Conteúdo

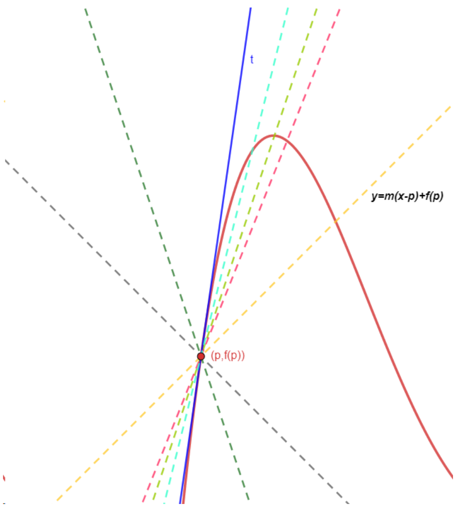
D.1 Introdução

Problema:

Dada $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $p \in D_f$ um ponto de acumulação de D_f, queremos **determinar a reta tangente ao gráfico de f no ponto $P = (p, f(p))$**.

Considerações:

- pelo ponto $P = (p, f(p))$ passam infinitas retas, que podem ser distinguidas pelo coeficiente angular: $y = m(x - p) + f(p)$.
- o que exatamente define uma reta tangente?



Definição:

Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ e p um ponto de acumulação de D.

Diremos

$$\text{“}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \text{ quando } x \to p\text{”}$$

(f é ozinho de g quando x tende a p),

(f é infinitésima com respeito a g quando x tende a p),

se

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

Exemplos:

$$\ln(1 + x) = \sigma(1) \text{ quando } x \to 0$$
$$\sin(x^2) = \sigma(x) \text{ quando } x \to 0$$
$$\sin(x) = \sigma(x) \text{ quando } x \to \infty$$

Cuidado:

$$x^2 = \sigma(x) \text{ quando } x \to 0$$
$$x = \sigma(x^2) \text{ quando } x \to +\infty$$

Definição D.1.1. **Reta tangente ao gráfico de f em $(p, f(p))$:**

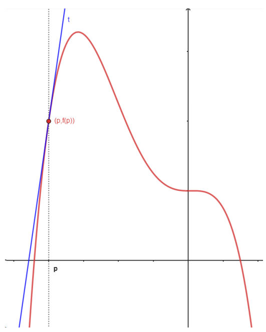
é a única (se existir) reta r que passa por $(p, f(p))$ que satisfaz a propriedade:

$$f(x) - r(x) = \sigma(x - p) \quad \textbf{quando } x \to p,$$

isto é, tal que

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - r(x)}{x - p} = 0.$$

r é a função afim que (neste sentido) melhor aproxima a função f, próximo de p.



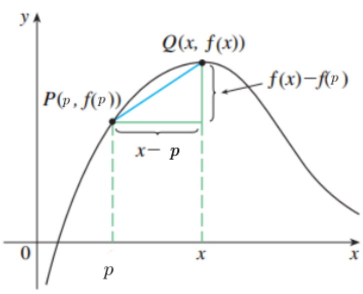
- $\boxed{r(x) = f(p) + m(x-p)}$
- $$\begin{aligned}\lim_{x\to p}\frac{f(x)-r(x)}{x-p} &= \lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)-m(x-p)}{x-p}\\ &= \lim_{x\to p}\left(\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\right) - m\end{aligned}$$
- $$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-r(x)}{x-p} = 0 \iff \lim_{x\to p}\left(\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\right) = m$$

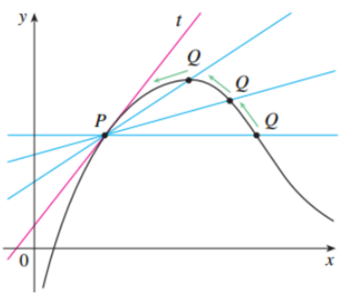
Logo, **a reta tangente** ao gráfico de f em $(p, f(p))$ é a reta com inclinação:

$$\boxed{m = \lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}}$$

Nota. O limite acima pode ser visto como o limite quando $t \to p$, do coeficiente angular $m_{p,x}$ da **reta secante ao gráfico de f em $(p, f(p))$ e em $(x, f(x))$:**

$$m_{p,x} = \frac{f(x)-f(p)}{x-p}.$$





uma secante outra secante ...limite

Qual é a velocidade/aceleração média? velocidade/aceleração instantânea?

D.2 Definição de derivada

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $p \in D_f$ um ponto de acumulação de D_f.

- **Se existir**
$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \frac{\mathbf{f(x)} - \mathbf{f(p)}}{\mathbf{x} - \mathbf{p}} = \mathbf{L} \ \in \mathbb{R}\,,$$
então dizemos que
  - f **é derivável** (ou **diferenciável**) **em** p**,**
  - L **é a derivada de** f **em** p**;** notação: $\mathbf{f'(p)} := L$.
- Se o limite não existir (ou for infinito), dizemos que f **não é derivável** (ou **diferenciável**) **em** p.

O limite acima é equivalente ao seguinte limite:
$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{f(p+h)} - \mathbf{f(p)}}{\mathbf{h}}\,.$$

Dado um conjunto $A \subset D_f \subseteq \mathbb{R}$

- se f é derivável em p para todo $p \in A$ dizemos f **é derivável em** A,
- se f é derivável em p para todo $p \in D_f$ dizemos f **é derivável**.

Podemos então definir uma nova função: a **função derivada de** f :
$$\mathbf{f'} : \mathbf{D_{f'}} \to \mathbb{R} : \mathbf{p} \mapsto \mathbf{f'(p)}$$
onde $D_{f'} = \{p \in D_f :\ p$ **é de acumul. de** D_f **e** f **é derivável em** $p\}$

Notações: $f' = \dfrac{df}{dx} = \dfrac{dy}{dx} = Df$
$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=p} = Df(p)$$

D.2.1 Algumas interpretações de derivada

- derivada é a **inclinação de reta tangente** à gráfico de função

- se $f(t)$ indica a posição ao longo de uma reta de uma partícula em função do tempo, então $f'(t)$ indica a **velocidade instantânea**

- se $f(t)$ indica a velocidade ao longo de uma reta de uma partícula em função do tempo, então $f'(t)$ indica a **aceleração instantânea**

- mais em geral, se $f(t)$ indica uma certa quantidade física em função do tempo, então
  - f' indica a **taxa de variação** desta quantidade.
  exemplo: $c(t)$ é a concentração de um reagente numa solução, então $c'(t)$ taxa de variação da concentração.

- se $f(x)$ indica uma certa quantidade física A em função de outra quantidade B, então
  - f' indica a **taxa de variação de A com respeito a B.**
  exemplo: $V(P)$ é o volume de um gás em função da Pressão P, então $V'(P)$ é a taxa de variação do volume em função da pressão

---

Exemplo 1. Exercícios 32 e 33 em Slides de Exercícios.

Teorema.
Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $p \in D_f$ um ponto de acumulação de D_f.
Se f é derivável em p então f é contínua em p.

Exemplo 2. Exercícios 34, 35 e 36 em Slides de Exercícios.

D.3 Regras de derivação

Teorema (Operações com derivadas).
Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$, p ponto de acumulação de D e $k \in \mathbb{R}$.
Se **f e g são deriváveis em p, então**

- **kf, $f \pm g$, fg são deriváveis em p,**
- **f/g é derivável em p, desde que $g(p) \neq 0$,**
- **vale**

$$\begin{cases} (kf)'(p) = k\, f'(p)\,, \\ (f \pm g)'(p) = f'(p) \pm g'(p)\,, \\ (fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)\,, \\ (f/g)'(p) = \dfrac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{(g(p))^2} \qquad (\textbf{se } g(p) \neq 0). \end{cases}$$

Exemplo 3. Exercício 37 em Slides de Exercícios.

Teorema (Derivada da composta - Regra da cadeia).
Sejam

$$f : D_f \to \mathbb{R}\,, \quad g : D_g \to \mathbb{R}\,, \quad Im(f) \subseteq D_g,$$

$$f \text{ derivável em } p, \qquad g \text{ derivável em } f(p).$$

($p \in D_f$ um ponto de acumulação de D_f, $f(p) \in D_g$ um ponto de acumulação de D_g)

Então $g \circ f$ é derivável em p e vale

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p)\,.$$

Corolário (Derivabilidade das composições de deriváveis).
Qualquer função obtida via soma, diferença, produto, divisão ou composição de funções deriváveis, **é derivável**.

Exemplo 4. Exercícios 38 e 39 em Slides de Exercícios.

Teorema (Derivada da inversa).
Seja $f : A \to B$ contínua e bijetora onde A é um intervalo *(e portanto f^{-1} é contínua)*.
Se f derivável em x_0 e $f'(x_0) \neq 0$
então f^{-1} é derivável em $y_0 := f(x_0)$ e vale

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

.

Exemplo 5. Exercícios 40 e 41 em Slides de Exercícios.

D.4 Tabela de derivadas

Funções Elementares: exponencial, potências, logaritmo

Função	domínio	Função derivada	domínio
x^n $(n \in \mathbb{N})$;	$x \in \mathbb{R}$	$(x^n)' = nx^{n-1}$,	$x \in \mathbb{R}$
$x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$, $(n \in \mathbb{Z}_-)$;	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(x^n)' = nx^{n-1}$,	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\sqrt[n]{x}$ $(n$ par$)$;	$x \in [0, \infty)$	$(\sqrt[n]{x})' = \dfrac{1}{n}x^{n-1}$,	$x \in (0, \infty)$
$\sqrt[n]{x}$; $(n$ ímpar$)$	$x \in \mathbb{R}$	$(\sqrt[n]{x})' = \dfrac{1}{n}x^{n-1}$,	$x \in \mathbb{R}$
$\sqrt[q]{x^p}$; $(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N},)$	$x \in D$	$(x^{p/q})' = \dfrac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$,	$x \in D \setminus \{0\}$
x^α; $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$	$x \in (0, \infty)$	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$x \in (0, \infty)$

$$(x^\beta)' = \beta x^{\beta-1}, \quad \text{com os devidos cuidados com os domínios}$$

e^x,	$x \in \mathbb{R}$	$(e^x)' = e^x$,	$x \in \mathbb{R}$
$\ln(x)$,	$x \in (0, \infty)$	$(\ln\|x\|)' = \dfrac{1}{x}$,	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\ln(-x)$,	$x \in (-\infty, 0)$		

Funções elementares: trigonométricas e trigonométricas inversas

Função	Domínio	Função derivada	Domínio
$\sin x$,	$x \in \mathbb{R}$	$(\sin x)' = \cos x$,	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$,	$x \in \mathbb{R}$	$(\cos x)' = -\sin x$,	$x \in \mathbb{R}$
$\sec x$;	(* em apropriados intervalos)	$(\sec x)' = \sec x \ \tan x$	
$\tan x$;	(* em apropriados intervalos)	$(\tan x)' = \sec^2 x$	
$\arctan x$,	$x \in \mathbb{R}$;	$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,	$x \in \mathbb{R}$
$\arcsin x$,	$x \in [-1, 1]$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,	$x \in (-1, 1)$
$\arccos x$,	$x \in [-1, 1]$	$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$,	$x \in (-1, 1)$
$\text{arcsec}\, x$,	$x > 1$	$(\text{arcsec}\, x)' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$,	$x > 1$

Funções elementares: hiperbólicas e hiperbólicas inversas

Função e seu domínio	Função derivada e seu domínio
$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$	$(\sinh^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$
$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geq 1$	$(\cosh^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$
$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right), \quad 0 < x \leq 1$	$(\operatorname{sech}^{-1} x)' = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < 1$
$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right), \quad \lvert x\rvert < 1$	$(\tanh^{-1} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}, \quad \lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{cotanh}^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{x-1}\right), \quad \lvert x\rvert > 1$	$(\operatorname{cotanh}^{-1} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}, \quad \lvert x\rvert > 1$

Pela Regra da Cadeia: se $u = u(x)$ é uma função derivável, então:

* com devidos cuidados com os dominios! *

- $\dfrac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}u'$
- $\dfrac{d(a^u)}{dx} = a^u(\ln a)u' \qquad (\therefore (e^u)' = e^u u')$
- $\dfrac{d(\ln|u|)}{dx} = \dfrac{1}{u}u'$
- $\dfrac{d(\sin u)}{dx} = \cos(u)u'$
- $\dfrac{d(\cos u)}{dx} = -\sin(u)u'$
- $\dfrac{d(\arctan u)}{dx} = \dfrac{1}{1+u^2}u'$
- $\dfrac{d(\arcsin u)}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u' \qquad (|u| < 1)$
- $\dfrac{d(\sinh u)}{dx} = \cosh(u)u'$
- $\dfrac{d(\cosh u)}{dx} = \sinh(u)u'$

Usando a Regra da Cadeia, podemos obter a regra:

$$D(f(x)^{g(x)}) = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

$x^2\sin(1/x)$

D.5 Derivadas de ordem superior

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ derivável em $D_{f'}$ e $p \in D_{f'}$ um ponto de acumulação de $D_{f'}$.

- **Se existir**
$$\lim_{\mathbf{t}\to\mathbf{p}} \frac{\mathbf{f'(t) - f'(p)}}{\mathbf{t - p}} = \mathbf{L} \ \in \mathbb{R},$$
então dizemos que
  - **f é duas vezes derivável em p,**
  - **L é a derivada segunda de f em p;** notação: $\mathbf{f''(p)} := L$.
- Se o limite não existir (ou for infinito), dizemos que **f não é duas vezes derivável em p.**

Podemos então definir uma nova função: a **função derivada segunda de f** :

$$\mathbf{f'' : D_{f''} \to \mathbb{R} : p \mapsto f''(p)}$$

onde
$D_{f''} = \{p \in D_{f'} :$ p **é de acumul. de** $D_{f'}$ **e** f **é duas vezes derivável em** $p\}$

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ derivável k vezes em $D_{f^{(k)}}$ e $p \in D_{f^{(k)}}$ um ponto de acumulação de $D_{f^{(k)}}$.

- **Se existir**
$$\lim_{\mathbf{t}\to\mathbf{p}} \frac{\mathbf{f^{(k)}(t) - f^{(k)}(p)}}{\mathbf{t - p}} = \mathbf{L} \ \in \mathbb{R},$$
então dizemos que
  - **f é $k+1$ vezes derivável em p,**
  - **L é a derivada $(k+1)$-ésima de f em p;** not.: $\mathbf{f^{(k+1)}(p)} := L$.
- Se o limite não existir (ou for infinito), dizemos que **f não é $k+1$ vezes derivável em p.**

Podemos então definir uma nova função: a **função derivada $(k+1)$-ésima de f** :

$$\mathbf{f^{(k+1)}} : \mathbf{D_{f^{(k+1)}}} \to \mathbb{R} : \mathbf{p} \mapsto \mathbf{f^{(k+1)}(p)}$$

onde

$D_{f^{(k+1)}} = \{p \in D_{f^{(k)}} :$ p **é de acum. de** $D_{f^{(k+1)}}$ **e** f **é** $k+1$ **vezes deriv. em** $p\}$

Dado um conjunto $A \subset D_f \subseteq \mathbb{R}$

- se f é k vezes derivável em p para todo $p \in A$ dizemos **f é k vezes derivável em A**,
- se f é k vezes derivável em p para todo $p \in D_f$ dizemos **f é k vezes derivável**.

Exemplo 6. Exercício 42 em Slides de Exercícios.

D.6 Derivação implícita

Suponha $y = f(x)$ para alguma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que a equação

$$F(x, y) = 0$$

define y como função de x **implicitamente**. Se f é diferenciável, podemos usar a Regra da Cadeia para encontrar a derivada de f.

Exemplo 7. Assumindo que $y = f(x)$, $x \in I$, e que satisfaz a equação

$$F(x, y) = y^2 x + \cos(xy) = 2,$$

então a equação $F(x, y) = 0$, onde $F(x, y) = y^2 x + \cos(xy) - 2$ define y implicitamente.

Exemplo 8. Exercício 43 em Slides de Exercícios.

D.7 A diferencial

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ derivável em p.

A **diferencial de f em p** é a função (linear)

$$df_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : h \to f'(p)h$$

Pelo que vimos possui a propriedade que

$$f(x) - f(p) = df_p(x-p) + o(x-p), \quad \text{quando } x \to p.$$

Resumo: se existir (real) $f'(p) := \lim_{t\to p} \frac{f(t)-f(p)}{t-p}$ então

- *Derivada de f em p*: é o número $f'(p)$.
- *Diferencial de f em p*: é a função linear $df_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : h \to f'(p)h$
- *Reta tangente ao gráfico de f em p*: é dada pela função afim

$$T_p(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(p) + f'(p)(x-p) = f(p) + df_p(x-p)$$