}(\mathbb{N})$,
- um produto cartesiano finito de enumeráveis é enumerável
- uma reunião enumerável de enumeráveis é enumerável
- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ não é enumerável

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ é enumerável $\iff \text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \leq \text{card}(\mathbb{N})$

Mas

$\text{card}(X) < \text{card}(\mathcal{P}(X))$ para qualquer conjunto X :

- $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X) : x \mapsto f(x) = \{x\}$ é injetora:

$$\text{card}(X) \leq \text{card}(\mathcal{P}(X))$$

- qualquer $g : X \rightarrow \mathcal{P}(X) : x \mapsto g(x) = Z \subset X$ não pode ser sobrejetora pois:

$$\mathcal{P}(X) \ni Y := \{x \in X : x \notin g(x) = Z\} \notin \text{Im}(g)$$

$$Y \in \text{Im}(g) \iff \exists x \in X; g(x) = Y, \text{ neste caso } x \in Y?$$

Exercícios

Exercício E2.1. São separáveis [BPT12, p. 16..]

- $\mathbb{K}^n$ (separado por $\mathbb{Q}^n$ ou $\mathbb{Q}^{2n}$)
- ℓ_p com $1 \leq p < \infty$ (separados por $c_{00}(\mathbb{Q})$) e também c, c_0 .
- também $X^n, \ell_p(X), c(X), c_0(X)$ se X é separável.
- $(C([a, b], \mathbb{R}), \| \cdot \|_U)$ (Teorema da Aproximação de Weierstrass)

ℓ_∞ não é separável.

★

Exercício E2.2. Sejam X um e.v.n, $\{x_n\}$ uma sequência em X e $M = [x_n]_{n \in \mathbb{N}}$ (combinações lineares (finitas) de elementos da sequência).
Mostre que se M é denso em X , então X é separável.

★

Proposição E2.3. *Seja X um espaço métrico separável e $\emptyset \neq F \subset X$. Então F é separável.*

◁

Proposição E2.4. *Se X é um e.v.n. e X^* é separável então X também é separável.*

◁

Observação. A recíproca não é verdadeira: ℓ_1 é separável e seu dual (isometricamente isomorfo a ℓ_∞ , Ex. C2.4) não é.

★

Lema E2.5. *Se X e Y são e.v.n. isometricamente isomorfos, então X é separável se, e somente se, Y é separável.*

◁

Demonstração. Exercício.

□

O Teorema E1.7, a Proposição E2.4 e o Lema E2.5 implicam:

Teorema E2.6. *Seja X um espaço de Banach. Então, X é reflexivo e separável, se e somente se, X^* é reflexivo e separável.*

◁

Demonstração. ($\Leftarrow$) Teorema E1.7 + a Proposição E2.4

($\Rightarrow$)

X refl. $\xrightarrow[\text{is.is.sob.}]{\text{merg.can.}}$ X^{**} isom.isom. a $X \xrightarrow[\text{L.E2.5}]{X\text{sep.}}$ X^{**} separável $\xrightarrow{P.E2.4}$ X^* separável □

E2.1.1 Demonstrações

Aula 18

Prova da Proposição E2.3: Seja X um espaço métrico separável e $\emptyset \neq F \subset X$. Então F é separável.

- $\exists D = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset X$ enumerável e denso em X (X separável)

Af. 1. $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{\frac{1}{m}}(x_n) \quad \forall m \in \mathbb{N}$

- $x \in \overline{X} = \overline{D}$
- $\exists x_{n_0} \in D \cap B_{\frac{1}{m}}(x) \quad (B_{\frac{1}{m}}(x) \text{ aberto em } X \text{ e.m.})$
- $x \in B_{\frac{1}{m}}(x_{n_0})$
- $\therefore x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{\frac{1}{m}}(x_n)$

Queremos: um subconj. de F enumerável e denso em F

- para cada (m, n) tal que $F \cap B_{\frac{1}{m}}(x_n) \neq \emptyset$ escolha (a intersec. não pode ser $\emptyset \forall m, n: F \neq \emptyset$)

$$y_{m,n} \in F \cap B_{\frac{1}{m}}(x_n)$$

- $Y := \{y_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ é um subconjunto de F enumerável

Af. 2. $\overline{Y} = F$

- $\overline{Y} \subset F$ pois $Y \subset F$
- $F \subset \overline{Y}$:
- $y \in F$

Queremos: $\forall \varepsilon > 0, \exists z \in Y \cap B_\varepsilon(y)$, i.e., $\exists z \in Y; \|y - z\| < \varepsilon$

- $y = y_{m,n}$ para algum (m, n) , ok!
- $y \neq y_{m,n} \forall m, n$
- dado $\varepsilon > 0$ e $m_0 \in \mathbb{N}$

$$\blacksquare \exists n_0; \quad y \in B_{\frac{1}{m_0}}(x_{n_0}) \quad (y \in F \subset X \stackrel{Af.1.}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{\frac{1}{m}}(x_n))$$

$$\blacksquare F \cap B_{\frac{1}{m_0}}(x_{n_0}) \neq \emptyset$$

$$\blacksquare z \in F \cap B_{\frac{1}{m_0}}(x_{n_0}) \text{ como sendo o elemento escolhido } z = y_{m_0, n_0} \in Y$$

$$\|y - z\| \leq \|y - x_{n_0}\| + \|x_{n_0} - z\| < \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_0} = \frac{2}{m_0} \stackrel{\text{tome}}{<} \frac{1}{m_0} < \frac{\varepsilon}{2}$$

□

.....
Prova da Proposição E2.4: X e.v.n., X^ separável $\implies X$ separável.*

$$\bullet S_1^{X^*}(0) \text{ é separável} \quad (S_1^{X^*}(0) \subset X^* \text{ sep.} + \text{Prop. E2.3})$$

$$\bullet \exists D = \{\varphi_n \in S_1^{X^*}(0), n \in \mathbb{N}\} \text{ enumerável e denso em } S_1^{X^*}(0)$$

$$\forall \varphi \in S_1^{X^*}(0), \varepsilon > 0 \exists \varphi_n \in D; \quad \|\varphi - \varphi_n\|_{X^*} < \varepsilon$$

Queremos: $M \subset X$ enumerável e denso em X

$$\bullet \text{ para cada } n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in X \text{ com } \|x_n\| \leq 1; \quad |\varphi_n(x_n)| \geq \frac{1}{2} \quad (\text{def. sup})$$

$$\|\varphi_n\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |\varphi_n(x)| = 1$$

$$\bullet M := [x_n, n \in \mathbb{N}]_{\mathbb{Q}} \quad (\text{o e.v. gerado com coeficientes em } \mathbb{Q} \text{ ou } \mathbb{Q}^2, \text{ não é s.e.v.})$$

Af. 1. $M \subset X$ é enumerável

$$A_n := [x_1, \dots, x_n]_{\mathbb{Q}} \text{ é enumerável} \quad (\mathbb{Q}^n \text{ ou } \mathbb{Q}^{2n} \text{ é enumerável})$$

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_n x_n \longleftrightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Q}^n \quad \text{ou } \mathbb{Q}^{2n}$$

$$M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

Af. 2. M é denso em X

- M é denso em $L := [x_n, n \in \mathbb{N}]_{\mathbb{K}} \subset X$ (L pode não ser en.)
s.e.v.

Basta mostrar que L é denso em X : $\overline{L} = X$

- supor $\exists z_0 \in X \setminus \overline{L}$

Teorema [Existem muitos funcionais] B2.4 a. M s.e.v. fechado de X e $x_0 \in X \setminus M \implies, f \in X^*, \|f\| = 1, f|_M = 0$, e $f(x_0) = d(x_0, M) > 0$.

- $\exists \varphi \in S_1^{X^*}(0); \varphi|_{\overline{L}} = 0$ e $\varphi(z_0) \neq 0$

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |\varphi(x) - \varphi_n(x)| \geq \sup_{\substack{x_n \in X \\ \|x_n\| \leq 1}} |\varphi(x_n) - \varphi_n(x_n)|$$

$$\underset{x_n \in L}{=} |\varphi_n(x_n)| \geq \frac{1}{2} \quad \forall n, \quad \boxed{\rightrightarrows \leftrightsquigarrow D \text{ é denso em } S^{X^*}}$$

□

Proposição E2.7. Se existe uma família não enumerável de abertos em X , não vazios e 2 a 2 disjuntos, então X não é separável. $\triangleleft$

Demonstração.

- $\{O_i\}_{i \in I} \subset X$, I não enumerável, O_i abertos não vazios, 2 a 2 disjuntos
- $\boxed{\text{supor } X \text{ separável}}$: $\exists D := \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset X, \overline{\{x_n, n \in \mathbb{N}\}} = X$
- $\exists n_i \in \mathbb{N}; x_{n_i} \in O_i$ ($\emptyset \neq O_i \subset X, D$ denso em X)
ab.
- $n : I \rightarrow \mathbb{N} : i \mapsto n_i$ é injetora ($O_i \cap O_j = \emptyset, i \neq j$)

- $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$ significa que existe $f : X \rightarrow Y$ injetora
- X enumerável significa $\text{card}(X) \leq \text{card}(\mathbb{N})$,

- $\text{card}(I) \leq \text{card}(\mathbb{N})$

- I é enumerável

$\boxed{\rightrightarrows \leftrightsquigarrow}$

□

Proposição E2.8. *Todo e.v.n. X separável é isometricamente isomorfo a um subespaço de ℓ_∞ .* $\triangleleft$

Demonstração.

- $\exists \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto denso de X (X separável)
- $\exists \varphi_n \in X^*, n \in \mathbb{N}; \quad \|\varphi_n\|_{X^*} = 1$ e $\varphi_n(x_n) = \|x_n\|$

Teorema [Existem muitos funcionais]B2.4 Seja X um e.v.n. sobre $\mathbb{K}$. [b.] Se X é não trivial, X^* é não trivial: Se $x_0 \neq 0$, existe $f \in X^*$ tal que $\|f\|_{X^*} = 1$ e $f(x_0) = \|x_0\|$.

Af. 1. $T : X \rightarrow \ell_\infty : x \mapsto Tx = (\varphi_n(x))_n = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots)$ é um mergulho isométrico

$$\ell_\infty = \{x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K} : \|x\|_\infty < \infty\}, \quad \|x\|_\infty := \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j|$$

■ T é linear

■ $Tx \in \ell_\infty$

$$\|Tx\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\varphi_j(x)| \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} \|\varphi_j\|_{X^*} \|x\| = \|x\|, \quad \forall x \in X$$

$\therefore T(X) \subset_{s.e.v.} \ell_\infty$ e T é limitada/contínua

■ $\|Tx_n\|_\infty = \|x_n\|, \forall n$

$$Tx_n = (\varphi_1(x_n), \dots, \varphi_n(x_n), \dots) = (\varphi_1(x_n), \dots, \|x_n\|, \dots)$$

$$\implies \|Tx_n\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\varphi_j(x_n)| \geq \|x_n\|$$

■ $\|Tx\|_\infty = \|x\|, \forall x \in X$

$$(\overline{\{x_n; n \in \mathbb{N}\}} = X)$$

$\therefore T$ é uma isometria e logo injetora

□

Exercícios

Exercício E2.9 (EE2). Seja X um e.v.n. de dimensão infinita e separável.

- Mostre que existe uma sequência de subespaços de dimensão finita cuja reunião é densa.
- Mostre que existe uma sequência ϕ_n em X^* com $\|\phi_n\| = 1$ e tal que $\phi_n(x) \rightarrow 0$ para todo $x \in X$



E2.2 Metrização da bola

Teorema E2.10. *Seja X um e.v.n. Então X é separável, se e somente se, $(\overline{B^{X^*}}, \sigma(X^*, X))$ é metrizável.*

Uma métrica é

$$d_{\sigma^*}(\phi, \psi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\phi(x_n) - \psi(x_n)|, \quad \phi, \psi \in \overline{B^{X^*}},$$

onde $\{x_n\}$ é denso em $\overline{B^X}$.



$(\overline{B^{X^}}, \sigma(X^*, X))$ é metrizável $\iff \exists d : \overline{B^{X^*}} \times \overline{B^{X^*}} \rightarrow [0, \infty)$ métrica; todo aberto da top. forte (induzida por d) contém aberto da top. fraca* restrita $\overline{B^{X^*}}$ e vice-versa.*

Teorema E2.11. *Seja X um e.v.n. Então X^* é separável, se e somente se, $(\overline{B^X}, \sigma(X, X^*))$ é metrizável. Uma métrica é*

$$d_{\sigma}(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x - y)|, \quad x, y \in \overline{B^X},$$

onde $\{f_n\}$ é denso em $\overline{B^{X^*}}$.



Exercícios

Exercício E2.12 ($\overline{B^X}$ metr.). Prove o Teorema E2.11 imitando a do Teorema E2.10 e usando o exercício 3.24 do [Bre11, p.85, 75–76].



De fato, nos Teoremas E2.10 e E2.11 pode-se substituir a bola unitária por qualquer bola fechada.

Prova do Teorema E2.10.

($\implies$)

- $\overline{B^X}$ é separável (X separável)

Proposição E2.3 Se X é e.m. separável e $\emptyset \neq F \subset X$, então F é separável.

- $\exists \{x_n \in \overline{B^X} : n \in \mathbb{N}\}$ enumerável e denso em $\overline{B^X}$
- $d : \overline{B^{X^*}} \times \overline{B^{X^*}} \rightarrow [0, \infty)$

$$d_{\sigma^*}(\phi, \psi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\phi(x_n) - \psi(x_n)|$$

Af.1. d está bem definida

Af.2. d é uma métrica

dada $\phi_0 \in \overline{B^{X^*}}$, i.e., $\phi_0 \in X^*$ e $\|\phi_0\| \leq 1$:

Af.3. $\phi_0 \in V \in \sigma(X^*, X)|_{\overline{B^{X^*}}} \implies \exists U \in \tau_{\overline{B^{X^*}}}; \quad \phi_0 \in U \subset V$

Af.4. $\phi_0 \in U \in \tau_{\overline{B^{X^*}}} \implies \exists V \in \sigma(X^*, X)|_{\overline{B^{X^*}}}; \quad \phi_0 \in V \subset U$

- $(\overline{B^{X^*}}, \sigma(X^*, X))$ é metrizável

Prova da Af. 1.: $\forall \phi, \psi \in \overline{B^{X^*}},$

$$\frac{1}{2^n} |\phi(x_n) - \psi(x_n)| \leq \frac{1}{2^n} \|\phi - \psi\| \|x_n\| \leq \frac{1}{2^n} \|\phi - \psi\| \leq 2 \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} < \infty$$

Prova da Af. 2.:

(a) $d_{\sigma^*}(\phi, \psi) \geq 0, \forall \phi, \psi \in \overline{B^{X^*}}$

(b) $d_{\sigma^*}(\phi, \psi) = 0 \implies \phi(x_n) = \psi(x_n), \forall n \xrightarrow[\text{denso}]{\{x_n\}} \phi(x) = \psi(x), \forall x \in \overline{B^X} \xrightarrow{\text{linearidade}}$
 $\phi(x) = \psi(x), \forall x \in X$

(c) $d_{\sigma^*}(\phi, \psi) \leq d_{\sigma^*}(\phi, \rho) + d_{\sigma^*}(\rho, \psi), \forall \phi, \psi, \rho \in \overline{B^{X^*}}$

Prova da Af. 3.:

- $\phi_0 \in \overline{B^{X^*}}, \quad \phi_0 \in V \in \sigma(X^*, X)|_{\overline{B^{X^*}}}$
- $\exists \varepsilon > 0, y_1, \dots, y_m \in X;$

$$V_{\varepsilon, y_1, \dots, y_m}(\phi_0) = \{\phi \in \overline{B^{X^*}} : |(\phi - \phi_0)(y_i)| < \varepsilon, \forall i = 1, \dots, m\} \subset V$$

Basta mostrar $\exists U \in \tau_{\overline{B^{X^*}}}; \quad \phi_0 \in U \subset V_{\varepsilon, y_1, \dots, y_m}(\phi_0), \quad \text{i.e.,}$

$$\stackrel{?}{\exists} r > 0; \quad \Delta_r(\phi_0) := \{\phi \in \overline{B^{X^*}} : d(\phi, \phi_0) < r\} \subset V_{\varepsilon, y_1, \dots, y_m}(\phi_0)$$

Queremos: $r > 0;$

$$d(\phi, \phi_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\phi(x_n) - \phi_0(x_n)| < r \implies |(\phi - \phi_0)(y_i)| < \varepsilon, \forall i = 1, \dots, m \quad (\phi \in \overline{B^{X^*}})$$

i.e.,

$$\frac{1}{2^n} |\phi(x_n) - \phi_0(x_n)| < r, \forall n \implies |(\phi - \phi_0)(y_i)| < \varepsilon, \forall i = 1, \dots, m$$

i.e.,

$$|\phi(x_n) - \phi_0(x_n)| < 2^n r, \forall n \implies |(\phi - \phi_0)(y_i)| < \varepsilon, \forall i = 1, \dots, m$$

$$|(\phi - \phi_0)(y_i)| \leq |\phi(y_i) - \phi(x_n)| + \underbrace{|\phi(x_n) - \phi_0(x_n)|}_{Ok} + |\phi_0(x_n) - \phi_0(y_i)|$$

$$\leq \|\phi\| \|y_i - x_n\| + 2^n r + \|\phi_0\| \|x_n - y_i\|$$

$$\leq \|y_i - x_n\| + 2^n r + \|x_n - y_i\|, \quad \forall n$$

$$\text{Se } y_i \in \overline{B^X}, i = 1, \dots, m, \quad (\{x_n\} \text{ é denso em } \overline{B^X})$$

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0, \exists x_{n_i} \in \overline{B^X}; \quad \|x_{n_i} - y_i\| < \tilde{\varepsilon}$$

$$\therefore |(\phi - \phi_0)(y_i)| \leq 2 \|y_i - x_{n_i}\| + 2^{n_i} r \leq 2\tilde{\varepsilon} + 2^{n_i} r$$

basta tomar $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{4}$ e $r > 0; \quad 2^{n_i} r < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n_i \quad \text{i.e., } 0 < r < \min\{\frac{\varepsilon}{2^{n_i+1}}, i = 1, \dots, m\}$

S.P.G. podemos considerar $y_1, \dots, y_m \in \overline{B^X}$ (trocando ε !)

tome $z_i \in \overline{B^X}$, $i = 1, \dots, m$, dados por

$$z_i = \begin{cases} \frac{y_i}{\|y_i\|}, & \|y_i\| > 1 \\ y_i, & \|y_i\| \leq 1 \end{cases}$$

Queremos $\epsilon > 0$ tal que:

$$\tilde{V}_{\epsilon, z_1, \dots, z_m}(\phi_0) = \{\phi \in \overline{B^{X^*}} : |(\phi - \phi_0)(z_i)| < \epsilon, \forall i\} \subset V_{\epsilon, y_1, \dots, y_m}(\phi_0) \subset V$$

$$\phi \in \tilde{V}_{\epsilon, z_1, \dots, z_m}(\phi_0) \stackrel{?}{\implies} \phi \in V_{\epsilon, y_1, \dots, y_m}(\phi_0)$$

•

$$|(\phi - \phi_0)(\frac{y_i}{\|y_i\|})| < \epsilon \Rightarrow |(\phi - \phi_0)(y_i)| < \epsilon \|y_i\| = \varepsilon$$

•

$$|(\phi - \phi_0)(y_i)| < \epsilon = \varepsilon$$

tome $\epsilon = \min\{\varepsilon, \frac{\varepsilon}{\|y_i\|}, i = 1, \dots, m\}$

Prova da Af. 4.:

- $\phi_0 \in \overline{B^{X^*}}, \quad \phi_0 \in U \in \tau_{\overline{B^{X^*}}};$

$$\therefore \exists r > 0; \quad \Delta_r(\phi_0) = \{\phi \in \overline{B^{X^*}} : d(\phi, \phi_0) < r\} \subset U$$

Queremos mostrar: $\exists \phi_0 \ni V \in \sigma(X^*, X)|_{\overline{B^{X^*}}}; \quad V \subset U$

Basta mostrar: $\exists y_1, \dots, y_m \in X, \varepsilon > 0;$

$$V_{\varepsilon, y_1, \dots, y_m}(\phi_0) = \{\phi \in \overline{B^{X^*}} : |(\phi - \phi_0)(y_i)| < \varepsilon, \forall i = 1, \dots, m\} \subset \Delta_r(\phi_0)$$

- **candidatos naturais:** $y_i = x_i$ (elem. do conj. $\{x_n\}$ denso em $\overline{B^X}$)
- **para quantos pontos ($m=?$) e para qual $\varepsilon > 0$ temos:**

$$|(\phi - \phi_0)(\overbrace{y_i}^{x_i})| < \varepsilon, \forall i = 1, \dots, m(=?) \implies d(\phi, \phi_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\phi(x_n) - \phi_0(x_n)| < r$$

$$\begin{aligned}
d(\phi, \phi_0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\phi(x_n) - \phi_0(x_n)| \\
&= \sum_{n=1}^m \frac{1}{2^n} \boxed{|\phi(x_n) - \phi_0(x_n)|} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \boxed{|\phi(x_n) - \phi_0(x_n)|} \\
&\stackrel{\text{se}}{<} \boxed{\varepsilon} \sum_{n=1}^m \frac{1}{2^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \boxed{\|\phi - \phi_0\| \|x_n\|} \\
&\stackrel{\phi, \phi_0 \in \overline{B^{X^*}}}{<} \varepsilon \sum_{n=1}^m \frac{1}{2^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \boxed{2} \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \right) \\
&\leq \varepsilon + 2 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= \varepsilon + \frac{1}{2^{m-1}} \\
&\stackrel{\text{queremos}}{<} \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \\
&\stackrel{\phi \in \Delta_r(\phi_0)}{<}
\end{aligned}$$

basta tomar $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{m-1}} < \frac{r}{2}$ e $0 < \varepsilon < \frac{r}{2}$

($\Leftarrow$)

- $\exists d : \overline{B^{X^*}} \times \overline{B^{X^*}} \rightarrow [0, \infty)$ métrica; todo aberto de $\tau_{\overline{B^{X^*}}}$ contém aberto de $\sigma(X^*, X)|_{\overline{B^{X^*}}}$ e vice-versa ($(\overline{B^{X^*}}, \sigma(X^*, X))$ é metrizável)

Queremos encontrar $D \subset X$ enumerável e denso em X

- $\Delta_{\frac{1}{k}}(0) = \{\phi \in \overline{B^{X^*}} : d(\phi, 0) < \frac{1}{k}\} \in \tau_{\overline{B^{X^*}}}$
- $\exists \varepsilon_k > 0, x_1^k, \dots, x_{n_k}^k \in X;$

$$\boxed{V_{\varepsilon_k, x_1^k, \dots, x_{n_k}^k}(0) = \{\phi \in \overline{B^{X^*}} : |\phi(x_i^k)| < \varepsilon, \forall i = 1, \dots, n_k\} \subset \Delta_{\frac{1}{k}}(0)}$$

- $D := [\{x_1^k, \dots, x_{n_k}^k : k \in \mathbb{N}\}]_{\mathbb{Q}^2} \subset X$ é enumerável (ver p. E22, não é s.e.v.)
- $L := [\{x_1^k, \dots, x_{n_k}^k : k \in \mathbb{N}\}]_{\mathbb{K}} \subset X$ (pode ser não enumerável)

- D é denso em L

Af. L é denso em X e portanto D é denso em X

Exercício B2.6. Um subespaço M de um e.v.n. X é denso se e só se vale que

$$\forall \phi \in X^* \text{ t.q. } \phi|_M = 0, \text{ vale } \phi \equiv 0$$

$$\blacksquare \phi \in X^*; \quad \phi|_L = 0$$

$$\implies \phi(x_i^k) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_k, \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\implies |\phi(x_i^k)| < \varepsilon_k, \quad \forall i = 1, \dots, n_k, \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\implies \phi \in V_{\varepsilon_k, x_1^k, \dots, x_{n_k}^k}(0) \subset \Delta_{\frac{1}{k}}(0) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\implies d(\phi, 0) < \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N} \implies \phi \equiv 0$$

□

E2.2.1 Consequências

Aula 19

Corolário E2.13. Nas hipóteses do Teorema E2.10 (X separável) (resp. E2.11, X^* separável) para limitados de X^* (resp. de X), *compacidade e compacidade sequencial são equivalentes*. ◁

- K é *sequencialmente compacto*:

toda sequência em K possui subsequência convergente em K

- Em espaços topológicos:

compacto $\nLeftrightarrow$ sequencialmente compacto:

– $(B_{\infty}^*, \sigma(\ell_{\infty}^*, \ell_{\infty}))$ é compacta e é possível construir sequência em $B_{\infty}^{\ell_{\infty}}$ que não possui subsequência convergente^[Bre11, Exercício 3.18] (Verifique!)

– o espaço de todos os ordinais numeráveis ω_1 , munido com a topologia da ordem é sequencialmente compacto, mas não compacto.^[Mun00, Exerc.6-Seção 26, Exemplo 5-Seção 27]

- **Em espaços métricos:**^[Mun00, Theorem 27.3]

compacto $\iff$ sequencialmente compacto

Temos então

Corolário E2.14. Se X é um e.v.n. separável e $\{f_n\}$ é uma sequência limitada de X^* , então existe subsequência $\{f_{n_k}\}$ que converge em $\sigma(X^*, X)$ (conv. fraca*).

Teorema E2.15. Seja X um e.v.n reflexivo (de Banach) e $\{x_n\}$ uma sequência limitada em X . Então existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ que converge em $\sigma(X, X^*)$ (conv. fraca).

Prova do Corolário E2.14:

- $\exists M > 0$ tal que $\|f_n\| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$ ($\{f_n\}$ limitada de X^*)
- $g_n = \frac{f_n}{M} \in \overline{B^{X^*}}$
- $(\overline{B^{X^*}}, \sigma(X^*, X))$ é metrizável (Teorema E2.10, X separável)
- $(\overline{B^{X^*}}, \sigma(X^*, X))$ é compacto (Teorema Banach-Alaoglu D5.2)
- $(\overline{B^{X^*}}, \sigma(X^*, X))$ é sequencialmente compacto
- $\{g_n\}$ possui subsequência $\{g_{n_k}\}$ que converge na top. fraca* para $g \in \overline{B^{X^*}}$
- $f_{n_k} \xrightarrow{*} Mg$ em X^*

□

Prova do Teorema E2.15:

Proposição E1.4. Todo subespaço fechado de um e.v.n. X reflexivo (de Banach) é reflexivo.

Teorema E2.6. Seja M um e.v.n. de Banach. Então, M é reflexivo e separável, se e somente se, M^* é reflexivo e separável.

Corolário E2.14. Y um e.v.n. separável e $\{f_n\}$ é uma sequência limitada de Y^* , então $\exists f_{n_k} \xrightarrow{*} f$ em Y^* (conv. na top. fraca* de Y^*). ($Y = M^*$)

Proposição D4.7. Seja $\{f_n\}$ uma sequência em Y^* . Temos que ($Y = M^*$)
(i) $f_n \xrightarrow{*} f \iff f_n(x) \rightarrow f(x), \forall x \in Y$.

Proposição D3.7. Seja $\{x_n\}$ uma sequência em X . Temos que:
(i) $x_n \rightharpoonup x \iff \phi(x_n) \rightarrow \phi(x) \forall \phi \in X^*$

- $M_0 := [x_n; n \in \mathbb{N}]$ e $M := \overline{M_0}$ ($\{x_n\}$ sequência em X)
 - M é s.e.v. fechado de X
 - M é reflexivo (X reflexivo, P. E1.4)
 - M é separável

| $D := [x_n; n \in \mathbb{N}]_{\mathbb{Q}^2} \subset M$ é enumerável e denso em M

- M^* é reflexivo e separável (T. E2.6)

Queremos uma seq. limitada em M^{**}

- $J : M \rightarrow M^{**}$ mergulho canônica (isom. isom. sobrejetor)
- $f_n := Jx_n$
- $\{f_n\}$ é uma seq. limitada em M^{**} ($\{x_n\}$ limitada X)

| $\|f_n\| = \|Jx_n\| = \|x_n\|$

- $\exists \{f_{n_k}\}$ conv. na top. fraca* $\sigma(M^{**}, M^*)$, i.e., (C. E2.14)

$$\exists f \in M^{**}; \quad f_{n_k} \xrightarrow{*} f$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists x \in M \subset X; & f = Jx \\ f_{n_k}(\phi) \rightarrow f(\phi), & \forall \phi \in M^* \end{cases} \Rightarrow \quad \text{(P. D4.7)}$$

$$\Rightarrow Jx_{n_k}(\phi) \rightarrow Jx(\phi), \quad \forall \phi \in M^* \Rightarrow \phi(x_{n_k}) \rightarrow \phi(x), \quad \forall \phi \in M^*$$

| **Queremos usar: Proposição D3.7.** Seja $\{x_n\}$ uma sequência em X :

(i) $x_n \rightharpoonup x \iff \phi(x_n) \rightarrow \phi(x) \quad \forall \phi \in X^*$

- $\varphi \in X^* \Rightarrow \varphi|_M \in M^*$

$$\therefore \varphi(x_{n_k}) \stackrel{x_{n_k} \in M}{=} \varphi|_M(x_{n_k}) \rightarrow \varphi|_M(x) \stackrel{x \in M}{=} \varphi(x), \quad \forall \varphi \in X^*$$

- $x_{n_k} \rightharpoonup x$ em X

□

Exercícios

- Exercício E2.16.** Faça o exercício 3.16 (p. 83) do [Bre11] ★
- Exercício E2.17.** Faça os exercícios 3.17 e 3.18 (p. 83) do [Bre11] ★
- Exercício E2.18.** Faça o exercício 3.22 (p. 84) do [Bre11] ★
- Exercício E2.19.** Faça o exercício 3.25 (p. 85) do [Bre11] ★

Leia e se convença:

Seja X um e.v.n.. Vimos:

- A.** $(\overline{B^{X^*}}, \sigma(X^*, X))$ é compacto
- B.** $(\overline{B^X}, \sigma(X, X^*))$ é compacto se, e somente se, X é reflexivo
- C.** $(\overline{B^{X^*}}, \sigma(X^*, X))$ é metrizável se, e somente se, X é separável
- D.** $(\overline{B^X}, \sigma(X, X^*))$ é metrizável se, e somente se, X^* é separável
- E.** Se X é separável e $(\varphi_n) \subset X^*$ é limitada, então existe (φ_{n_k}) e $\varphi \in X^*$ tal que

$$\varphi_{n_k} \xrightarrow{*} \varphi \quad (\text{A.} + \text{C.})$$

- F.** Se X é reflexivo e $(x_n) \subset X$ é limitada, então existe (x_{n_k}) e $x \in X$ tal que

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \quad (\text{E.} + \dots)$$

Por **B.** e **F.**, poderíamos perguntar: existe alguma relação entre o espaço X ser reflexivo e $(\overline{B^X}, \sigma(X, X^*))$ ser metrizável?

Resposta: Não. Por **D.**, basta encontrar um espaço X reflexivo e não separável (neste caso X^* não é separável). Exemplo de tal espaço:

- X um conjunto não enumerável;
- μ a medida de contagem em X ;
- considere $p \in (1, \infty)$;
- $X = L^p(X, \mu)$.

E3 Espaços uniformemente convexos

Definição E3.1. Um e.v.n X é dito **uniformemente convexo** se, para todo $\epsilon > 0^1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in \overline{B^X}, \text{ e } \|x - y\| \geq \epsilon \implies \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta. \quad (\text{E3.1})$$

★

Convexidade uniforme é uma propriedade geométrica da $\overline{B_1^X(0)}$ (ou da norma): deslizando uma régua de comprimento $\epsilon > 0$ na $\overline{B_1^X(0)}$, seu ponto médio deve estar dentro de $\overline{B_{1-\delta}^X(0)}$, a qual está dentro da bola unitária. Em particular a $S_1^X(0)$ não pode conter segmentos de reta.

Exemplo E3.2. • **Spoiler:** Espaços com produto interno são u.c.

- $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$: é u.c. se $p \in (1, \infty)$, mas não é u.c. se $p = 1$ ou $p = \infty$.

★

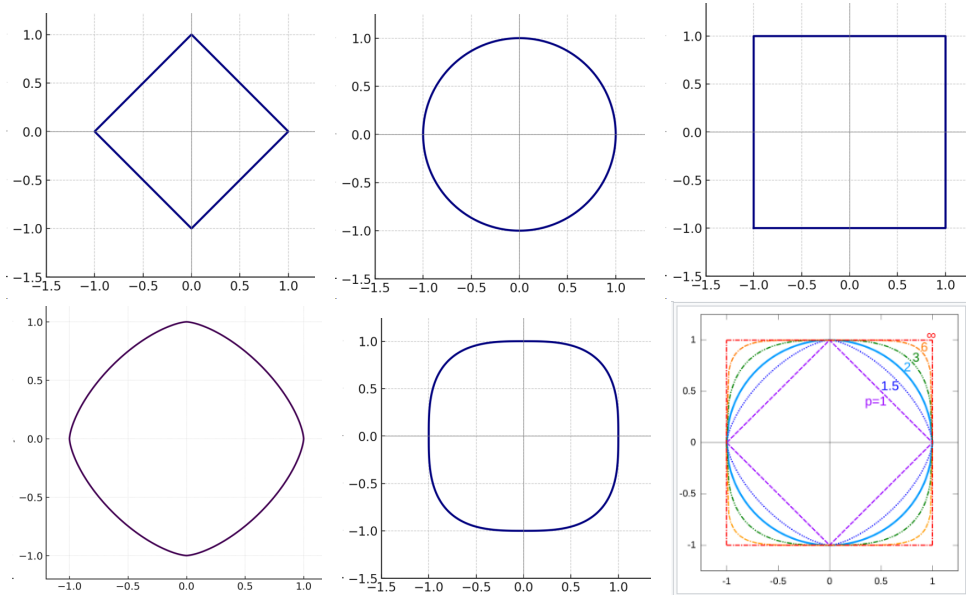


Figura 1: acima : $p = 1$: norma da soma, $p = 2$: norma Euclidiana, $p = \infty$: norma do máximo
abaixo: $p = 1.5$, $p = 3$, sobrepostas $p = 1, 1.5, 2, 3, 6, \infty$

Temos que: $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ é sempre reflexivo (ver Ex. E1.8-E1.9) mas u.c. depende da norma.

¹Note que como $\|x\|, \|y\| \leq 1$, então $\|x - y\| \geq \epsilon$ só faz sentido para $0 < \epsilon \leq 2$

Convexidade uniforme é uma ferramenta frequentemente usada para provar reflexividade:

Teorema E3.3 [Milman-Pettis]. *Todo espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.* $\triangleleft$

Spoiler: Exemplos Importantes: serão os espaços $L^p(X)$, $p \in [2, \infty)$ (Banach + u.c.)

Spoiler: Como espaço de Hilbert é um espaço com produto interno e Banach, segue:

Corolário E3.4. *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.* $\triangleleft$

Observação E3.5. Um espaço X é reflexivo quando o mergulho canônico $J : X \rightarrow X^{**}$ é sobrejetor. Uma condição para que isso ocorra é:

$$S^{X^{**}} \subset J(\overline{B^X}).$$

- $\Phi \in X^{**}$

Queremos: $x_0 \in X$; $Jx_0 = \Phi$

- $\Psi = \frac{\Phi}{\|\Phi\|} \in S^{X^{**}} \subset J(\overline{B^X})$

- $\exists x \in \overline{B^X}; \quad Jx = \Psi$

$$\frac{\Phi}{\|\Phi\|} = \Psi = Jx \implies J(\underbrace{\|\Phi\|}_{x_0 \in X} x) = \Phi$$



Prova do Teorema de Milman-Pettis E3.3: X Banach uniformemente convexo é reflexivo

Queremos: X reflexivo, $J : X \rightarrow X^{}$ sobrej.**

Basta mostrar que $S^{X^{**}} \subset J(\overline{B^X})$

pag. E9: Se X é Banach, $J(\overline{B^X}) \subset X^{}$ é fechado na top. forte $\tau_{X^{**}}$:
 $\overline{J(\overline{B^X})} = J(\overline{B^X})$**

Basta mostrar que $S^{X^{**}} \subset \overline{J(\overline{B^X})}$ (X Banach)

- $\Phi \in X^{**}$ com $\|\Phi\|_{X^{**}} = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|=1}} |\Phi(f)| = 1$

Queremos: $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \overline{B^X}; \quad \|\Phi - Jx\| \leq \varepsilon$
 $\iff \Phi - Jx \in \overline{B_\varepsilon^{X^{**}}}$
 $\iff \Phi \in Jx + \varepsilon \overline{B^{X^{**}}}$

Lema Goldstine E1.12. Seja X um e.v.n. Então $J(\overline{B^X})$ é denso em $\overline{B^{X^{**}}}$ com a topologia $\sigma^* = \sigma(X^{**}, X^*)$, i.e.,

$$J(\overline{B^X}) \cap V \neq \emptyset, \quad \forall \overline{B^{X^{**}}} \ni \Psi \ni V \in \sigma(X^{**}, X^*)$$

*Ideia: construir um adequado aberto $V \in \sigma(X^{**}, X^*)$ que contenha Φ , pois daí $\exists x \in \overline{B^X}; Jx \in V$ e depois mostrar que $\Phi \in Jx + \varepsilon \overline{B^{X^{**}}}$*

- $\varepsilon > 0$

- construção de V :

$$\blacksquare \exists f \in X^* \text{ com } \|f\| = 1; \quad 1 - a < |\Phi(f)| \quad (\forall a > 0)$$

$$\blacksquare V := V_{a,f}(\Phi) = \{\Psi \in X^{**}; |(\Psi - \Phi)(f)| < a\}$$

- V é um aberto de $\sigma(X^{**}, X^*)$ que contém $\Phi \in S^{X^{**}} \subset \overline{B^{X^{**}}}$

- $\exists x \in \overline{B^X}; Jx \in V$ (Goldstine)

Af. $\Phi \in Jx + \varepsilon \overline{B^{X^{**}}} =: W$, i.e., $\|\Phi - Jx\| \leq \varepsilon$

- Supor $\Phi \notin W$

encontraremos uma contradição com o fato de X ser u.c.

$\forall \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in \overline{B^X}, \text{ e } \|x - y\| \geq \epsilon \implies \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

- $\Phi \in W^C := X^{**} \setminus W$, e $\|\Phi - Jx\| > \varepsilon$
- $(\overline{B^{X^{**}}}, \sigma(X^{**}, X^*))$ é compacto (Teorema Banach-Alaoglu D5.2)
- $\overline{B^{X^{**}}} (\because W)$ é um fechado da top. fraca* $\sigma(X^{**}, X^*)$ (Ex. top. D5)
- $W^C \in \sigma(X^{**}, X^*)$
- $(V_{a,f}(\Phi) \cap W^C) \in \sigma(X^{**}, X^*)$
- $\exists y \in \overline{B^X}; Jy \in (V_{a,f}(\Phi) \cap W^C)$ (Goldstine)
- $\|y - x\| = \|Jy - Jx\| \geq \varepsilon$
- $Jy, Jx \in V_{a,f}(\Phi) = \{\Psi \in X^{**}; |(\Psi - \Phi)(f)| < a\}$

$$\therefore \begin{cases} |(Jx - \Phi)(f)| < a \\ |(Jy - \Phi)(f)| < a \end{cases} \implies \begin{cases} |f(x) - \Phi(f)| < a \\ |f(y) - \Phi(f)| < a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2(1-a) < |2\Phi(f)| &= |\Phi(f) + \Phi(f)| \\ &\leq |\Phi(f) - f(x)| + |f(x) + f(y)| + | -f(y) + \Phi(f)| \\ &< \underline{a} + \underbrace{\|f\|}_{=1} \|x + y\| + \underline{a} \end{aligned}$$

$$\implies \|x + y\| > 2 - 4a \implies \left\| \frac{x+y}{2} \right\| > 1 - 2a, \quad \forall a > 0$$

$$\therefore \left\| \frac{x+y}{2} \right\| > 1 - \delta, \quad \forall \delta > 0$$



□

Proposição E3.6. *Sejam X uniformemente convexo e $\{x_n\}$ uma sequência em X tal que $x_n \rightharpoonup x$ e*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq \|x\|.$$

Então $x_n \rightarrow x$.

Em particular, convergência fraca mais convergência da norma implica convergência forte. $\triangleleft$

Demonstração.

$$\bullet \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq \|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \quad (x_n \rightharpoonup x, \text{ P.D3.7-iii})$$

Proposição D3.7. Seja $\{x_n\}$ uma sequência em X . Temos que:
iii) $x_n \rightharpoonup x \implies \{\|x_n\|\}$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$

$$\bullet \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\| \quad (\liminf_{n \rightarrow \infty} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty})$$

Caso 1: $x = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 = x$$

Caso 2: $x \neq 0$

$$\bullet \quad \|x_n\| \neq 0 \text{ definitivamente} \quad (\exists n_0; x_n \neq 0, n \geq n_0)$$

$$\bullet \quad x_n \neq 0 \text{ definitivamente}$$

$$\bullet \quad y_n := \frac{x_n}{\|x_n\|}$$

$$\bullet \quad y_n \rightharpoonup y := \frac{x}{\|x\|} \quad \text{onde } \|y_n\| = 1 \text{ e } \|y\| = 1 \quad (x_n \rightharpoonup x, \|x_n\| \rightarrow \|x\|)$$

Queremos $y_n \rightarrow y$ pois daí $x_n \rightarrow x$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\|x_n\|} \|x_n\| = y \|x\| = \frac{x}{\|x\|} \|x\| = x$$

Queremos $\forall \epsilon > 0, \exists n_0; \quad \|y_n - y\| < \epsilon, \quad n \geq n_0$

- $\epsilon > 0$

- $y_n, y \in \overline{B^X}$

$$(\|y_n\|, \|y\| = 1)$$

X é u.c.: $\forall \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in \overline{B^X}, \text{ e } \|x - y\| \geq \epsilon \implies \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

Basta mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{y_n + y}{2} \right\| = 1$, pois daí:

$$\begin{aligned} \forall \tilde{\epsilon} > 0, \exists n_1; \quad n \geq n_1 &\implies \left| \left\| \frac{y_n + y}{2} \right\| - 1 \right| < \tilde{\epsilon} \\ n \geq n_1 &\implies 1 - \tilde{\epsilon} < \left\| \frac{y_n + y}{2} \right\| < 1 + \tilde{\epsilon} \end{aligned}$$

$\therefore \exists n_0; \|y_n - y\| < \epsilon$, para todo $n \geq n_0$

pois se $\|y_n - y\| \geq \epsilon$, $\forall n$, então

(X u.c.)

$$\exists \delta > 0; \quad \left\| \frac{y_n + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta, \quad \forall n \quad \xrightarrow{\tilde{\epsilon}=\delta}$$

Af. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{y_n + y}{2} \right\| = 1$

- $y_n + y \rightharpoonup 2y$

$$(\frac{x_n}{\|x_n\|} = y_n \rightharpoonup y := \frac{x}{\|x\|})$$

- $\|2y\| \leq \liminf \|y_n + y\|$

Proposição D3.7. iii) $x_n \rightharpoonup x \implies \{\|x_n\|\}$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$

$$\underline{2} = \|2y\| \leq \liminf \|y_n + y\| \leq \limsup \|y_n + y\| \leq \limsup (\|y_n\| + \|y\|) = \underline{2}$$

□

Exercícios

Exercício E3.7. Faça o exercício 3.32 (apenas pontos 1 e 2) (p. 87) do [Bre11] (vai precisar a noção de convexidade estrita: procure no livro e veja o ex 3.31 também). ★

E3.1 Aplicação: para pessoal de equações!

Definição E3.8. Uma função $\Phi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ é dita

- **semicontínua inferiormente (l.s.c.)** se para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ o conjunto

$$[\Phi \leq \lambda] = \{x \in X : \Phi(x) \leq \lambda\}$$

é fechado.

- **convexa** se o conjunto $\{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : y \geq \Phi(x)\}$ é convexo; equivalentemente, $\Phi(tx + (1-t)y) \leq t\Phi(x) + (1-t)\Phi(y)$: $x, y \in X$, $t \in (0, 1)$. ★

Corolário E3.9 [do Teorema D3.10]. Se Φ é convexa e semicontínua inferiormente (ou contínua) na topologia τ , então é semicontínua inferiormente na topologia $\sigma(X, X^*)$.

Em particular, se $x_n \rightharpoonup x$, então²

$$\Phi(x) \leq \liminf \Phi(x_n). \quad \triangleleft$$

Corolário E3.10 [do Corolário E1.14]. Seja X um espaço de Banach reflexivo, $\emptyset \neq A \subseteq X$ um convexo fechado. Seja $\Phi : A \rightarrow (-\infty, \infty]$ convexa, própria ($\Phi \not\equiv +\infty$), semicontínua inferiormente e, se A é ilimitado,

$$\lim_{\substack{x \in A \\ \|x\| \rightarrow \infty}} \Phi(x) = +\infty. \quad (\text{E3.2})$$

Então Φ alcança seu mínimo em A ; isto é, existe $x_0 \in A$ tal que

$$\Phi(x_0) = \min_{x \in A} \Phi(x). \quad \triangleleft$$

²Lembre que a definição de fechado por seq. não implica na topológica, mas a topológica implica na por seq, ou seja, se F é fechado e $x_n \rightarrow x$ com $\{x_n\} \subset F$ então $x \in F$

E4 Mais exercícios

Exercícios

Exercício E4.1 (Espaços B,S,R,U.C.). Preencha a seguinte tabela com S (para sim) e N (para não).

	Banach	Separáv.	Reflex.	Unif. Conv.
$(\mathbb{K}^N, \ \cdot\ _1)$				
$(\mathbb{K}^N, \ \cdot\ _\infty)$				
$(\mathbb{K}^N, \ \cdot\ _p), 1 < p < \infty$				
$(c_{00}, \ \cdot\ _1)$				
$(c_{00}, \ \cdot\ _\infty)$				
$(c_{00}, \ \cdot\ _p), 1 < p < \infty$				
$(c_0, \ \cdot\ _\infty)$				
$(c, \ \cdot\ _\infty)$				
ℓ_1				
ℓ_∞				



Referências

- [BPT12] G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira. *Fundamentos de análise funcional*. Textos universitários. SBM, 2012. ISBN: 9788585818661.
- [Bre11] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011, pp. xiv+599. ISBN: 978-0-387-70913-0.
- [Fol99] G. B. Folland. *Real analysis*. Second. Pure and Applied Mathematics (New York). Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, pp. xvi+386. ISBN: 0-471-31716-0.
- [Muj] J. Mujica. “Notas de análise funcional”. Em: *Notas de aula - IMECC - UNICAMP* ().
- [Mun00] J. R. Munkres. *Topology*. Second. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000, pp. xvi+537. ISBN: 0-13-181629-2.

Lista dos teoremas

E1.1	Proposição	E3
E1.2	Proposição	E3
E1.3	Proposição	E4
E1.4	Proposição	E4
E1.5	Lema	E4
E1.6	Proposição	E4
E1.7	Teorema (Reflexividade $X - X^*$)	E4
E1.10	Teorema (Kakutani)	E11
E1.11	Lema	E11
E1.12	Lema (Lema (Goldstine))	E11
E1.13	Lema (Lema (Helly))	E11
E1.14	Corolário (σ -compactos)	E13
E2.3	Proposição (Subconj. de separável)	E20
E2.4	Proposição (dual separável)	E20
	Observação	E20
E2.5	Lema	E20
E2.6	Teorema (Reflex-separ $X - X^*$)	E20
E2.7	Proposição	E23
E2.8	Proposição	E24
E2.10	Teorema (Metrizabilidade bola X^*)	E25
E2.11	Teorema (Metrizabilidade bola X)	E25

E2.13	Corolário	E30
E2.14	Corolário (Subseq. $\xrightarrow{*}$)	E31
E2.15	Teorema (Subseq. $\rightarrow$)	E31
E3.1	Definição (Esp. unif. convexo)	E34
E3.2	(Exemplo)	E34
E3.3	Teorema (Milman-Pettis)	E35
E3.4	Corolário	E35
E3.5	Observação	E35
E3.6	Proposição (conv. fraca mais norma)	E38
E3.8	Definição (função l.s.c / convexa)	E40
E3.9	Corolário (l.s.c)	E40
E3.10	Corolário (mínimo)	E40

Lista dos exercícios

E1.8	Exercício	E10
E1.9	Exercício	E10
E2.1	Exercício	E20
E2.2	Exercício	E20
E2.9	Exercício (EE2)	E25
E2.12	Exercício ($\overline{B^X}$ metr.)	E25
E2.16	Exercício	E33
E2.17	Exercício	E33
E2.18	Exercício	E33
E2.19	Exercício	E33
E3.7	Exercício	E40
E4.1	Exercício (Espaços B,S,R,U.C.)	E41