

Conteúdo

E1 Séries de Fourier	E1
E1.1 Teoria L^2	E5
E1.2 Convergência pontual e uniforme	E8
E2 Escrita complexa	E10

E1 Séries de Fourier

Valem as seguintes identidades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\pi}^{\pi} 1 = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(kx) = 0 \quad \forall n, k \in \mathbb{N} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) = 0 \quad \forall n \neq k \in \mathbb{N} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) = \pi \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right. \quad (\text{E1.1})$$

Observação E1.1. Possível interpretação:

As funções

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}$$

formam uma **família ortonormal** com respeito ao produto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)$$



Chamamos **Polinômio trigonométrico de ordem k**

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Chamamos **Série trigonométrica (ou de Fourier)**

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Suponhamos que S convirja uniformemente em \mathbb{R} , então posso integrar por séries obtendo (**Fórmulas de Euler - Fourier**)

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) = a_0\pi \\ \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos(nx) = a_n\pi \\ \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \sin(nx) = b_n\pi \end{array} \right. \quad (\text{E1.2})$$

Definição:

Dada $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ absolutamente integrável, chamamos **Série de Fourier de f** a Série trigonométrica S_f cujos coeficientes são calculados pelas (E1.2) com f no lugar de S .

Pergunta? qual é a relação entre f e S_f ?

- f par $\implies b_n = 0 \forall n$ (S_f é uma série de cossenos, logo é par)
- f ímpar $\implies a_n = 0 \forall n$ (S_f é uma série de senos, logo é ímpar)
- se f tem descontinuidá e S_f conv. uniformemente, certamente não coincidem!

Porém, se f é regular, as coisas ficam melhores!

Exemplo E1.2. • $f = \operatorname{sgn}(x)$ em $[-\pi, \pi]$:

$a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)]$, isto é, $\frac{4}{n\pi}$ só para n ímpar.

$$S_f = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$$

• $f = |x|$ em $[-\pi, \pi]$:

$b_n = 0$, $a_0 = \pi$, $a_n = \frac{2}{n^2\pi} [\cos(n\pi) - 1]$, isto é, $-\frac{4}{n^2\pi}$ só para n ímpar.

$$S_f = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$$

• $f = x$ em $[-\pi, \pi]$:

$a_n = 0$, $b_n = -\frac{2}{n} \cos(n\pi)$, isto é, $-(-1)^n \frac{2}{n}$.

$$S_f = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n}$$

★

Observação E1.3 (Série de cossenos/senos). Seja f abs. int. em $[0, \pi]$.

- Podemos prolongar f para $[-\pi, 0]$ de forma par, obtendo uma função par g abs. int. em $[-\pi, \pi]$. A **série de (Fourier) de cossenos** ($S_{f,c}$) de f é a série de Fourier de g , i.e., $S_{f,c} = S_g$
- Podemos prolongar f para $[-\pi, 0]$ de forma ímpar, obtendo uma função ímpar g abs. int. em $[-\pi, \pi]$. A **série de (Fourier) de senos** ($S_{f,s}$) de f é a série de Fourier de g , i.e., $S_{f,s} = S_g$

★

Em geral, se f é absolutamente integrável num intervalo $[-L, L]$, as Fórmulas de Euler - Fourier tornam-se

$$\begin{cases} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) = a_0 \\ \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) = a_n \\ \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right) = b_n \end{cases} \quad (\text{E1.3})$$

e a série de Fourier de f se escreve

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right)$$

E1.1 Teoria L^2

Teorema E1.4 [Convergência em L^2 , Bessel, Parseval]. *Sejam f^2 é integrável em $[-\pi, \pi]$, S_f sua série de Fourier, S_k a truncada k -ésima de S_f e T_k um qualquer polin.trig. de ordem k . Então*

$$1. \int_{-\pi}^{\pi} S_k^2 = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^k a_n^2 + b_n^2 \right)$$

$$2. \int_{-\pi}^{\pi} (f - S_k)^2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^2 \right) - \left(\int_{-\pi}^{\pi} S_k^2 \right) \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f - T_k)^2$$

Em particular, $\int_{-\pi}^{\pi} f^2 \geq \int_{-\pi}^{\pi} S_k^2.$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \text{ converge, e logo } a_n, b_n \rightarrow 0,$$

$$4. \int_{-\pi}^{\pi} (f - S_k)^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \text{difícil!}$$

$$5. \int_{-\pi}^{\pi} f^2 \geq \int_{-\pi}^{\pi} S_k^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \right), \text{ ou seja,}$$

vale a **Desigualdade de Bessel**:

$$\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \right) \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2.$$

De fato, vale a **Identidade de Parseval**:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \right)$$

◁

Dito de outra forma: consideramos o espaço vetorial

$$X = \left\{ f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R} : \int_{-\pi}^{\pi} f^2 < \infty \right\}$$

dotado do produto escalar $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} fg$ e da norma $\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2$.

Então,

$$1. \|S_k\|^2 = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^k a_n^2 + b_n^2 \right)$$

$$2. \|f - S_k\|^2 = \|f\|^2 - \|S_k\|^2 \leq \|f - T_k\|^2 \quad \text{ou seja, } S_k \text{ é o polinômio trigonométrico de ordem } k \text{ mais perto de } f$$

Em particular, $\|f\|^2 \geq \|S_k\|^2$.

$$3. \sum a_n^2 + b_n^2 \text{ converge, e logo } a_n, b_n \rightarrow 0,$$

$$4. \|f - S_k\|^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \text{ou seja, } S_k \rightarrow f \text{ (convergência "integral")}$$

$$5. \|f\|^2 \geq \|S_k\|^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \right), \text{ ou seja,}$$

vale a **Desigualdade de Bessel**:

$$\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \right) \leq \|f\|^2.$$

De fato, vale a **Identidade de Parseval**:

$$\|f\|^2 = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \right)$$

Mais uma interpretação:

O sistema

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad c_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \quad s_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}$$

forma uma “**base Hilbertiana**” no espaço X (é ortonormal e permite aproximar qualquer elemento do espaço).

Reescrevendo as fórmulas com a normalização acima temos

$$\widehat{S}(x) = a_0 c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n(x) + b_n s_n(x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{S}(x) c_0(x) = \langle \widehat{S}, c_0 \rangle = a_0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{S}(x) c_n(x) = \langle \widehat{S}, c_n \rangle = a_n \\ \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{S}(x) s_n(x) = \langle \widehat{S}, s_n \rangle = b_n \end{array} \right. \quad (\text{E1.4})$$

Análogas às fórmulas conhecidas de GA-AL:

dado o sistema $\{e_i\}$ ortonormal em X ,

- se $f = \sum \alpha_i e_i$ então $\langle f, e_i \rangle = \alpha_i$
- $S_k := \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i$ é a projeção de f no subespaço gerado por e_1, \dots, e_k

No nosso caso, também temos que S_k converge a f quando $k \rightarrow \infty$.

Poderíamos fazer a mesma construção usando uma qualquer outra base ortonormal!

Conclusão: temos um resultado de convergência $S_f \rightarrow f$ quando f^2 é integrável, mas é uma convergência ”integral”, diferente da pontual e da uniforme.

E1.2 Convergência pontual e uniforme

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periódica e absolutamente integrável em $[-\pi, \pi]$, contínua (exceto em um número finito de pontos) em $[-\pi, \pi]$.

Teorema E1.5 [Convergência pontual]. S_f converge em x_0 a:

- $f(x_0)$ se f é contínua e existem (são finitas) as derivadas laterais em x_0
- $\frac{L^+ + L^-}{2}$ se existem (finitos)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = L^\pm \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{f(x) - L^\pm}{x - x_0} = D^\pm \in \mathbb{R}. \quad \triangleleft$$

Poderia não convergir ou convergir a outros valores se alguns dos limites acima não existem.

Exemplo E1.6.

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi - 1}{2\pi} \quad \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{n} = \frac{\pi}{2} - 1$$

★

Teorema E1.7 [Convergência uniforme]. Se f é contínua e derivável exceto em um número finito de pontos (em $[-\pi, \pi]$), nos quais existem (são finitos) L^\pm e D^\pm , então

- S_f converge a f uniformemente em todo $[a, b]$ no qual f é contínua,
- em particular, S_f converge a f uniformemente em \mathbb{R} se f for contínua.

◁

Teorema E1.8. Seja $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, 2π periódica. Então os coeficientes satisfazem

$$|a_n|, |b_n| \leq \frac{C_f}{n^2}$$

e logo $S_f \rightarrow f$ uniformemente em \mathbb{R} .

Isso vale também se tiver um número finito de pontos (em $[-\pi, \pi]$) onde f é apenas contínua com derivadas laterais finitas.

◁

Exemplo E1.9. • $f(x) = \frac{1}{x}|_{[-\pi, \pi]}$,
 não tem como calcular S_f por não ser abs. integrável.

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}|_{[-\pi, \pi]}$,
 podemos calcular S_f , mas em 0 não sabemos se nem onde converge.
- $f(x) = \sqrt{|x|}|_{[-\pi, \pi]}$,
 podemos calcular S_f , mas em 0 não sabemos se nem onde converge.
- $f(x) = |x||_{[-\pi, \pi]}$
 podemos calcular S_f , que converge uniformemente a f em \mathbb{R}
- $f(x) = x|_{[-\pi, \pi]}$
 podemos calcular S_f , que converge uniformemente a f
 em $[-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$), e converge para 0 em $\pi + 2k\pi$.
- $f(x) = \operatorname{sgn}(x)|_{[-\pi, \pi]}$
 podemos calcular S_f , que converge uniformemente a f
 em $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ e em $[-\pi + \varepsilon, -\varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$), e converge para 0 em $k\pi$.



E2 Escritura complexa

Pondo

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_0}{2} & n = 0 \\ \frac{a_n - ib_n}{2} & n > 0 \\ \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} & n < 0 \end{cases} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) e^{-inx}$$

obtemos

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Conteúdo

Lista dos teoremas

E1.1	Observação	E1
E1.2	Exemplo	E3
E1.3	Observação (Série de cossenos/senos)	E3
E1.4	Teorema (Convergência em L^2 , Bessel, Parseval)	E5
E1.5	Teorema (Convergência pontual)	E8
E1.6	Exemplo	E8
E1.7	Teorema (Convergência uniforme)	E8
E1.8	Teorema	E8
E1.9	Exemplo	E9