

Conteúdo

OPv.1	Orientação em V^3	OPv.2
OPv.2	Produto Vetorial	OPv.5
OPv.2.1	Área de paralelogramo	OPv.8
OPv.2.2	Propriedades de produto vetorial	OPv.12
OPv.3	Produto Misto	OPv.21
OPv.3.1	Volume de paralelepípedo e tetraedro	OPv.21
OPv.3.2	Relações entre produto misto e bases	OPv.23
OPv.3.3	Propriedades do produto misto	OPv.25

Objetivo

Definir o **produto vetorial** entre dois vetores e o **produto misto** de três vetores.

Estudar suas propriedades e aplicações ao cálculo de áreas e volumes.

Estudar a relação de produto vetorial com ortogonalidade.

Estudar a relação de produto misto com o conceito de base.

Para isso necessitamos do conceito de “**orientação**” em V^3 .

Aula 8

OPv.1 Orientação em V^3

Definição OPv.1.1. Sejam E e F duas bases de V^3 . Dizemos que a base E é **equivalente a** (ou **concordante com**) F , e escrevemos $E \sim F$, se

$$\det(M_{EF}) > 0.$$

Seja \mathcal{B} o conjunto de todas as bases de V^3 .

A relação \sim é uma relação de equivalência em \mathcal{B} , ou seja, satisfaz as três seguintes propriedades:

1. \sim é reflexiva: $E \sim E$ para todo $E \in \mathcal{B}$:

$$M_{EE} = Id.$$

2. \sim é simétrica: se $E \sim F$, então $F \sim E$:

$$M_{FE} = (M_{EF})^{-1}.$$

3. \sim é transitiva: se $E \sim F$ e $F \sim G$, então $E \sim G$:

$$M_{EG} = M_{EF}M_{FG}.$$

Seja E uma base de V^3 .

Definimos a **classe de equivalência de E** , denotada por \overline{E} como sendo o conjunto de todas as bases equivalentes a E , ou seja,

$$\overline{E} = \{ F \in \mathcal{B} \mid F \sim E \} = \{ F \in \mathcal{B} \mid \det(M_{EF}) > 0 \}.$$

Proposição. *Existem apenas duas classes de equivalência em \mathcal{B} , ou seja,*

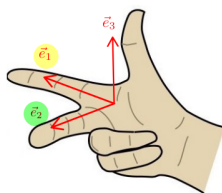
$$\mathcal{B} = \overline{E} \cup \overline{F}, \quad \overline{E} \cap \overline{F} = \emptyset.$$

Definição OPv.1.2. Cada classe de equivalência de \mathcal{B} chama-se **orientação**¹ de V^3 .

Uma vez escolhida e fixada uma classe de equivalência, diz-se que V^3 está **orientado**. Neste caso cada base da orientação escolhida é chamada **base positiva**, e cada base da outra orientação é chamada **base negativa**.

Convenção:

Uma base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de V^3 obedece a regra da mão direita se podemos representar os vetores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ na seguinte forma



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Regra_da_m%C3%A3o_direita.jpg

Orientamos V^3 com uma base que obedece a regra da mão direita.

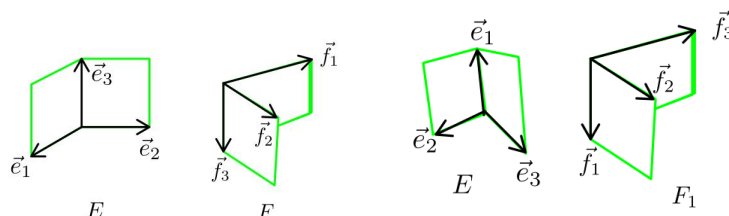
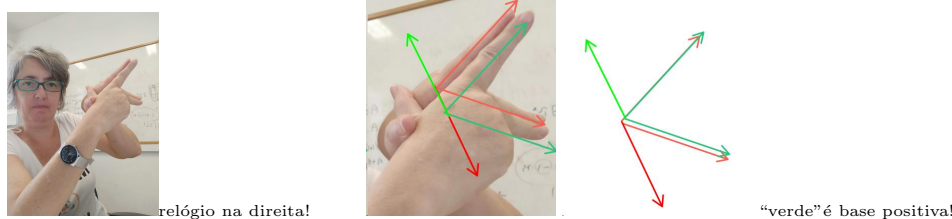


Figura 1: E e F obedecem a regra da mão direita, F_1 não obedece.

Uma base positiva em V^3 é aquela que obedece a regra da mão direita.

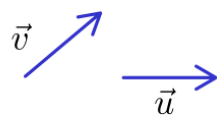


¹Para uma explicação geométrica da palavra “orientação”, leia, por exemplo, Apêndice O do livro Geometria Analítica - Paulo Boulos.

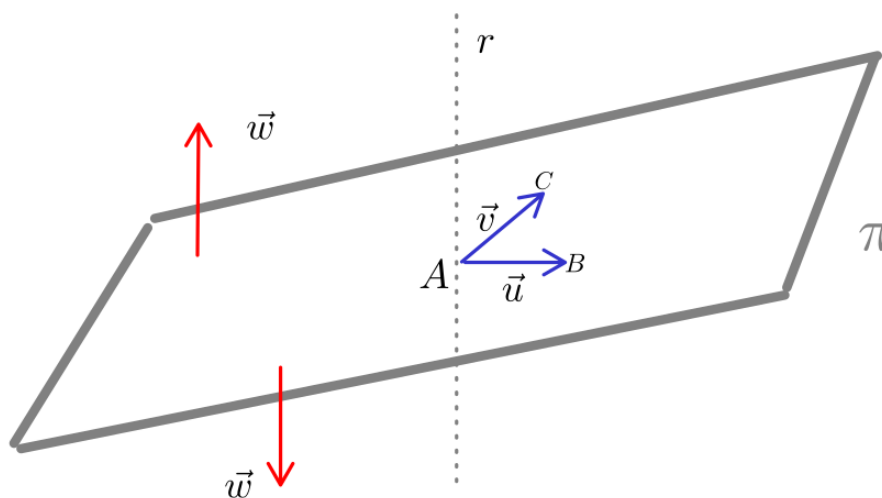
OPv.2 Produto Vetorial

Motivação

Sejam \vec{u} e \vec{v} dois vetores LI de V^3 .



Então², existe um vetor não nulo \vec{w} ortogonal a \vec{u} e \vec{v} :



Se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, os pontos A , B e C determinam um único plano π .

Existe uma única reta r perpendicular ao plano π .

A **direção** de \vec{w} é dada pela reta r , portanto, é **única**.

O **sentido** e o **módulo** de \vec{w} **não são únicos**.

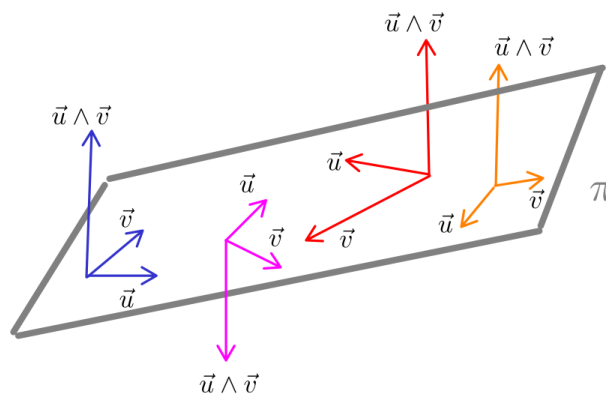
COMO ESCOLHER DE MODO ÚNICO UM VETOR ORTOGONAL A \vec{u} E \vec{v} ?

²Fizemos exercício para determinar \vec{w} , conhecendo as coordenadas de \vec{u} e \vec{v} em relação a uma base ortonormal. Veja Exercício 23 em [Slide de Exercícios](#).

Definição OPv.2.1. Sejam \vec{u} e \vec{v} dois vetores de V^3 .

O **produto vetorial de \vec{u} e \vec{v}** é o vetor, denotado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (ou $\vec{u} \times \vec{v}$), tal que:

1. Se \vec{u} e \vec{v} são LD, então $\vec{u} \wedge \vec{v} := \vec{0}$.
2. Se \vec{u} e \vec{v} são LI, então
 - (a) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a \vec{u} e a \vec{v}
 - (b) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$, onde $\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$
 - (c) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é uma base positiva.



Nota.

1. Se \vec{u} e \vec{v} são LI, as propriedades (a), (b) e (c) da definição determinam unicamente o vetor $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
2. O produto vetorial é um **vetor**.
3. O produto escalar é um **número real**.
4. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se, \vec{u} e \vec{v} são LD.

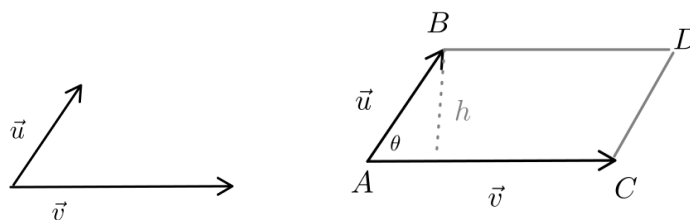
OPv.2.1 Área de paralelogramo

Aula 9

Aplicação de produto vetorial:

A área A_{ABDC} do paralelogramo $ABDC$ gerado por dois vetores \vec{u} e \vec{v} LI de V^3 é dada por:

$$A_{ABDC} = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|.$$



Como calcular $\vec{u} \wedge \vec{v}$?

Lembre-se da condição para dois vetores serem LD/LI: Proposição [B.1.4](#).

Teorema OPv.2.2. *Seja $E = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal positiva. Se $\vec{u} = (x, y, z)_E$ e $\vec{v} = (a, b, c)_E$, então*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & z \\ b & c \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ a & c \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} \vec{k} =: \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix}.$$

Exemplo OPv.2.3. Ver Exercício [31](#) em [Slide de Exercícios](#).

OPv.2.2 Propriedades de produto vetorial

Proposição OPv.2.4. Para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ em V^3 e escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, vale:

$$1. \vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}. \quad (\text{não é comutativa})$$

$$2. (\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}).$$

$$3. \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}. \quad (\text{distributiva à esquerda})$$

$$4. (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}. \quad (\text{distributiva à direita})$$

Demonstração. Seguem das propriedades de determinante. (tarefa!) \square

Nota.

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \implies \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$?
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w} \implies \vec{v} = \vec{w}$?
- $\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w})$?
- Faz sentido $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ e $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$?
 - Se sim, vale $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ (é associativa?)

QUAIS PROPRIEDADES **PRODUTO VETORIAL DUPLO** SATISFAZ?

Proposição OPv.2.5. Para quaisquer vetores \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} , valem:

1. $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = -(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v}$:
2. $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.

Demonstração. [Tarefa!](#) □

Corolário (Identidade de Jacobi).

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} + (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} + (\vec{w} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{0}.$$

Exemplo OPv.2.6. Ver Exercício [32](#) em [Slide de Exercícios](#).

Corolário OPv.2.7. Sejam \vec{u}, \vec{v} vetores LI. Então,

1. $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ é uma combinação linear de \vec{u} e \vec{v} , para todo vetor $\vec{w} \in V^3$;
 2. $F = (\vec{u}, (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é uma base ortogonal positiva de V^3 .
-

Corolário OPv.2.8. Sejam \vec{u}, \vec{v} vetores LI. Então, $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ onde

$$\vec{i} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \quad \vec{j} = \frac{(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u}}{\|(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u}\|}, \quad \vec{k} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|},$$

é uma base ortonormal positiva de V^3 .

Nota. Dados \vec{u}, \vec{v} vetores LI, a específica base ortonormal positiva dada no Corolário [OPv.2.8](#), $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, é tal que seus vetores satisfazem as propriedades:

- \vec{i} é paralelo a \vec{u} ,
- \vec{j} é combinação linear de \vec{u} e de \vec{v} .

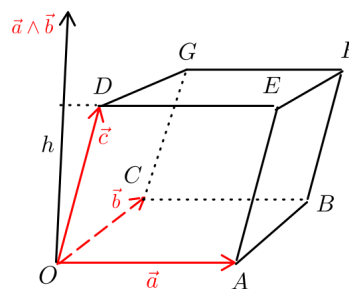
Exemplo OPv.2.9. Ver Exercícios [33](#) a [36](#) em [Slide de Exercícios](#).

OPv.3 Produto Misto

A definição do produto misto de três vetores LI no espaço é motivada pelo cálculo do volume de um paralelepípedo gerado por tais vetores.

OPv.3.1 Volume de paralelepípedo e tetraedro

Calcular o volume V_P do paralelepípedo $P = OABCDEFG$ determinado por três vetores LI \vec{a}, \vec{b} e \vec{c} de V^3 .



- $V_P = (\text{área da base})(\text{altura}) = (\text{área paralelogramo } OABC)h$

- área da base = $area(OABC) = \|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$

- $h = \|\text{proj}_{\vec{a} \wedge \vec{b}} \vec{c}\| \stackrel{\text{Prop. P.2.8}}{=} \frac{|\vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})|}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|}$

- Portanto,

$$V_P = |\vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})| = |(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

Definição OPv.3.1. Sejam \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} três vetores de V^3 .

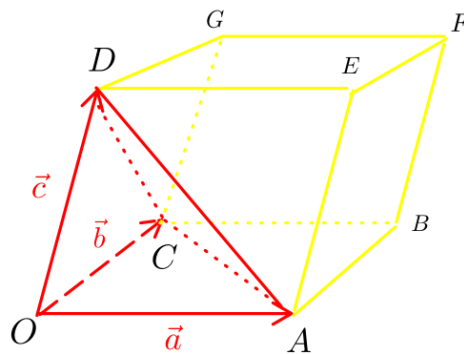
O **produto misto** dos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} , **nessa ordem**, é o número real $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}$, denotado por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] := (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Nota. Sejam \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} vetores LI de V^3 :

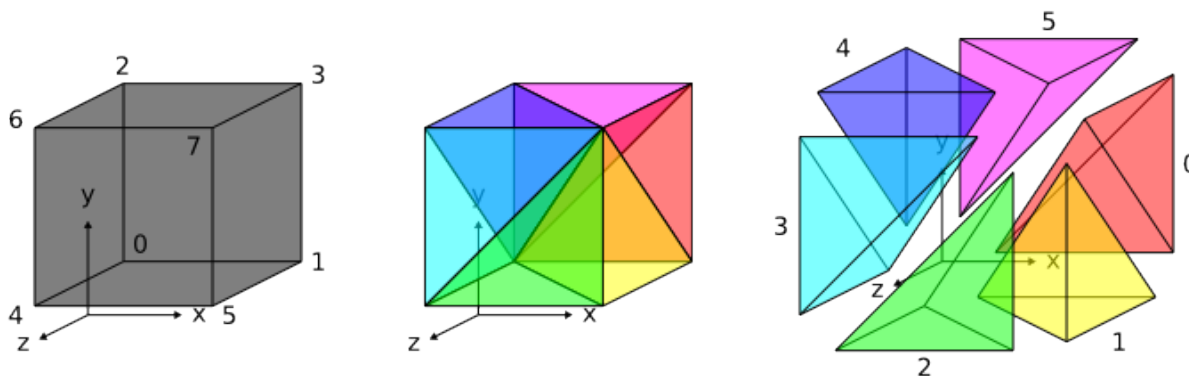
$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{OC}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{OD}.$$

Estes vetores definem também um tetraedro (figura em vermelho):



O volume do tetraedro é:

$$V_T = \frac{1}{6}(\text{volume do paralelepípedo determinado por } \vec{a}, \vec{b} \text{ e } \vec{c}).$$



Fonte: https://www.dune-project.org/doxygen/2.6.0/classDune_1_1GridFactoryInterface.html

$$V_T = \frac{1}{6} |(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|.$$

COMO CALCULAR DE MANEIRA MAIS RÁPIDA O PRODUTO MISTO?

Proposição OPv.3.2. *Seja $E = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal positiva. Se*

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)_E, \quad \vec{v} = (x_2, y_2, z_2)_E, \quad \vec{w} = (x_3, y_3, z_3)_E,$$

então

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{matrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} & = & \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{coordenadas de } \vec{u} \\ \leftarrow \text{coordenadas de } \vec{v} \\ \leftarrow \text{coordenadas de } \vec{w} \end{matrix}$$

OPv.3.2 Relações entre produto misto e bases

Corolário OPv.3.3. *Sejam $E = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal positiva e \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} três vetores de V^3 .*

1. os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são LD se e somente se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$;
2. os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são LI se e somente se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$.

Corolário OPv.3.4. *Seja $E = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal positiva. Se $F = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ e $G = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ são bases quaisquer de V^3 , então*

1. $\det M_{EF} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.
2. $\det M_{FG} = \frac{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]}$.

Corolário OPv.3.5. *Seja $E = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal positiva, \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} três vetores de V^3 e $F = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.*

1. Se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$, então F não é base.
2. Se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$, então F é base;
 - (a) se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] > 0$, então F é base positiva;
 - (b) se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] < 0$, então F é base negativa.

OPv.3.3 Propriedades do produto misto**Proposição OPv.3.6.**

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{u}_i, \vec{v}_i, \vec{w}_i \in V^3$, $i = 1, 2$.

1. O produto misto é tri-linear:

$$(a) [\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = \alpha[\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + \beta[\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}];$$

$$(b) [\vec{u}, \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2, \vec{w}] = \alpha[\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{w}] + \beta[\vec{u}, \vec{v}_2, \vec{w}];$$

$$(c) [\vec{u}, \vec{v}, \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2] = \alpha[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1] + \beta[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_2].$$

2. O produto misto é alternado:

$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}] \\ &= [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]. \end{aligned}$$

3. Se os vetores \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} são combinações lineares de \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} , ou seja,

$$\vec{a} = a_1\vec{u} + b_1\vec{v} + c_1\vec{w}, \quad \vec{b} = a_2\vec{u} + b_2\vec{v} + c_2\vec{w}, \quad \vec{c} = a_3\vec{u} + b_3\vec{v} + c_3\vec{w},$$

então:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]. \quad (\text{OPv.3.1})$$

Demonstração. [Tarefa!](#)

□

Aula 11

Fazer Exercícios 32-(c)-(d) e 36.

Exemplo OPv.3.7. Ver Exercícios 37 e 38 em [Slide de Exercícios](#).