Conteúdo

Sf1 Sequências de funções **Sf2**
Sf1.1 Definição e exemplos Sf2
Sf1.2 Convergência de sequência de funções Sf3
Sf1.2.1 Convergência pontual Sf3
Sf1.2.2 **Alguns "fenômenos":** Sf4
Sf1.2.3 Convergência uniforme Sf4
Sf1.3 Teoremas de passagem ao limite Sf7

Sf2 Séries de funções **Sf10**

Sf1 Sequências de funções

Sf1.1 Definição e exemplos

Definição Sf1.1. Seja $D \subset \mathbb{R}$. Chamamos **Sequência de funções** uma função

$$\wedge : N \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\} \to \{f : D \to \mathbb{R}; f \text{ é função}\} : \ n \mapsto \wedge(n) = f_n.$$

$$\{f_n : \ D \to \mathbb{R}\}_{n \in N}, \qquad \{f_n\}_{n \in N}$$

★

Note: Temos duas variáveis envolvidas: $n \in N$ e $x \in D$, onde $f_n(x)$ é o valor que a função f_n assume em x:

- n fixado: $f_n : \ D \to \mathbb{R}$ é função
- $x \in D$ fixado: $\{f_n(x)\}_n$ é sequência numérica

Exemplo Sf1.2. 1. Com $D = \mathbb{R}$, $n \geq 1$:

(a) $f_n(x) = x^n$

(b) $f_n(x) = nx$

(c) $f_n(x) = \frac{x}{n}$

(d) $f_n(x) = \sin(nx)$

(e) $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$

(f) $f_n(x) = \frac{\sqrt{1+n^2x^2}}{n}$

(g) $f_n(x) = \arctan(x + n)$

(h) $f_n(x) = \begin{cases} 1 - n|x| & |x| \leq 1/n \\ 0 & |x| > 1/n \end{cases}$

(i) $f_n(x) = \begin{cases} n^2x & 0 \leq x \leq 1/n \\ n(2 - nx) & 1/n \leq x \leq 2/n \\ 0 & x > 2/n \text{ ou } x < 0 \end{cases}$.

2. Com $D = (0, \infty)$, $\alpha > 0$ fixado e $n \geq 1$:

(j) $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^\alpha} & x \geq 1/n \\ n^\alpha & x < 1/n \end{cases}$.

(Veja em Graficos em Geogebra)

★

Sf1.2 Convergência de sequência de funções

Como, para cada $x \in D$ fixado, $\{f_n(x)\}_n$ é uma sequência numérica, podemos perguntar se tal sequência converge(a que)/diverge/oscila.

Retome o Exemplo Sf1.2 e calcule o limite da sequência $\{f_n(x)\}_n$ para cada $x \in D$ fixado.

Sf1.2.1 Convergência pontual

Definição Sf1.3. ★

Dada uma sequência de funções

$$\{f_n : \; D \to \mathbb{R}\}_{n \in N}$$

e fixados $A \subseteq D$ e $f : A \to \mathbb{R}$,

- dizemos que f_n **converge pontualmente a f em A** se para todo $x \in A$ vale $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$
- então dizemos que f **é o limite pontual de f_n em A**: $\boxed{f_n \to f \;\text{ pont. em } A}$ ou $\boxed{f_n \xrightarrow{p} f \text{ em } A}$.
- **o conjunto de convergência pontual de f_n** é o maior $A \subseteq D$ tal que a seq. numérica $\{f_n(x)\}$ converge para todo $x \in A$

Exemplo Sf1.4. Discuta a convergência pontual das sequências do Exemplo Sf1.2 ★

Sf1.2.2 Alguns "fenômenos":

1. **funções limitadas**:
   f_n limitadas em A e $f_n \xrightarrow{p} f$ em $A \Longrightarrow f$ limitada em A ?

2. **funções contínuas:**
   f_n contínuas em A e $f_n \xrightarrow{p} f$ em $A \Longrightarrow f$ contínua em A ?

3. **intercâmbio entre limites:**
   $\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_n$?

4. **funções deriváveis e intercâmbio entre limite e derivada:**
   $f_n \xrightarrow{p} f$ em A, f_n deriváveis $\Longrightarrow f$ derivável em A ?
   $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$?

5. **funções integráveis e intercâmbio entre limite e integral:**
   $f_n \xrightarrow{p} f$ em A, f_n integráveis em $[a,b] \Longrightarrow f$ integrável em $[a,b]$?
   $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) = \int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$?

Sf1.2.3 Convergência uniforme

Definição Sf1.5. ★

Dada uma sequência de funções

$$\{f_n : \; D \to \mathbb{R}\}_{n\in N}$$

e fixados $A \subseteq D$ e $f : A \to \mathbb{R}$,

- dizemos que f_n **converge uniformemente a f em A** se
  $\forall\, \varepsilon > 0$ existe $H \in \mathbb{R}$ tal que $n > H \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \;\; \forall x \in A$
- então dizemos que **f é o limite uniforme de f_n em A**:
  $\boxed{f_n \to f \;\; \text{unif. em } A}$ ou $\boxed{f_n \xrightarrow{u} f \text{ em } A}$.

Observação Sf1.6 (Comparação das definições).

- $f_n \to f$ pontualmente em A: $\boxed{\text{para todo } x \in A \text{ vale } \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)}$:

  $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}$, $\forall \varepsilon > 0$ existe $H = \mathbf{H}(\mathbf{x}, \varepsilon) \in \mathbb{R}$ tal que $n > H \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

  H depende de ε e de x também

- $f_n \to f$ uniformemente em A:

  $\forall \varepsilon > 0$ existe $H = \mathbf{H}(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ tal que $n > H \implies [\,|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \;\; \forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}\,]$:

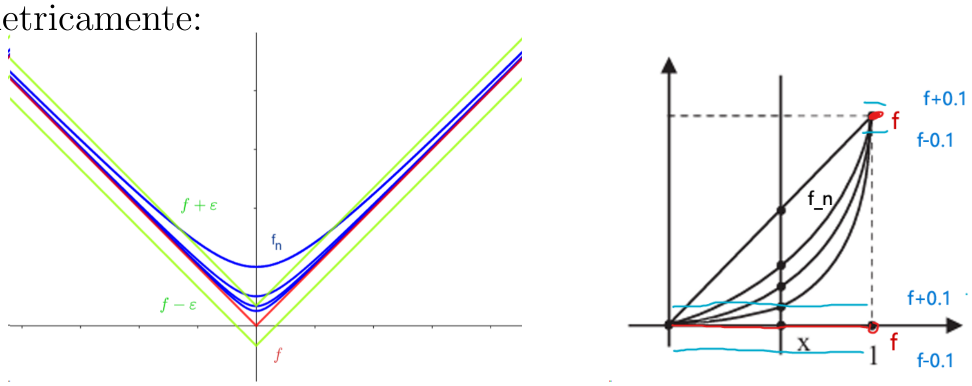
  H depende de ε apenas e deve servir para todo x.

  Uma formulação equivalente é

  $\forall \varepsilon > 0$ existe $H \in \mathbb{R}$ tal que $n > H \implies \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

  ou seja, $\boxed{\lim_{n\to\infty} \left[\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \right] = 0}$ ★

Geometricamente:



(a) $f_n \xrightarrow{u} f$ em A quando a partir de um certo índice os gráficos de f_n estão contidos na faixa de raio ε em torno de f, para qualquer ε (Grafico em Geogebra).
(b) $x^n \stackrel{u}{\not\to} f$ em $[0, 1]$: o gráfico de qualquer função x^n nunca fica contido na faixa de raio $\varepsilon = 0.1$; $x^n \xrightarrow{u} f$ em $[0, b]$ para qualquer $b \in (0, 1)$.

Atenção: pode não existir um maior $A \subseteq D$ tal que a seq. $\{f_n\}$ convirja uniformemente em A.

Proposição Sf1.7.

- *se* $B \subseteq A$ *e* $f_n \to f$ *em* A $\implies$ $f_n \to f$ *em* B *(unif/pont)*
- $f_n \to f$ *unif. em* A $\implies$ $f_n \to f$ *pont. em* A

$\triangleleft$

Procedimento para estudar convergência uniforme:

1. calcular limite pontual f e encontrar o conj. de converg. pontual A
2. procurar $B \subseteq A$ tal que $f_n \to f$ unif. em B.

Exemplo Sf1.8. (gráficos no geogebra)

1. (Ex. Sf1.2-1a) $x^n \to f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ pontualmente em $[0,1]$, mas não uniformemente.

   $x^n \to 0$ pontualmente em $[0,1)$, mas não uniformemente.

   $x^n \to 0$ uniformemente em $[0,p]$ para todo $p \in (0,1)$.

2. (Ex. Sf1.2-1c) $\frac{x}{n} \to 0$ pontualmente em $\mathbb{R}$, mas não uniformemente.

   $\frac{x}{n} \to 0$ uniformemente em $[-p,p]$ para todo $p > 0$.

3. (Ex. Sf1.2-1d) $\frac{\sin nx}{n} \xrightarrow{p} 0$ em $\mathbb{R}$ e uniformemente em $\mathbb{R}$.

4. (Ex. Sf1.2-1i) $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & 0 \le x \le 1/n \\ n(2-nx) & 1/n \le x \le 2/n \\ 0 & x > 2/n \text{ ou } x < 0 \end{cases}$ $\xrightarrow{p}$ 0 em $\mathbb{R}$ mas não uniformemente

   De fato, a convergência não é uniforme em qualquer subintervalo da forma $[0,p]$.

5. (Ex. Sf1.2-1f) $f_n(x) = \frac{\sqrt{1+n^2x^2}}{n} \xrightarrow{p} |x|$ em $\mathbb{R}$ e uniformemente em $\mathbb{R}$.

$\bigstar$

Sf1.3 Teoremas de passagem ao limite

Definição Sf1.9. Uma sequência de funções $\{f_n : A \to \mathbb{R}\}_n$ é dita ser **uniformemente de Cauchy em A** se

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ existe } H > 0\text{: } p, m > H \implies |f_p(x) - f_m(x)| < \varepsilon \text{ para todo } x \in A.$$

★

Observação Sf1.10. Se $\{f_n\}$ é uma sequência de funções uniformemente de Cauchy em A, então, para cada $x \in A$, a sequência numérica $\{f_n(x)\}$ é de Cauchy. ★

Teorema Sf1.11.

(a) se $\{f_n\}$ é uniformemente de Cauchy em A e $f_n \to f$ pont. em A, então $f_n \to f$ unif. em A;

(b) $\boxed{\{f_n\} \text{ é unif. de Cauchy em } A \iff \{f_n\} \text{ converge unif. a alguma } f \text{ em } A.}$

◁

Teorema Sf1.12. *Suponha que a sequência de funções $\{f_n\}$ convirja uniformemente a f em A;*

0) se cada f_n é limitada em A então f é limitada em A

1) se x_0 é p.a. de A e, para todo n, $\exists \lim_{x\to x_0} f_n(x) = L_n$ então

$$\boxed{\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} L_n \in \mathbb{R}}, \text{ i.e, } \boxed{\exists \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) \in \mathbb{R}}$$

2) se cada f_n é contínua em A então f é contínua em A

3) se cada f_n é integrável em $[a, b] \subseteq A$ então f integrável em $[a, b]$ e

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\,dx \right)}$$

◁

CUIDADO: não vale que se as f_n são deriv. então f é derivável!!!

Teorema Sf1.13. *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções deriváveis em um aberto que contém $[a, b]$. Se*

1. *$\{f_n(x_0)\}$ convergir para algum $x_0 \in [a, b]$*
2. *$\{f_n'\}$ convirja uniformemente em $[a, b]$ a uma função g,*

então
$\{f_n\}$ conv. unif. em $[a, b]$ a uma função f, onde f é derivável e $f' = g$,
ou seja,

$$\boxed{\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)}. \qquad \triangleleft$$

Observação Sf1.14. As afirmações dos teoremas acima poderiam ser falsas assumindo apenas convergência pontual!! ★

Observação Sf1.15.

- $\{x^n\}$ não converge uniformemente em $[0, 1]$: o limite não é contínuo.

- $\{\arctan(x + n)\}$ não converge uniformemente em $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to-\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \pi/2 \neq -\pi/2 = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to-\infty} f_n(x).$$

- $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{1 + n^2x^2}}{n}$

  $\{f_n\}$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$ mas $\{f_n'\}$ não converge uniformemente em $\mathbb{R}$: o limite de $\{f_n\}$ não é derivável.

- $f_n(x) = \begin{cases} n^2x & 0 \leq x \leq 1/n \\ n(2-nx) & 1/n \leq x \leq 2/n \\ 0 & x > 2/n \ ou \ x < 0 \end{cases}$

  $\{f_n\}$ não converge uniformemente em $\mathbb{R}$: a integral do limite não é o limite da integral.

- $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^\alpha} & x \geq 1/n \\ n^\alpha & x < 1/n \end{cases}$

  $\{f_n\}$ não converge uniformemente em $(0, \infty)$: o limite não é limitado

★

Sf2 Séries de funções

Chamamos **Série de funções** a soma dos termos de uma sequência de funções: dada uma sequência de funções f_n, chamamos

- $S_k(x) = \sum_{n=n_0}^{k} f_n(x)$ **sequência (de funções) das somas parciais**
- definimos a **Série** associada à f_n sendo

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n := \lim_{k\to\infty} S_k \qquad \text{(limite pontual)}$$

Exemplo Sf2.1.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ converge pontualmente a $S(x) = \dfrac{x}{1-x}$ em $(-1,1)$.
- $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge pontualmente em $\mathbb{R}$.

★

Dizemos que a série converge uniformemente em A se S_k converge uniformemente em A, em particular

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em A à função $S(x)$, se

$$\lim_{k\to\infty}\left[\sup_{x\in A}\left|S(x) - \sum_{n=1}^{k} f_n(x)\right|\right] = 0$$

Teorema Sf2.2 [Teste M de Weiestrass].
Se $\sup_{x\in A}|f_n(x)| \le a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é uma série convergente, então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge uniformemente em* A. ◁

Observação Sf2.3. A condição é apenas suficiente: mesmo não valendo a série poderia convergir uniformemente. ★

Teorema Sf2.4. *Suponha que a série $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ convirja uniformemente em A.*
0) se cada f_n é limitada em A então $\boxed{S \text{ é limitada em } A}$

1) se x_0 é p.d.a de A e $\exists \lim_{x\to x_0} f_n(x) = L_n$ então

$$\exists \lim_{x\to x_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x\to x_0} f_n(x) \right) \in \mathbb{R}$$

2) se cada f_n é cont. em A então $\boxed{S \text{ é cont. em } A}$

3) se cada f_n é integrável em $[a,b] \subseteq A$ então $\boxed{S \text{ integrável em } [a,b]}$ e

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\,dx \right)$$

◁

CUIDADO: não vale que se as f_n são deriv. então S derivável!!!

Teorema Sf2.5. *Considere a série $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ com f_n deriváveis. Se*

- *$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ convergir para algum $x_0 \in [a,b]$*
- *$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ convergir uniformemente em $[a,b]$,*

$\boxed{\text{então } S \text{ converge unif. em } [a,b], \text{ é derivável e } S' = D, \text{ isto é,}}$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

◁

Exercício Sf2.6. Discuta a convergência pontual e uniforme das series a seguir, e a continuidade e derivabilidade de suas somas.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
- $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$
- $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$

★

Conteúdo

Lista dos teoremas

Sf1.1 Definição (Sequência de funções) Sf2
Sf1.2 Exemplo Sf2
Sf1.3 Definição (Convergência pontual) Sf3
Sf1.4 Exemplo Sf3
Sf1.5 Definição (Convergência uniforme) Sf4
Sf1.6 Observação (def. conv. unif. vs pont.) Sf5
Sf1.7 Proposição Sf6
Sf1.8 Exemplo Sf6
Sf1.9 Definição (Seq. unif. de Cauchy) Sf7
Sf1.10 Observação Sf7
Sf1.11 Teorema (Unif. de Cauchy e Conv. Unif.) Sf7
Sf1.12 Teorema (Troca limites e integral) Sf7
Sf1.13 Teorema (Troca limite com derivada) Sf8
Sf1.14 Observação Sf8
Sf1.15 Observação Sf8
Sf2.1 Exemplo Sf10
Sf2.2 Teorema (Teste M de Weiestrass) Sf10
Sf2.3 Observação Sf10
Sf2.4 Teorema (Troca limite e integral com série) Sf11
Sf2.5 Teorema (Troca série com derivada) Sf11
Sf2.6 Exercício Sf11