Conteúdo

D1 Recordação sobre Topologia

Aula 12

- X conjunto não vazio.
- τ coleção de subconjuntos de X: $\tau = \{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.

Dizemos que τ é uma topologia em X se:

(a) $\emptyset, X \in \tau$

(b) $\bigcup_{qq} X_\alpha \in \tau$, $X_\alpha \in \tau$

(c) $\bigcap_{finita} X_\alpha \in \tau$, $X_\alpha \in \tau$

(X, τ) é chamado espaço topológico.
Os elementos de uma topologia τ são chamados de abertos.

D2 Exemplos de topologia

D2.0.1 Topologia induzida pela norma (topologia "forte", "usual"):

- X é um espaço vetorial normado
- τ: gerada pelas bolas abertas, é o conjunto de todos os abertos de X, onde

  um aberto de X é um subconjunto de X em que todo ponto é ponto interior, ou seja, para cada ponto do subconjunto, existe uma bola aberta centrada no ponto contida no subconjunto (portanto, depende da norma)

τ satisfaz (a), (b) e (c):

$$\emptyset, X \in \tau, \quad \bigcup_{qq} A_i \in \tau, \quad \bigcap_{finita} A_i \in \tau, \quad (A_i \in \tau).$$

τ é topologia em X, chamada de topologia induzida pela norma.

D2.0.2 Topologia discreta ("maior" topologia)

- X conjunto não vazio
- τ é o conjunto de todos os subconjuntos de X: 2^X ou $\mathcal{P}(X)$

τ é topologia em X, chamada de topologia discreta.

$$\tau \subset 2^X, \quad \forall \tau \text{ topologia em } X$$

Motivação

- A topologia induzida pela norma em um e.v.n. é "muito forte" no sentido que tem "muitos abertos" e consequentemente "poucos compactos". Por exemplo, a bola fechada em um e.v.n. de dimensão infinita não é compacta (Teo. de Riesz A5.7):

$$\overline{B_1^X(0)} \text{ compacta } \Rightarrow \dim X < \infty \quad (\star)$$

- Muitas soluções de problemas são baseadas em max/min de funções: a compacidade tem um papel fundamental e com o fato $(\star)$, muitos resultados não podem ser obtidos diretamente em espaços de dimensão infinita.

- Por outro lado, uma função tem mais chance de ser contínua na topologia induzida pela norma (muitos abertos).

Objetivo: definir topologias "mais fracas" (com menos abertos e mais compactos) do que a topologia induzida pela norma, que de alguma maneira "preservem" propriedades de continuidade.

Definição D2.1. Uma função $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ é contínua quando $f^{-1}(\Omega) \in \tau_X$ para todo $\Omega \in \tau_Y$. ★

Definição D2.2. Se (X, τ) é um espaço topológico, dizemos que $C \subseteq X$ é **compacto** se toda cobertura aberta de C possui uma subcobertura finita.

> se $C \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$ onde $\{A_i\} \subseteq \tau$ então existe un subconjunto finito de índices $I_0 \subseteq \mathcal{I}$ tal que $C \subseteq \bigcup_{i \in I_0} A_i$

★

Definição D2.3. Dizemos que um (X, τ) espaço topológico (ou que a topologia τ) é de **Hausdorff** se para todo $x, y \in X$ com $x \neq y$, existem $O_1, O_2 \in \tau$ disjuntos tais que $x \in O_1$, $y \in O_2$. ★

Observação. X e.v.n., τ_1 topologia em X, τ_2 topologia induzida pela norma:

- $x_n \to x$ em $\tau_1 \iff \forall\, V \in \tau_1, V \ni x, \exists\, n_0; x_n \in V,\ n \geq n_0$
- $x_n \to x$ em $\tau_2 \iff \|x_n - x\| \to 0$

Seja (X, τ) espaço topológico

1. $V \subset X$ é uma vizinhança de $x \in X$ se
$$\exists\, O \in \tau; x \in O \subset V$$
2. $N_x \subset \tau$ é uma base de vizinhanças de $x \in X$ quando
$$x \in U \in \tau \Longrightarrow \exists\, V \in N_x; x \in V \subset U$$
3. $\mathcal{N} \subset \tau$ é uma base para τ quando todo $O \in \tau$,
$$O = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} V_i, \quad V_i \in \mathcal{N}$$

Definição D2.4. Se τ_1, τ_2 são duas topologias no conjunto X, dizemos que:

- τ_2 é mais fina que τ_1, se $\tau_1 \subseteq \tau_2$
(mais fina se tem mais abertos, "maior")
- τ_1 é menos fina que τ_2, se $\tau_1 \subseteq \tau_2$
(menos fina se tem menos abertos, "menor", "mais fraca")

★

Exemplo.
A topologia discreta é mais fina que a topologia induzida pela norma. ★

Nosso interesse: queremos uma topologia menos fina que a topologia induzida pela norma que preserve continuidade.

D2.0.3 Topologia gerada

- X um espaço topológico
- $g \subset \mathcal{P}(X)$: uma família de conjuntos de X
- $\{\tau_i\}_{i\in I}$ a coleção de topologias em X tais que $g \subset \tau_i$, $\forall i \in I$,[1]
  isto é, todo elemento de g é aberto em cada topologia τ_i.
- $\bigcap_{i\in I} \tau_i$ é a menor (menos fina) topologia em X que contém g [Loi75, p. 77]

Denotamos a topologia menos fina de X que contém g por

$$[g] = \bigcap_{i\in I} \{\tau_i : \tau_i \text{ é topologia em } X,\ g \subset \tau_i\}$$

e é denominada topologia gerada por g.

Qual é a "cara" da topologia $[g]$?

- $\mathcal{E} = g \cup \{\emptyset, X\}$.
- τ topologia em X tal que $\mathcal{E} \subset \tau$

Então, τ deve conter interseções finitas de elementos de $\mathcal{E}$:

$$\gamma := \left\{ \bigcap_{j\in J} A_j \ ;\ A_j \in \mathcal{E},\ J \text{ finito} \right\} \subset \tau$$

Por consequência, τ deve conter uniões quaisquer de elementos de γ:

$$\boxed{\tau(\mathcal{E}) := \left\{ \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \ ;\ B_\lambda = \bigcap_{j\in J_\lambda} A_{j,\lambda},\ A_{j,\lambda} \in \mathcal{E},\ J_\lambda \text{ finito} \right\} \subset \tau}$$

- $\tau(\mathcal{E}) \subset \tau$, para toda topologia τ que contém g: $\tau(\mathcal{E}) \subset [g]$.
- $\tau(\mathcal{E})$ é uma topologia em Xque contém g: $[g] \subset \tau(\mathcal{E})$. [Loi75, p. 77]

$$\boxed{[g] = \tau(\mathcal{E})}$$

Resumindo: dado $g \subset \mathcal{P}(X)$, a topologia gerada por g (a menos fina que contém g) é aquela formada por $\emptyset, X$ e uniões quaisquer de interseções finitas de elementos de g.

[1]Esta coleção é não vazia, pois 2^X é uma dessas topologias

D2.0.4 Topologia induzida por uma família de funções

- X um conjunto
- $\{(Y_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ uma coleção de espaços topológicos
- $\mathcal{F} = \{\varphi_i\}_{i\in I}$ uma coleção de funções $\varphi_i : X \to Y_i$

Queremos a topologia menos fina τ em X de modo que toda φ_i seja contínua, i.e.,

$$\varphi_i^{-1}(\Omega_i) \in \tau, \quad \Omega_i \in \tau_i, \ \forall i \in I$$

i.e, queremos a topologia menos fina que contém

$$g = \left\{\varphi_i^{-1}(\Omega_i) \subset X \ \ ; \ \ \Omega_i \in \tau_i, \ i \in I\right\} \subset \mathcal{P}(X).$$

Pela Seção D2.0.3, a topologia menos fina que torna cada φ_i contínua, chamada topologia induzida pela família $\mathcal{F}$, é a topologia gerada por g:

$$\sigma := \left\{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcap_{j\in J_\lambda} \varphi_{i,\lambda}^{-1}(\Omega_{i,\lambda}) \ \ ; \ \ \Omega_{i,\lambda} \in \tau_i, \ i \in I, \ J_\lambda \text{ finito}\right\}. \tag{D2.1}$$

Note que, para a topologia induzida por $\mathcal{F}$:

- uma base para σ é da forma:

$$\mathcal{N} = \left\{\bigcap_{i\in J}\varphi_i^{-1}(\Omega_i) : \Omega_i \in \tau_i, J \subset I \text{ finito}\right\} \tag{D2.2}$$

- para cada $x \in X$, obtemos uma base de vizinhanças de x (na topologia σ) considerando conjuntos da forma

$$\bigcap_{i\in J}\varphi_i^{-1}(V_i),$$

onde J é finito e cada V_i é uma vizinhança de $\varphi_i(x)$ em Y_i:

$$N_x = \left\{\bigcap_{i\in J}\varphi_i^{-1}(V_i) : V_i \text{ é vizinhança de } \varphi_i(x) \text{ em } Y_i, \ J \text{ é finito}\right\} \tag{D2.3}$$

D3 Topologia fraca em e.v.n. X

Objetivo: usar X^* para definir uma topologia σ em X

"$\sigma(X, X^*)$" será uma topologia em X induzida por X^*

Definição D3.1 (Topologia fraca)**.** Seja X um e.v.n. sobre $\mathbb{K}$. Denotamos por $\boxed{\tau_X}$ sua **topologia forte**: a induzida pela norma. Definimos em X a **topologia fraca**, denotada[2] por $\boxed{\sigma = \sigma(X, X^*)}$,[3] como sendo a topologia gerada pela família

$$g = \left\{\phi^{-1}(A) : \ \phi \in X^*, \ A \subseteq \mathbb{K} \text{ aberto}\right\} \subset X\,,$$

ou seja, a topologia induzida pela família $\mathcal{F} = \{\phi\}_{\phi \in X^*}$ ★

Desta forma todo $\phi \in X^*$ será ainda contínuo com respeito à topologia fraca:

A topologia fraca é a menos fina que preserva a continuidade dos $\phi \in X^*$

$$\sigma(X, X^*) \subset \tau_X \tag{D3.1}$$

$$^a(X, \sigma(X, X^*))^* = X^* \tag{D3.2}$$

[a] "dual" na topologia fraca se refere à continuidade: cont. na top. fraca $\iff$ cont./ltda. na top. forte

Outra **base de vizinhanças para x** na topologia fraca $\sigma(X, X^*)$ é composta pelos conjuntos da forma

$$V_{\varepsilon,\phi_1,..,\phi_N}(x) := \{y \in X : \ |\phi_i(y - x)| < \varepsilon \ \forall i = 1, .., N\} \tag{D3.3}$$

onde $\varepsilon > 0$ e $\phi_i \in X^*$ para um número finito de $i = 1, .., N$.

[2] Denotaremos aqui, quando não der confusão, $X_\tau = (X, \tau)$ e $X_\sigma = (X, \sigma(X, X^*))$.

[3] Cuidado: a notação varia... em alguns livros muda a ordem.

Demonstração. **Queremos mostrar que:** $N_x := \{V_x := V_{\varepsilon,\phi_1,..,\phi_N}(x) : \varepsilon > 0, \phi_1, \dots, \phi_N \in X^*\}$ **é base de vizinhanças de** x

> $N_x \subset \tau$ é uma base de vizinhanças de $x \in X$ na topologia τ se ($x \in U \in \tau \Rightarrow \exists\, V \in N_x; x \in V \subset U$)

Af.1. $V_x := V_{\varepsilon,\phi_1,..,\phi_N}(x) \in \sigma(X, X^*)$ (ε e ϕ_i fixados)

Queremos: V_x **é "união qq de int. finita de elem. da forma** $f^{-1}(B)$**;** $f \in X^*$**,** B **ab. de** $\mathbb{K}$**"**[Eq.(D2.1)]

$$\begin{aligned}
y \in V_x &\iff |\phi_i(y-x)| < \varepsilon\ \forall i = 1,..,N \iff |\phi_i(y) - \phi_i(x)| < \varepsilon\ \forall i = 1,..,N \\
&\iff \phi_i(y) \in B_\varepsilon(\phi_i(x))\ \forall i = 1,..,N \\
&\iff y \in \phi_i^{-1}(B_\varepsilon(\phi_i(x)))\ \forall i = 1,..,N \iff y \in \bigcap_{i=1}^{N} \phi_i^{-1}(\underbrace{B_\varepsilon(\phi_i(x))}_{aberto\ \mathbb{K}})
\end{aligned}$$

- $\boxed{V_{\varepsilon,\phi_1,..,\phi_N}(x) = \bigcap_{i=1}^{N} \phi_i^{-1}(B_\varepsilon(\phi_i(x)))}$ que é um elemento de $\sigma(X, X^*)$

Af.2. $N_x := \{V_x := V_{\varepsilon,\phi_1,..,\phi_N}(x) : \varepsilon > 0, \phi_1, \dots, \phi_N \in X^*\}$ é base de viz. de x:

$x \in U \in \sigma(X, X^*) \Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0, \phi_1, \dots, \phi_N \in X^*;\ \ x \in V_x \subset U$

- $x \in U \in \sigma(X, X^*)$
- De Eq. (D2.3), é uma base de viz. de x :

$$\tilde{N}_x = \left\{ \bigcap_{i \in J} \phi_i^{-1}(V_i) : V_i \text{ é viz. de } \phi_i(x) \text{ em } \mathbb{K},\ J \text{ é finito} \right\}$$

- $\exists\ V \in \tilde{N}_x$; U contém $V \ni x$, i.e.,

$$\exists\ \{\phi_i\}_{i=1}^{N} \subset X^*,\ \ V_i \subset \mathbb{K} \text{ viz. de } \phi_i(x);\ \ V = \bigcap_{i=1}^{N} \phi_i^{-1}(V_i)$$

- $\exists\ \varepsilon > 0;\ \ B_\varepsilon^{\mathbb{K}}(\phi_i(x)) \subset V_i,\ \ \forall i = 1, \dots, N$ $\quad(\varepsilon = \min_{i=1,\dots,N} \varepsilon_i)$
- tome $V_x := \bigcap_{i=1}^{N} \phi_i^{-1}(B_\varepsilon^{\mathbb{K}}(\phi_i(x))) \in N_x$

$$x \in V_x = \bigcap_{i=1}^{N} \phi_i^{-1}(B_\varepsilon^{\mathbb{K}}(\phi_i(x))) \subset \bigcap_{i \in J} \phi_i^{-1}(V_i) = V \subset U$$

□

Proposição D3.2. *Se $\{x_n\}$ é uma sequência em $(X, \sigma(X, X^*))$, então $x_n \to x$ se, e somente se, $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$, $\forall \varphi \in X^*$.* $\lhd$

Demonstração.
($\Longrightarrow$) é válida pois cada φ é ainda contínua na topologia fraca $\sigma(X, X^*)$

($\Longleftarrow$)

> $$x_n \xrightarrow{\sigma} x \iff \forall\, V \in \sigma(X, X^*), V \ni x, \exists\, n_0; x_n \in V,\, n \geq n_0$$

- $V \in \sigma(X, X^*)$; $x \in V$
- $\exists\, \varepsilon > 0, \varphi_1, \ldots, \varphi_N \in X^*;\; V_{\varepsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_N}(x) \subset V$

Queremos: $\exists\, n_0; x_n \in V_{\varepsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_N}(x)$, $n \geq n_0$, **pois daí** $x_n \in V$, $n \geq n_0$

$x_n \in V_{\varepsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_N}(x), n \geq n_0 \iff |\varphi_i(x_n - x)| < \varepsilon, i = 1, \ldots, N$, $n \geq n_0$

- $\exists\, n_i; |\varphi_i(x_n - x)| = |\varphi_i(x_n) - \varphi_i(x)| < \varepsilon$, para $n \geq n_i$ $\quad (\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x))$
- basta tomar $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_N\}$

$\square$

Proposição D3.3. *Sejam (Z, Σ) um espaço topológico e $\psi : (Z, \Sigma) \to (X, \sigma(X, X^*))$ uma função. Então, ψ é contínua se, e somente se, $\varphi \circ \psi : Z \to \mathbb{K}$ é contínua, $\forall \varphi \in X^*$.* $\lhd$

Demonstração.
($\Longrightarrow$) é válida pois composta de contínuas é contínua

($\Longleftarrow$)

Queremos: $\psi^{-1}(V) \in \Sigma$ **para todo** $V \in \sigma(X, X^*)$

> Eq. (D2.1): topologia induzida pela família $\mathcal{F} = \{\varphi\}_{\varphi \in X^*}$:
>
> $$\sigma(X, X^*) := \left\{ \bigcup_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ qq}} \bigcap_{\substack{j \in J_\lambda \\ finita}} \varphi_\lambda^{-1}(\Omega_\lambda) \;\; ; \;\; \Omega_\lambda \in \tau_{\mathbb{K}},\; \varphi_\lambda \in X^*,\; J_\lambda \text{ finito} \right\}.$$

- $V \in \sigma(X, X^*)$
- $V = \bigcup\limits_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ qq}} \bigcap\limits_{\substack{j\in J_\lambda \\ finita}} \varphi_\lambda^{-1}(\Omega_\lambda)$ onde $\Omega_\lambda \in \tau_{\mathbb{K}},\ \varphi_\lambda \in X^*$
- $\psi^{-1}(V) = \bigcup\limits_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ qq}} \bigcap\limits_{\substack{j\in J_\lambda \\ finita}} \psi^{-1}(\varphi_\lambda^{-1}(\Omega_\lambda)) = \bigcup\limits_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ qq}} \bigcap\limits_{\substack{j\in J_\lambda \\ finita}} (\varphi_\lambda \circ \psi)^{-1}(\Omega_\lambda) \in \Sigma?$
- Hipótese: $\varphi \circ \psi : (Z, \Sigma) \to \mathbb{K}$ contínua, $\forall \varphi \in X^*$

$$\begin{aligned} &\implies (\varphi_\lambda \circ \psi)^{-1}(\Omega_\lambda) \in \Sigma \\ &\implies \bigcap_{\substack{j\in J_\lambda \\ finita}} (\varphi_\lambda \circ \psi)^{-1}(\Omega_\lambda) \in \Sigma \\ &\implies \bigcup_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ qq}} \bigcap_{\substack{j\in J_\lambda \\ finita}} (\varphi_\lambda \circ \psi)^{-1}(\Omega_\lambda) \in \Sigma \end{aligned}$$

$\square$

Proposição D3.4. *A topologia fraca $\sigma = \sigma(X, X^*)$*

(a) é Hausdorff

(b) se X tem dimensão finita, coincide com a topologia forte τ.

(c) se X tem dimensão infinita,

(i) é estritamente menos fina da topologia forte τ:

1. todo aberto de σ contém uma reta,

2. nenhuma bola aberta é um aberto de σ

(ii) não pode ser metrizada $\triangleleft$

> **De fato: 1. a prova fornece que: dado $x \in X$, todo aberto $V_{\varepsilon,\phi_1,\dots,\phi_N}(x) \in \sigma(X, X^*)$ contém os pontos $x + ty$, $t \in \mathbb{R}$, para algum $y \in X$. Portanto se $V \in \sigma(X, X^*)$ é tal que $x \in V$, então V contém todos os pontos contém os pontos $x + ty$, $t \in \mathbb{R}$, para algum $y \in X$.**
> **2. bola aberta não pode conter uma reta: considere $g(t) = \|x + ty\|$ e reproduza argumento da página D27.**

Demonstração. **(a) A topologia fraca $\sigma = \sigma(X, X^*)$ é Hausdorff**

- $x, y \in X$ com $x \neq y$

Queremos: $O_1, O_2 \in \sigma(X, X^*)$ disjuntos tais que $x \in O_1$, $y \in O_2$.

> **Teorema B2.4 [Existem muitos funcionais]** Seja X um e.v.n. sobre $\mathbb{K}$.
> (c) X^* separa pontos: Se $x \neq y$, existe $f \in X^*$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

- $\exists\ \phi \in X^*$ tal que $\phi(x) \neq \phi(y)$
- $\exists\ U_1, U_2 \subset \mathbb{K}$ abertos disjuntos; $\phi(x) \in U_1$, $\phi(y) \in U_2$ ($\mathbb{K}$ é Hausdorff)

> a saber, basta tomar $U_i = B_\varepsilon(\phi(x_i))$ onde $\varepsilon = |\phi(x_1) - \phi(x_2)|/2$

- $x \in \phi^{-1}(U_1) =: O_1$, $y \in \phi^{-1}(U_2) =: O_2$

> pag. D7: todo $\phi \in X^*$ será ainda contínuo com respeito à topologia fraca

- $O_1, O_2 \in \sigma(X, X^*)$ e $O_1 \cap O_2 = \emptyset$

> $z \in O_1 \cap O_2 \Longrightarrow \phi(z) \in U_1 \cap U_2 \quad \rightarrowtail\!\leftarrowtail$

. . . .

(b) Se $\dim X < \infty$, a top. fraca σ *coincide* com a top. forte τ.

- Eq. (D3.1): $\sigma \subset \tau$

Af. 1. $\tau \subset \sigma$

- $U \in \tau$
- fixe $x_0 \in U$ (U é viz. de x_0 na top. forte)
- $\exists\ r > 0$; $B_r(x_0) \subset U$

Queremos: $U \in \sigma$, **i.e.,** U **viz. de** x_0 **na top. fraca, i.e., devemos encontrar** $\varepsilon > 0, \varphi_1, \ldots, \varphi_? \in X^*$**;**

$$\boxed{V_{\varepsilon,\varphi_1,..,\varphi_?}(x_0)} := \{x \in X : \ |\varphi_i(x - x_0)| < \varepsilon \ \forall i = 1, .., ?\} \boxed{\subset U}$$

Af. 2. $\exists\ \varepsilon > 0, \varphi_1, \ldots, \varphi_? \in X^*$; $\boxed{V_{\varepsilon,\varphi_1,..,\varphi_?}(x_0) \subset B_r(x_0)}$

precisamos encontrar $\varepsilon > 0, \varphi_1, \ldots, \varphi_? \in X^*$;

$$x \in V_{\varepsilon,\varphi_1,..,\varphi_?}(x_0) \Longrightarrow x \in B_r(x_0)$$

$$|\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)| < \varepsilon \ (\varepsilon =?, \varphi_i =?) \Longrightarrow \|x - x_0\| < r$$

- $\{e_1, \ldots, e_m\}$ base normalizada de X (dim $X = m < \infty$)
- cada $x \in X$ é escrito de maneira única

$$x = \sum_{i=1}^{m} a_i(x) e_i, \quad a_i(x) \in \mathbb{K}$$

- $\varphi_i : X \to \mathbb{K} : x \mapsto \varphi_i(x) = a_i(x), \ \ i = 1, \ldots, m$
- $\varphi_i \in X^*, \ \ i = 1, \ldots, m$ [**verifique!**]

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| &= \left\| \sum_{i=1}^{m} (a_i(x) - a_i(x_0)) e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{m} |a_i(x) - a_i(x_0)| \, \|e_i\| \\ &= \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)| < \varepsilon\, m = r \end{aligned}$$

- $x \in V_{\frac{r}{m},\varphi_1,..,\varphi_m}(x_0) \Longrightarrow x \in B_r(x_0)$

. . . .

(c)-(i) Se $\dim X = \infty$, a top. fraca σ é estritamente *menos fina* da top. forte τ:
1. todo aberto de σ contém uma reta,
2. nenhuma bola aberta é um aberto de σ.

$*$ bola aberta não pode ser um aberto na top. fraca pois não contém reta

$\therefore\ \sigma \subsetneq \tau$: bola aberta é conj. aberto na topologia forte e não é na top. fraca

Precisamos mostrar que: todo aberto de σ contém uma reta.

- $U \in \sigma$

> pag. D8: $x \in U \in \sigma(X, X^*) \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0, \phi_1, \ldots, \phi_N \in X^*;\ x \in V_x \subset U$

- fixado $x \in U$, $\exists\ \varepsilon > 0, \phi_1, \ldots, \phi_N \in X^*$;

$$x \in V_{\varepsilon,\phi_1,\ldots,\phi_N}(x) = \{y \in X :\ |\varphi_i(y - x)| < \varepsilon\ \forall i = 1, .., N\} \subset U$$

Basta mostrar: $V_x := V_{\varepsilon,\phi_1,\ldots,\phi_N}(x)$ **contém uma reta, i.e., que para algum** $y \in X \setminus \{0\}$, $x + ty \in V_x$, $\forall t \in \mathbb{R}$

> $$\boxed{x + ty \in V_x} \iff |\varphi_i(x + ty - x)| < \varepsilon \iff |\varphi_i(ty)| < \varepsilon$$
> $$\iff \boxed{|t|\,|\varphi_i(y)| < \varepsilon, \quad \forall i = 1, .., N},$$
>
> $\boxed{\text{que é seguramente verdadeira se } \varphi_i(y) = 0,\ \forall i = 1, .., N}$

Af.1. $\exists\ y \in X \setminus \{0\};\ \varphi_i(y) = 0,\ \forall i = 1, .., N$

- $T : X \to \mathbb{K}^N : x \mapsto T(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_N(x))$
  - T é linear
  - T não é injetora ($N(T) \neq \{0\}$):

    > caso contrário:
    > $T : X \to T(X)$ é isomorfismo e $\dim X = \dim T(X) \leq N$,
    > mas $\dim X = \infty$

$\therefore\ \exists\ y \neq 0;\ 0 = T(y) = (\varphi_1(y), \ldots, \varphi_N(y))$

. . . .

(c)-(ii) Se $\dim X = \infty$, a top. fraca σ *não pode ser metrizada.*

- supor, por contradição, que existe uma métrica d em X que induza σ

  Objetivo: escrever X^* como união enumerável de conjuntos nunca-densos, ou seja, X^* seria de 1a. categoria nele mesmo.

> **Definição.** (pag. A9) Um conjunto $A \subset X$ é dito de primeira Categoria em X se A é união enumerável de conjuntos nunca-densos $F_i \subset X$ $(\overline{F}_i' = \emptyset)$ ★

Mas X^* é Banach, e portanto ele é de 2a. categoria nele mesmo.

> **Teorema [das categorias de Baire] A2.21** Todo espaço métrico completo é de segunda categoria nele mesmo.

- considere a base de vizinhanças de $0 \in X$ composta pelos conjuntos:

$$\Delta_{\frac{1}{k}} := \left\{ x \in X : d(x,0) < \frac{1}{k} \right\}, \quad k \in \mathbb{N}$$

- $\exists\, \varepsilon > 0, \varphi_1^k, \ldots, \varphi_{N(k)}^k \in X^*$; (pois $\Delta_{\frac{1}{k}} \in \sigma$)

$$V_{\varepsilon,\varphi_1^k,\ldots,\varphi_{N(k)}^k}(0) \subset \Delta_{\frac{1}{k}}$$

- dada $\varphi \in X^*$, $\exists\, k \in \mathbb{N}$; (pois $V_{1,\varphi}(0) \in \sigma$)

$$\Delta_{\frac{1}{k}} \subset V_{1,\varphi}(0)$$

- $$\therefore \bigcap_{i=1,..,N(k)} N(\varphi_i^k) \subset V_{\varepsilon,\varphi_1^k,\ldots,\varphi_{N(k)}^k}(0) \subset \Delta_{\frac{1}{k}} \subset V_{1,\varphi}(0) \tag{D3.4}$$

> **Lema D3.5.** Se X é e.v.n e $\phi, \phi_1, .., \phi_n \in \mathcal{L}_?(X,\mathbb{K})$ com
>
> $$\bigcap_{i=1,..,N} N(\phi_i) \subseteq N(\phi),$$
>
> então ϕ é combinação linear dos ϕ_i

Af.1. $\displaystyle\bigcap_{i=1,..,N(k)} N(\varphi_i^k) \subset N(\varphi)$

supor $\boxed{x \in \displaystyle\bigcap_{i=1,..,N(k)} N(\varphi_i^k)}$ e $x \notin N(\varphi)$

$\implies \varphi_i^k(x) = 0, \forall i,$ $\boxed{x \in V_{1,\varphi}(0)}$ e $\varphi(x) = a \neq 0$ (por Eq. D3.4)

$\implies \varphi_i^k(x) = 0, \forall i, \quad |\varphi(x)| = |a| < 1$

mas:
$\varphi_i^k(x) = 0, \forall i \implies \varphi_i^k(\lambda x) = 0, \forall i, \forall \lambda \implies \boxed{\lambda x \in V_{1,\varphi}(0)}, \forall \lambda$
e
$\exists\ \lambda \in \mathbb{K}; |\varphi(\lambda x)| = |\lambda a| > 1 \quad \rightarrowtail\!\leftarrowtail$

- φ é combinação linear de $\varphi_1^k, \ldots, \varphi_{N(k)}^k$ (Lema D3.5)

$$\therefore \varphi \in X^* \implies \varphi \in [\varphi_1^k, \ldots, \varphi_{N(k)}^k]$$

- $\boxed{X^* = \displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [\varphi_1^k, \ldots, \varphi_{N(k)}^k]}$

Af.2. $F_k := [\varphi_1^k, \ldots, \varphi_{N(k)}^k]$ são nunca-densos em X^*, i.e, $\overline{F_k}' = \emptyset$

- F_k é subespaço fechado de X^* (pois $\dim F_k < \infty$)

> **Corolário A5.4** Subespaços de dimensão finita de um e.v.n são fechados.

- F_k é subespaço próprio de X^* (pois $\dim X^* = \infty$)
- $\overline{F_k}' = F_k{}' = \emptyset$

> **Exercício A3.14** Se S é um subespaço próprio de um e.v.n. X, então $S' = \emptyset$.

$\square$

Aula 13

Lema D3.5. *Se X é e.v.n e $\phi, \phi_1, .., \phi_n \in \mathcal{L}_?(X, \mathbb{K})$ com*

$$\bigcap_{i=1,..,N} N(\phi_i) \subseteq N(\phi),$$

então ϕ é combinação linear dos ϕ_i ◁

Demonstração.

$$T : X \to \mathbb{K}^{n+1} : x \mapsto Tx = (\phi_1(x), \dots, \phi_N(x), \phi(x))$$

- $p = (0, \dots, 0, 1) \notin R(T)$ (pela hipótese)
- $R(T)$ s.e.v. fechado de $\mathbb{K}^{N+1}$ (pois tem dim. finita, C. A5.4)
- $\boxed{\exists\ \psi \in (\mathbb{K}^{N+1})^*}$; $\boxed{\psi|_{R(T)} = 0}$ e $\boxed{\psi(p) \neq 0}$ (Teorema B2.4-(a))

> **Teorema [Existem muitos funcionais] B2.4** Seja X um e.v.n sobre $\mathbb{K}$. [a.] Se M é um subespaço fechado de X e $x_0 \in X \setminus M$, então existe $f \in X^*$ tal que $f|_M = 0$, e $\quad f(x_0) = d(x_0, M) = \inf_{m \in M} \|x_0 - m\| > 0$.

$$\boxed{\psi(x) =}\psi(x_1, \dots, x_{N+1}) = \boxed{\sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i x_i}, \quad \text{onde } \lambda_{N+1} = \boxed{\psi(0, \dots, 0, 1) \neq 0}$$

- $x \in X$:

$$\boxed{0 = \psi(Tx)} = \psi(\phi_1(x), \dots, \phi_N(x), \phi(x)) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \phi_i(x) + \lambda_{N+1} \phi(x)$$

$$\therefore \phi(x) = \sum_{i=1}^{N} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}} \right) \phi_i(x), \quad x \in X$$

□

Exercícios

Exercício D3.6. Mostre que

$$\begin{aligned} + :\ X_\sigma \times X_\sigma &\longrightarrow X_\sigma :\ (x,y) \mapsto x+y \\ \cdot :\ \mathbb{K} \times X_\sigma &\longrightarrow X_\sigma :\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x \end{aligned}$$

são contínuas (use as bases de vizinhanças!) ★

Notação de convergência fraca e forte. Escreveremos:

- $\boxed{x_n \rightharpoonup x}$ (x_n conv. fracamente a x) quando a convergência é na top. fraca,
- $\boxed{x_n \to x}$ (x_n conv. fortemente a x) quando a convergência é na top. forte ★

Observação. Como a topologia fraca é de Hausdorff (Proposição D3.4), se uma sequência converge fracamente, então seu limite é único. ★

Proposição D3.7. *Seja $\{x_n\}$ uma sequência em X. Temos que:*

i) $x_n \rightharpoonup x \iff \phi(x_n) \to \phi(x) \quad \forall \quad \phi \in X^*$

ii) $x_n \to x \implies x_n \rightharpoonup x$

iii) $x_n \rightharpoonup x \implies \{\|x_n\|\}$ *é limitada e* $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$

iv) $x_n \rightharpoonup x$ *e* $\phi_n \to \phi$ *em* $X^* \implies \phi_n(x_n) \to \phi(x)$. ◁

Demonstração.

i) $x_n \rightharpoonup x \iff \phi(x_n) \to \phi(x) \quad \forall \quad \phi \in X^*$ é a Proposição D3.2:

> Se $\{x_n\}$ é uma seq. em $(X, \sigma(X, X^*))$, então $x_n \to x \iff \varphi(x_n) \to \varphi(x)$, $\forall \varphi \in X^*$.

....

ii) $x_n \to x \implies x_n \rightharpoonup x$

> $$x_n \to x \implies \phi(x_n) \to \phi(x), \quad \forall \phi \in X^* \overset{i)}{\implies} x_n \rightharpoonup x$$

....

iii) $x_n \rightharpoonup x \implies$ a seq. $\{\|x_n\|\}$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$

Queremos: $\{\|x_n\|\}$ **limitada, i.e.,** $\exists\ c;\ \|x_n\| \leq c, \forall n$**, ou equivalentemente que o conj.** $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ **seja limitado**

> **Corolário B4.3(LU-Banach-Steinhaus).** Se X é um e.v.n. sobre $\mathbb{K}$ e $B \subset X$:
> $\phi(B) = \{\phi(x),\ x \in B\}$ limitado $\forall\ \phi \in X^* \implies B$ limitado.

Af.1. $\phi(B) = \{\phi(x_n),\ n \in \mathbb{N}\}$ é limitado $\forall\ \phi \in X^*$

- $\phi \in X^*$

$$x_n \rightharpoonup x \overset{i)}{\implies} \phi(x_n) \to \phi(x) \implies \{\phi(x_n),\ n \in \mathbb{N}\} \text{ limitado}$$

Af.2. $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$

> **Exercício B2.5.** $\|x\|_X = \max\limits_{\substack{\phi \in X^* \\ \|\phi\|_{X^*}=1}} |\phi(x)|$

- $\phi \in X^*;\ \|\phi\|_{X^*} = 1$
- $\phi(x) = \lim \phi(x_n)$ (por i))
- $|\phi(x_n)| \leq \|\phi\|\,\|x_n\| = \|x_n\|$

$$\begin{aligned} \therefore |\phi(x)| &= \lim |\phi(x_n)| = \liminf |\phi(x_n)| \leq \liminf \|x_n\| \\ &\implies \|x\| \leq \liminf \|x_n\| \end{aligned}$$

....

iv) $x_n \rightharpoonup x$ e $\phi_n \to \phi$ em $X^* \implies \phi_n(x_n) \to \phi(x)$

Af.3. $\forall \varepsilon > 0, \exists\ n_0;\ |\phi_n(x_n) - \phi(x)| < \varepsilon,\ n \geq n_0$

Temos:

- $x_n \rightharpoonup x \overset{i)}{\implies} \phi(x_n) \to \phi(x)$
- $\phi_n \to \phi$ em $X^* \implies \|\phi_n - \phi\| \to 0$

$$\begin{aligned} |\phi_n(x_n) - \phi(x)| &\leq |\phi_n(x_n) - \boxed{\phi(x_n)}| + |\boxed{\phi(x_n)} - \phi(x)| \\ &\leq |(\phi_n - \phi)(x_n)| + |\phi(x_n) - \phi(x)| \\ &\leq \underbrace{\|\phi_n - \phi\|}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \underbrace{\|x_n\|}_{limitado} + \underbrace{|\phi(x_n) - \phi(x)|}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \end{aligned}$$

$\square$

Exercícios

Exercício D3.8. [a] Mostre que, se $p \in (1, \infty)$, a sequência $e_n = (\delta_{i,n})$ converge fracamente mas não fortemente em ℓ_p.
O que pode dizer para os casos $p = 1$ e $p = \infty$?
O que pode dizer da sequência $c_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_i$? ★

[a] a recíproca de Proposição D3.7-ii) não é válida!

Teorema D3.9. *Sejam X e Y e.v.n. e $T \in \mathcal{L}_?(X, Y)$. Então, são equivalentes as continuidades dos operadores*

$$\begin{aligned} &(a) \quad T : X_\tau \to Y_\tau : x \mapsto Tx \\ &(b) \quad T : X_\sigma \to Y_\sigma : x \mapsto Tx \\ &(c) \quad T : X_\tau \to Y_\sigma : x \mapsto Tx \end{aligned}$$

$\triangleleft$

$$\text{a} \Longrightarrow \text{b} \Longrightarrow \text{c} \Longrightarrow \text{a}$$

$$\text{a} \overset{imediata}{\Longrightarrow} \text{c}$$

$$\text{b} \overset{similar\ \ c)\Rightarrow a)}{\Longrightarrow} \text{a}$$

Demonstração. $(a) \implies (b)$

- $T : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ é contínua

  Queremos: $T : (X, \sigma(X, X^*)) \to (Y, \sigma(Y, Y^*))$ **contínua:**

  > **Proposição D3.3.** $\tilde{T} : (Z, \Sigma) \to (Y, \sigma(Y, Y^*))$ **é contínua** $\Leftrightarrow \varphi \circ \tilde{T} : (Z, \Sigma) \to \mathbb{K}$ **é contínua,** $\forall \varphi \in Y^*$**.**

  ou seja, $\varphi \circ T : (X, \sigma(X, X^*)) \to \mathbb{K}$ **contínua** $\forall \varphi \in Y^*$

- $\varphi \circ T : (X, \tau_X) \to \mathbb{K}$ é contínua $\forall \varphi \in Y^*$, i.e., $\boxed{\varphi \circ T \in X^*}$ (top. forte)

$\therefore$ $\varphi \circ T$ é contínua na top. fraca $\sigma(X, X^*)$, $\forall \varphi \in Y^*$ (def. top. fraca)

. . . .

$(b) \implies (c)$

- $T : (X, \sigma(X, X^*)) \to (Y, \sigma(Y, Y^*))$ é contínua

  Queremos: $T : (X, \tau_X) \to (Y, \sigma(Y, Y^*))$ **contínua:**

  > **Proposição D3.3.** $\tilde{T} : (Z, \Sigma) \to (Y, \sigma(Y, Y^*))$ **é contínua** $\Leftrightarrow \varphi \circ \tilde{T} : (Z, \Sigma) \to \mathbb{K}$ **é contínua,** $\forall \varphi \in Y^*$**.**

  ou seja, $\boxed{\varphi \circ T : (X, \tau_X) \to \mathbb{K} \textbf{ contínua}}$ $\forall \varphi \in Y^*$

- dada $\boxed{\varphi \in Y^*}$
- $\varphi : (Y, \sigma(Y, Y^*)) \to \mathbb{K}$ é contínua (def. top. fraca)
- $\boxed{\varphi \circ T : (X, \sigma(X, X^*)) \to \mathbb{K} \text{ contínua}}$

  > $(X, \sigma(X, X^*))^* = X^*$ (D3.2)

. . . .

$(c) \implies (a)$

- $T : (X, \tau_X) \to (Y, \sigma(Y, Y^*))$ é contínua
- $\varphi \circ T : (X, \tau_X) \to \mathbb{K}$ é contínua, $\forall \varphi \in Y^*$

> **Proposição D3.3.** $\tilde{T} : (Z, \Sigma) \to (Y, \sigma(Y, Y^*))$ é contínua $\iff \varphi \circ \tilde{T} : (Z, \Sigma) \to \mathbb{K}$ é contínua, $\forall \varphi \in Y^*$.

Queremos: $T : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ **contínua**

Af.1. T é limitado, i.e., $\|Tx\| \leq c$, $\forall\, x \in X$, $\|x\| \leq 1$

> **Corolário B4.3(LU-BS).** Se Y é um e.v.n. sobre $\mathbb{K}$ e $B \subset Y$:
> $\phi(B) = \{\phi(x),\ x \in B\}$ limitado $\forall\ \phi \in Y^* \implies B$ limitado.

- $B := \{Tx : x \in X, \|x\| \leq 1\} \subset Y$

Queremos: B **limitado, pois daí** $\exists\ c; \|b\| \leq, \forall b \in B$

Basta mostrar: $\varphi(B)$ **é limitado,** $\forall \varphi \in Y^*$

> $\varphi(B) = \{\varphi(Tx) : x \in X, \|x\| \leq 1\}$ é limitado, $\forall \varphi \in Y^*$
>
> $\iff \|(\varphi \circ T)(x)\| \leq c$, $\forall\, x \in X$, $\|x\| \leq 1$, , $\forall \varphi \in Y^*$
>
> $\iff \varphi \circ T : (X, \tau_X) \to \mathbb{K}$ é limitada, $\forall \varphi \in Y^*$
>
> $\iff \varphi \circ T : (X, \tau_X) \to \mathbb{K}$ é contínua, $\forall \varphi \in Y^*$

$\square$

D3.1 Convexos na topologia fraca

- X é um e.v.n. de dimensão finita e $C \subseteq X$:
  C é aberto/fechado em $\sigma(X, X^*) \iff C$ é aberto/fechado em τ_X
- X é um e.v.n. de dimensão infinita:
  C é aberto/fechado em $\sigma(X, X^*) \implies C$ é aberto/fechado em τ_X
  - bola aberta (é convexo)
    - é conj. aberto na topologia forte
    - não é conj. aberto na topologia fraca (Proposição D3.4)
  - complementar da bola aberta (não é convexo)
    - é conj. fechado na topologia forte
    - não é conj. fechado na topologia fraca
  - bola fechada (é convexo)
    - é conj. fechado na topologia forte
    - é conj. fechado na topologia fraca (Teorema D3.10)
  - esfera (não é convexo)
    - é conj. fechado na topologia forte
    - não é conj. fechado na topologia fraca (Corolário D3.11)

C **convexo**:

C é ~~aberto~~/fechado em $\sigma(X, X^*) \impliedby C$ é ~~aberto~~/fechado em τ_X

Teorema D3.10 [Mazur]. *Se X é um e.v.n. sobre $\mathbb{K}$ e $C \subseteq X$ é convexo, são equivalentes:*

a) *C fechado na topologia forte*
b) *C fechado na topologia fraca*
c) *C coincide com a interseção de todos os semiespaços fechados que o contêm.*

$\triangleleft$

Demonstração.

b) $\implies$ *a)* como $\sigma(X, X^*) \subset \tau_X$:

C fech. na top.a fraca $\Rightarrow C^c$ ab. na top. fraca $\Rightarrow C^c$ ab. na top. forte $\Rightarrow C$ fech. na top. forte

$a) \Longrightarrow b)$ Caso 1: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

- C convexo é fechado em τ_X

Queremos: $X \setminus C$ **é aberto em** $\sigma(X, X^*)$

- $x_0 \in X \setminus C$

Af.1. $\exists\ V \in \sigma(X, X^*)$; $x_0 \in V$ e $V \subset X \setminus C$, i.e., $V \cap C = \emptyset$

> $$V \in \sigma(X, X^*) \Longleftrightarrow V = \bigcap_{\substack{finita \\ \varphi \in X^*}} \varphi^{-1}(O_i), \quad O_i \underset{aberto}{\subset} \mathbb{R}$$
>
> **Teorema B3.4 [Hahn-Banach - Forma Geométrica 2]** Sejam X um e.v.n. real e $C, B \subseteq X$ conjuntos convexos, não vazios e disjuntos. Se C é fechado e B é compacto, então existe um hiperplano fechado que separa C e B no sentido forte: $\exists\ \varphi \in X^*; \varphi|_B \geq \alpha + \epsilon > \alpha > \alpha - \epsilon \geq \varphi|_C$.

- $B = \{x_0\}$ é convexo, compacto e $B \cap C = \emptyset$
- $\exists\ \varphi \in X^*$; $\varphi(x_0) > \alpha$ $> \varphi(x),\ x \in C$

> $$\varphi(x_0) \in (\alpha, \infty) \Longrightarrow x_0 \in \varphi^{-1}((\alpha, \infty))$$

- $V := \varphi^{-1}((\alpha, \infty))$ [4]

> $V \in \sigma(X, X^*)$ pois (α, ∞) é um aberto em $\mathbb{R}$
> $x_0 \in V$
> $V \cap C = \emptyset$ pois caso contrário $\varphi(x) > \alpha$ para algum $x \in C$

[4]este é de fato o semiespaço $\{x \in X : \varphi(x) > \alpha\}$
ainda C não intercepta tal semiespaço, de fato, $C \subset \varphi^{-1}((-\infty, \alpha))$

$b) \Longrightarrow a)$ Caso 2: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

- C convexo é fechado em τ_X

Queremos: C **é fechado na** $\sigma(X, X^*)$**:** $\overline{C}^{\sigma(X,X^*)} = C$

> Seção B2.2: X e.v.(n.) sobre $\mathbb{C}$, $\boxed{X_{\mathbb{R}}}$ e.v.(n.) sobre $\mathbb{R}$ obtido de X limitando a multiplicação aos escalares reais.

- $\overline{C}^{\sigma(X_{\mathbb{R}},X_{\mathbb{R}}^*)} = C$ (Caso 1)

  Basta mostrar: $\overline{C}^{\sigma(X,X^*)} = \overline{C}^{\sigma(X_{\mathbb{R}},X_{\mathbb{R}}^*)}$

  $\supset$

- $\overline{C}^{\sigma(X_{\mathbb{R}},X_{\mathbb{R}}^*)} = C \subset \overline{C}^{\sigma(X,X^*)}$

  $\subset$

- $x_0 \in \overline{C}^{\sigma(X,X^*)}$:

  $\therefore$ todo $V \in \sigma(X, X^*)$ tal que $x_0 \in V$, temos $V \cap C \neq \emptyset$, em particular, para todo $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$ e $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X^*$ temos $V_{\varepsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x_0) \cap C \neq \emptyset$

Queremos: todo $V \in \sigma(X_{\mathbb{R}}, X_{\mathbb{R}}^*)$ **tal que** $x_0 \in V$**, temos** $V \cap C \neq \emptyset$**, basta: para todo** $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$ **e** $\psi_1, \ldots, \psi_n \in X_{\mathbb{R}}^*$ **temos** $V_{\varepsilon,\psi_1,\ldots,\psi_n}(x_0) \cap C \neq \emptyset$

- $\varepsilon > 0$ e $\psi_1, \ldots, \psi_n \in X_{\mathbb{R}}^*$

> Seção B2.2: $\phi \in L(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}) \Longrightarrow f(x) := \phi(x) - i\phi(ix) \in L(X, \mathbb{C})$

- $\varphi_j(x) := \psi_j(x) - i\psi_j(ix)$, $x \in X$, $j = 1, \ldots, n$
- $\varphi_j \in X^*$, $j = 1, \ldots, n$
- $\exists\, \overline{x} \in V_{\varepsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x_0) \cap C$

Af.1. $\overline{x} \in V_{\varepsilon,\psi_1,\ldots,\psi_n}(x_0)$, i.e, $|\psi_j(\overline{x} - x_0)| < \varepsilon$, $\forall j = 1, \ldots, n$

$$|\psi_j(\overline{x} - x_0)| = |\Re e(\varphi_j)(\overline{x} - x_0)| \leq |\varphi_j(\overline{x} - x_0)| < \epsilon \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

. . . .

$C \subset X$ convexo é fechado $\iff$ C coincide com a interseção de todos os semiespaços fechados que o contêm: $C = \bigcap_{\substack{H \text{ semiesp.fech.} \\ C\subset H}} H$

$(\Longleftarrow)$

intersecção qualquer de fechado é fechado[Loi75, p. 24]

$(\Longrightarrow)$

- $C \subset \bigcap_{\substack{H \text{ semiesp.fech.} \\ C\subset H}} H$ ok!

Af.1. $\bigcap_{\substack{H \text{ semiesp.fech.} \\ C\subset H}} H \subset C$, i.e., $C^c \subset \left(\bigcap_{\substack{H \text{ semiesp.fech.} \\ C\subset H}} H\right)^c$

- $x_0 \in X \setminus C$

Caso 1: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

> $f \in X^*$, $[f = \alpha] := \{x \in X : f(x) = \alpha\} = f^{-1}(\alpha)$: hiperplano fechado
>
> $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} = f^{-1}([\alpha, \infty))$: um semiespaço fechado determinado por $[f = \alpha]$

- $\exists\, \varphi \in X^*$; $C \subset \varphi^{-1}((-\infty, \alpha]) =: W$ (pag. D23)

> $a) \Longrightarrow b)$ Caso 1: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
>
> - $B = \{x_0\}$ é convexo, compacto e $B \cap C = \emptyset$
> - $\exists\, \varphi \in X^*$; $\varphi(x_0) > \boxed{\alpha > \varphi(x),\ x \in C}$
>
> > $\varphi(x) \in (-\infty, \alpha) \subset (-\infty, \alpha] \Longrightarrow x \in \varphi^{-1}((-\infty, \alpha])$, $\quad x \in C$

- $x_0 \notin W$
- W é um semiespaço fechado

  $\therefore x_0 \notin \bigcap_{\substack{H \text{ semiesp.fech.} \\ C\subset H}} H$

Caso 2: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

> $f \in X^* \implies \Re e(f), \Im_m(f) \in (X_{\mathbb{R}})^*$ e os semiespaços em X são definidos através dos funcionais reais, por exemplo:
> $\{x \in X : \Re e(f)(x) \geq \alpha\}$: é um semiespaço fechado

- $\exists\ \varphi \in (X_{\mathbb{R}})^*$; $C \subset \varphi^{-1}((-\infty, \alpha])$, $x_0 \notin \varphi^{-1}((-\infty, \alpha])$ (Caso 1)
- $\psi(x) := \varphi(x) - i\varphi(ix)$, $x \in X$
- $C \subset \{x \in X : \Re e(\psi)(x) = \varphi(x) \geq \alpha\}$ e $x_0 \notin \{x \in X : \Re e(\psi)(x) \geq \alpha\}$

$$\therefore x_0 \notin \bigcap_{\substack{H \text{ semiesp.fech.} \\ C \subset H}} H$$

$\square$

Corolário D3.11. *Se X tem dimensão infinta, então*

$$\overline{S^X}^{\sigma(X,X^*)} = \overline{B^X}^{\tau}$$

e logo S^X não é fechado na topologia fraca. $\triangleleft$

Demonstração.

$\subset$

- $S^X \subset \overline{B^{X_\tau}}$

$$\overline{S^X}^{\sigma(X,X^*)} \subset \overline{B^{X_\tau}}^{\sigma(X,X^*)} \underset{convexo}{\overset{bola\,fech.}{=}} \overline{B^X}^{\tau}$$

$\supset$

- $x \in \overline{B^X}^{\tau}$
- $\|x\| = 1 \implies x \in S^X \subset \overline{S^X}^{\sigma(X,X^*)}$
- $\|x\| < 1$:

Queremos: $x \in \overline{S^X}^{\sigma(X,X^*)}$**, i.e,**
para todo $V \in \sigma(X, X^*)$; $x \in V$ **temos** $V \cap S^X \neq \emptyset$

- $V \in \sigma(X, X^*)$ com $x \in V$

> Proposição D3.4 Se X tem dimensão infinita, $\sigma = \sigma(X, X^*)$ é estritamente *menos fina* da topologia forte τ: [1.] todo aberto de σ contém uma reta,

- $\exists\ y \in X;\ x + ty \in V,\ \forall t \in \mathbb{R}$ (ver Af.1,p.D13)

Basta mostrar: $\exists\ \bar{t} \in \mathbb{R}; x + \bar{t}y \in S^X$

$$x + ty \in S^X \iff \|x + ty\| = 1$$

$$g : [0, \infty) \to [0, \infty) : t \mapsto g(t) = \|x + ty\| \quad \text{é tal que:}$$

- g é contínua
- $g(0) = \|x\| < 1$
- $\lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$ pois $g(t) \geq |t|\,\|y\| - \|x\|$

$$\therefore \exists\ \bar{t} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; g(t) = 1 \qquad (TVI)$$

□

Aula 14

Definição D3.12. Dado um conjunto $A \subseteq X$, definimos a **envoltória convexa**, ou o **convexificado** de A, denotado por $co(A)$, como sendo o menor convexo de X que contém A:

$$\boxed{\text{co(A)}} = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i a_i :\ N \in \mathbb{N},\ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0,\ a_i \in A \right\} \qquad \bigstar$$

As combinações do tipo do conjunto acima são chamadas **combinações lineares convexas** de elementos de A.

Corolário D3.13. *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em um e.v.n.* X*, então existe uma sequência de combinações lineares convexas dos* x_n *que converge fortemente para* x*.* $\lhd$

Demonstração.

Queremos: $\exists\ \{z_m\} \subset co(\{x_n\})$ **tal que** $z_m \to x_m$

- $x_n \rightharpoonup x$, i.e.,

$$\forall\ V \in \sigma(X, X^*),\ x \in V, \exists\ n_0; \quad x_n \in V,\ n \geq n_0$$

- $\forall\ V \in \sigma(X, X^*),\ x \in V, \exists\ x_k \in V \cap \{\{x_n\}\}$, i.e.,

$$x \in \overline{\{x_n\}}^{\sigma(X,X^*)}$$

- $\{x_n\} \subset co(\{x_n\})$ e $co(\{x_n\})$ é convexo:

$$x \in \overline{\{x_n\}}^{\sigma(X,X^*)} \subset \overline{co(\{x_n\})}^{\sigma(X,X^*)} \underset{Mazur}{\overset{T.D3.10}{=}} \overline{co(\{x_n\})}^{\tau_X}$$

$$\therefore \forall\ V \in \tau_X,\ x \in V, \exists\ z \in V \cap co(\{x_n\})$$

- $\forall m \in \mathbb{N}, \exists\ z_m \in B_{\frac{1}{m}}(x) \cap co(\{x_n\})$

$$\|z_m - x\| < \frac{1}{m} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \therefore\ z_m \to x$$

$\square$

D4 Topologias em X^*

Três topologias em X^*

- topologia forte, τ_{X^*}: induzida pela norma de X^*

> topologia fraca em X e.v.n. é a topologia menos fina que τ_X, a qual é a induzida pela família $\mathcal{F} = \{g\}_{g \in X^*}$
>
> $$\sigma(X, X^*) \text{ é a topologia em } X \text{ induzida por } X^*,$$
>
> e que preserva a continuidade de $g \in X^*$

- topologia fraca: a topologia menos fina que τ_{X^*}, a qual é a induzida pela família $\mathcal{F} = \{g\}_{g \in (\mathbf{X}^*)^*}$

$$\text{“}\sigma(X^*, (X^*)^*)\text{” é a topologia em } X^* \text{ induzida por } (X^*)^*,$$

e que preserva a continuidade de $g \in (X^*)^*$

$$(\mathbf{X}^*)^* = ??$$

- topologia fraca*: a topologia menos fina que $\sigma(X^*, (X^*)^*)$, a qual será a top. induzida por família de funções $\mathcal{F} = \{g_i\}_{g_i \in ??}$

$$\text{“}\sigma(X^*, ?)\text{” é a topologia em } X^* \text{ induzida por “?”},$$

D4.1 Bidual

Seja X um e.v.n. sobre $\mathbb{K}$, o

- dual de X é o e.v.n.:

$$X^* = L(X, \mathbb{K}), \quad \text{com } \|f\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} |f(x)|$$

- **bidual** de X é o dual de X^* que é o e.v.n. dado por

$$X^{**} = (X^*)^* = L(X^*, \mathbb{K}) = \{\underline{\Phi : X^* \to \mathbb{K} : \Phi \text{ é linear e limitada}}\},$$

com

$$\|\Phi\|_{X^{**}} = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|_{X^*} \leq 1}} |\Phi(f)|.$$

Dado $x \in X$ defina $\hat{x} : X^* \to \mathbb{K}$ por

$$\hat{x}(f) = f(x), \quad \forall f \in X^*. \tag{D4.1}$$

- $\hat{x}$ é linear
- $\hat{x}$ é limitada

$$\|\hat{x}\|_{X^{**}} = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|_{X^*} \leq 1}} |\hat{x}(f)| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|_{X^*} \leq 1}} |f(x)| \overset{Ex.B2.5}{=} \|x\|_X$$

- para cada $x \in X$, existe uma única correspondente função $\hat{x}$ linear limitada em X^{**} na forma (D4.1)

Portanto,

$$\underline{\hat{x} \in X^{**}}$$

e a função $J : X \to X^{**} : x \mapsto J(x) = \hat{x}$ está bem definida.

Teorema D4.1 [Mergulho canônico]. *Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$. Então a aplicação*

$$J : X \to X^{**} : x \mapsto J(x) = \hat{x}$$

é um mergulho isométrico de X em X^{**}, i.e., é um isomorfismo isométrico de X em $J(X)$. J é dito **mergulho canônico** *de X em X^{**}.* ◁

- J é linear

$$J(x+ky)(f) = \widehat{x+ky}(f) = f(x+ky) = f(x)+kf(y) = \hat{x}+k\hat{y}, \forall f \in X^{**}$$

- J é injetora

$$J(x) = J(y) \implies f(x-y) = 0, \forall f \in X^{*} \implies x = y$$

> **Teorema [Existem muitos funcionais] B2.4.** X e.v.n. [c.]
> X^* separa pontos: Se $x \neq y$, existe $f \in X^*$ tal que $f(x) \neq f(y)$

- $\|Jx\|_{X^{**}} = \|\hat{x}\|_{X^{**}} = \|x\|_X$
- J é limitada:

$$\|J\|_{L(X,X^{**})} = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|\leq 1}} \|Jx\| \leq 1$$

Definição. Um e.v.n X é dito **reflexivo** se $J(X) = X^{**}$. ★

Proposição D4.2. *Se X é reflexivo então*

- *X é Banach*
- $\|f\|_{X^*} = \max\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} |f(x)|$ ◁

Demonstração. Exercício. □

D4.2 Topologias Fraca e Fraca*

Definição D4.3 (Topologia fraca*)**.** Seja X^* o dual de um e.v.n. X. Denotamos por:
$\boxed{\tau = \tau_{X^*}}$ sua **topologia forte** (a induzida pela norma)
e por:
$\boxed{\sigma = \sigma(X^*, X^{**})}$ a **topologia fraca** (a induzida pela família $\mathcal{F} = \{\Phi\}_{\Phi \in X^{**}}$).

Definimos[5] a **topologia fraca***, denotada por $\boxed{\sigma^* = \sigma(X^*, X)}$ [6], como sendo a topologia gerada pela família

$$\mathcal{F} = \left\{(Jx)^{-1}(A) : \ x \in X, \ A \subseteq \mathbb{K} \text{ aberto}\right\} \subset X^*,$$

ou seja, a topologia induzida pela família $\mathcal{F} = J(X) = \{Jx\}_{x \in X}$. ★

Desta forma todo $\Phi \in J(X)$ será ainda contínuo com respeito à topologia fraca*.
Analogamente *toda mapa $\phi \in X^* \mapsto \phi(x)$ (avaliação em $x \in X$ fixado) será contínua com respeito à topologia fraca**.

$$\begin{aligned}
J : X &\longrightarrow \quad X^{**} \\
x &\longmapsto J(x) = \Phi : \quad X^* \to \mathbb{K} \\
&\qquad\qquad\qquad \phi \longmapsto \quad \Phi(\phi) = (Jx)(\phi) = \phi(x)
\end{aligned}$$

A top. fraca* é a menos fina que preserva a continuidade dos $\Phi \in J(X)$

$$\sigma^* = \sigma(X^*, X) \subseteq \sigma = \sigma(X^*, X^{**}) \subseteq \tau_{X^*} \tag{D4.2}$$

$\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$ **se só se X é reflexivo.** Proposição D4.4

[5] Denotaremos aqui, quando não der confusão, $X^*_\tau = (X^*, \tau)$, $X^*_\sigma = (X^*, \sigma(X^*, X^{**}))$, $X^*_{\sigma^*} = (X^*, \sigma(X^*, X))$.
[6] pode haver um abuso de notação/linguagem: uma notação mais rigorosa poderia ser $\sigma(X^*, J(X))$

Pela definição (veja Eq. (D2.3)), uma base de vizinhanças para $\phi \in X^*$ é composta pelos conjuntos da forma

$$\bigcap_{i\in I}(Jx)^{-1}(O_i) : O_i \subset \mathbb{K} \text{ vizinhança de } (Jx)(\phi) = \phi(x) \text{ em } \mathbb{K},\ I \text{ finito.}$$

. . . .

Uma outra **base de vizinhanças para $\phi \in X^*$** é composta pelos conjuntos da forma

$$V_{\varepsilon,x_1,..,x_N}(\phi) := \{f \in X^* :\ |f(x_i) - \phi(x_i)| < \varepsilon\ \forall i = 1,..,N\} \tag{D4.3}$$

onde $\varepsilon > 0$ e $x_i \in X$ para um número finito de $i = 1,..,N$:

$$\boxed{V_{\varepsilon,x_1,..,x_N}(\phi) = \bigcap_{i=1}^{N}(Jx_i)^{-1}(\underbrace{B_\varepsilon(\phi(x_i))}_{aberto\ \mathbb{K}})}$$

> $$V_{\varepsilon,\phi_1,..,\phi_N}(x) := \{y \in X :\ |\phi_i(y) - \phi_i(x)| < \varepsilon\ \forall i = 1,..,N\} \overset{pag. D8}{=} \bigcap_{i=1}^{N} \phi_i^{-1}(\underbrace{B_\varepsilon(\phi_i(x))}_{aberto\ \mathbb{K}})$$
>
> onde $\varepsilon > 0$ e $\phi_i \in X^*$ para um número finito de $i = 1,..,N$.

Proposição D4.4. *A topologia fraca** $\sigma^* = \sigma(X^*, X)$

(a) é Hausdorff,

(b) se X^* tem dimensão finita, coincide com τ_{X^*} e com $\sigma(X^*, X^{**})$.

se X^* tem dimensão infinita,

(c) e X é reflexivo, coincide com $\sigma(X^*, X^{**})$ e logo não pode ser metrizada

(d) e X não é reflexivo

1. *é estritamente menos fina da topologia fraca $\sigma(X^*, X^{**})$.* *Em particular $[\Phi = 0]$ é um (convexo) não fechado sempre que $\Phi \notin J(X)$.*
2. *não pode ser metrizada* ◁

(a) A topologia fraca* $\sigma^* = \sigma(X^*, X)$ é Hausdorff.
Exercício!

. . . .

(b) Se $\dim X^* < \infty$, então $\sigma(X^*, X) = \tau_{X^*} \overset{P.D3.4}{=} \sigma(X^*, X^{**})$.

- Eq. (D4.2): $\sigma^* \subset \tau_{X^*}$

Af. 1. $\tau_{X^*} \subset \sigma^*$

- $U \in \tau_{X^*}$
- fixe $\phi \in U$ (U é viz. de ϕ na top. forte)
- $\exists\, r > 0$; $\boxed{B_r^{X^*}(\phi) \subset U}$

Queremos: U viz. de ϕ na top. fraca*, i.e., devemos encontrar $\varepsilon > 0, x_1, \ldots, x_? \in X$;

$$\boxed{V_{\varepsilon, x_1, \ldots, x_?}(\phi)} := \{f \in X^* : \ |(f - \phi)(x_i)| < \varepsilon \ \forall i = 1, .., ?\} \boxed{\subset U}$$

Af. 2. $\exists\, \varepsilon > 0, x_1, \ldots, x_? \in X$; $\boxed{V_{\varepsilon, x_1, \ldots, x_?}(\phi) \subset B_r^{X^*}(\phi)}$

precisamos encontrar $\varepsilon > 0, x_1, \ldots, x_? \in X$;

$$f \in V_{\varepsilon, x_1, \ldots, x_?}(\phi) \implies f \in B_r^{X^*}(\phi)$$

$$|(f - \phi)(x_i)| < \varepsilon \ (\varepsilon = ?, x_i = ?) \forall i \implies \|f - \phi\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \le 1}} |(f - \phi)(x)| < r$$

- $\{e_1, \ldots, e_m\}$ base de X ($\dim X = m < \infty$)
- cada $x \in X$ é escrito de maneira única
$$x = \textstyle\sum_{i=1}^m a_i(x) e_i, \quad a_i(x) \in \mathbb{K}$$
- $\varphi_i : X \to \mathbb{K} : x \mapsto \varphi_i(x) = a_i(x), \ \ i = 1, \ldots, m$
- $\varphi_i \in X^*, \ \ i = 1, \ldots, m$ é tal que $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$ **[base dual]** :

$$\boxed{x = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) e_i}$$

$$\begin{aligned}
|(f-\phi)(x)| &= \left|\sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x)(f-\phi)(e_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(x)|\,|(f-\phi)(e_i)| \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(x)|\right) \max_{1\leq i\leq n} |(f-\phi)(e_i)| \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{m} \|\varphi_i\|\;\|x\|\right) \max_{1\leq i\leq n} |(f-\phi)(e_i)| \\
&= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} \|\varphi_i\|\right)}_{C=const.\neq 0} \left(\max_{1\leq i\leq n} |(f-\phi)(e_i)|\right) \|x\|
\end{aligned}$$

$$f \in V_{\varepsilon,x_1,\dots,x_?}(\phi) \implies f \in B_r^{X^*}(\phi)$$

$$|(f-\phi)(x_i)| < \varepsilon \;(\varepsilon = ?, x_i = e_i) \forall i \implies \|f-\phi\|_{X^*} = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X\leq 1}} |(f-\phi)(x)| < r$$

$\therefore$

$$\|f-\phi\|_{X^*} = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X\leq 1}} |(f-\phi)(x)| \leq C \max_{1\leq i\leq n} |(f-\phi)(e_i)| < C\varepsilon = r$$

- $f \in V_{\frac{r}{C},e_1,..,e_m}(\phi) \implies f \in B_r(\phi)_{X^*}$

. . . .

(c) Se X é reflexivo, a topologia fraca* $\sigma^* = \sigma(X^*, X)$ coincide com $\sigma = \sigma(X^*, X^{**})$.

- $J(X) = X^{**}$ (X é reflexivo)
- $\sigma^* = \sigma(X^*, X)$ é a top. induzida pela família $\mathcal{F} = J(X) = \{Jx\}_{x\in X}$
- $\sigma = \sigma(X^*, X^{**})$ é a top. induzida pela família $\mathcal{F} = \{\Phi\}_{\Phi\in X^{**}}$

> $$\begin{aligned} J : X &\longrightarrow X^{**} \\ x &\longmapsto J(x) = \Phi : \quad X^* \to \mathbb{K} \\ &\qquad\qquad \phi \longmapsto \Phi(\phi) = \phi(x) \end{aligned}$$

. . . .

(d)-1. Se X não é reflexivo, a topologia fraca* $\sigma^* = \sigma(X^*, X)$ é estritamente menos fina da topologia fraca $\sigma = \sigma(X^*, X^{**})$.

- o mergulho canônico J não é sobrejetor (X não é reflexivo)
- existe $T \in X^{**} \setminus J(X)$
- T é contínua na top. fraca $\sigma = \sigma(X^*, X^{**})$ (def. top. fraca)

$$\therefore\ T^{-1}(O) \in \sigma, \quad \forall O \underset{ab}{\subset} \mathbb{K}$$

Af. T não é contínua na top. fraca* $\sigma^* = \sigma(X^*, X)$

$$\therefore\ T^{-1}(O) \notin \sigma^*, \quad \text{para algum } O \underset{ab}{\subset} \mathbb{K}$$

> **Lema D4.5.** Seja X um e.v.n. sobre $\mathbb{K}$. Se a função $T : (X^*, \sigma^*) \to \mathbb{K}$ é linear e contínua, então $T \in J(X)$: existe $x \in X$ tal que $T = Jx$, i.e,
>
> $$T(\phi) = \phi(x), \quad \forall \phi \in X^*.$$

De fato, as provas acima fornecem que: X é reflexivo $\iff \sigma^* = \sigma$.

Em particular $[\Phi = 0]$ é um (convexo) não fechado sempre que $\Phi \notin J(X)$. Exercício.[Bre11, Corollary 3.15, p. 65]

(d)-2. Se X não é reflexivo, a topologia fraca* $\sigma(X^*, X)$ não pode ser metrizada
Exercício.

Lema D4.5. *Seja X um e.v.n. sobre $\mathbb{K}$. Se a função $T : (X^*, \sigma^*) \to \mathbb{K}$ é linear e contínua, então $T \in J(X)$: existe $x \in X$ tal que $T = Jx$, i.e,*

$$T(\phi) = \phi(x), \quad \forall \phi \in X^*.$$

$\lhd$

Demonstração.

- $V := T^{-1}(B_1^{\mathbb{K}}(0)) \in \sigma^*$
- $\phi = \mathbf{0} \in V$
- $\exists\ \varepsilon > 0, x_1, \ldots, x_n \in X$;

$$V_{\varepsilon, x_1, \ldots, x_n}(\mathbf{0}) = \{f \in X^*;\ |f(x_i)| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\} \subset V$$

- $\Phi_i := Jx_i : X^* \to \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, n$ são lineares

> **Lema D3.5.** Se X é e.v.n e $\phi, \phi_1, .., \phi_n \in \mathcal{L}_?(X, \mathbb{K})$ com
>
> $$\bigcap_{i=1,..,N} N(\phi_i) \subseteq N(\phi),$$
>
> então ϕ é combinação linear dos ϕ_i

$$\begin{aligned} J : X &\longrightarrow X^{**} \\ x &\longmapsto J(x) = \Phi : \quad X^* \to \mathbb{K} \\ &\qquad\qquad\qquad \phi \longmapsto \Phi(\phi) = \phi(x) \end{aligned}$$

Af.1. Basta mostrar que $\bigcap_{i=1,..,N} N(\Phi_i) \subseteq N(T)$ **pois daí teremos:**

> existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tais que:
>
> $$T = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Phi_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i J x_i = J\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = Jx,$$
>
> onde $x := \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in X$

- $\boxed{f \in \bigcap_{i=1,..,N} N(\Phi_i)}$
- $$0 = \alpha\Phi_i(f) = \alpha J x_i(f) = \alpha f(x_i), \ \forall i = 1, \ldots, n, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

$$\implies \alpha f \in V_{\varepsilon, x_1, \ldots, x_n}(\mathbf{0}) \subset V = T^{-1}(B_1^{\mathbb{K}}(0)), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

$$\implies T(\alpha f) \in B_1^{\mathbb{K}}(0), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

$$\implies |\alpha|\,|Tf| \ = \ |T(\alpha f)| < 1, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

$\therefore Tf = 0$, i.e., $\boxed{f \in N(T)}$

□

Observação. Como a topologia fraca* é de Hausdorff (Proposição D4.4), se uma sequência em X^* converge na top. fraca*, então seu limite é único. ★

Notação D4.6. Escreveremos $\boxed{f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f}$ (f_n converge fraco-estrela a f) quando a convergência é na topologia fraca* ★

Proposição D4.7. *Seja $\{f_n\}$ uma sequência em X^*. Temos que*

i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \iff f_n(x) \to f(x), \quad \forall x \in X.$
ii) Se $\|f_n - f\|_{X^*} \to 0$, *então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *e se* $f_n \rightharpoonup f$, *então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.
iii) Se X é Banach e $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, *então* $\{\|f_n\|\}$ *é limitada e* $\|f\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|$.
iv) Se X é Banach e $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *e* $x_n \to x$, *então* $f_n(x_n) \to f(x)$. [7]

◁

[7] **Corolário B4.4 (LU-B-S).** X Banach e $\mathcal{B} \subset X^*$. Se $\{\phi(x),\ \phi \in \mathcal{B}\}$ é ltdo $\forall\ x \in X \Rightarrow \mathcal{B}$ ltdo.

Exercícios

Exercício D4.8. Prove a Proposição acima ★

Exercício D4.9. Mostre que a sequência $t_n = Tr^n(\mathbf{1}) = (1, .., 1, .0...)$ em l_∞ não converge forte, converge fraco-estrela a $\mathbf{1}$ (e não converge fraco). ★

D5 Compacidade e Teorema de Banach-Alaoglu

Bola Fechada no dual de X é compacta?

- na topologia forte τ_{X^*} não é compacta quando o espaço tem dimensão infinita (**Teorema de Riesz** A5.7):

$$\overline{B_1^{X^*}(0)} \text{ compacta } \Rightarrow \dim X^* < \infty \Rightarrow \dim X < \infty$$

- na topologia fraca* $\sigma(X^*, X)$ é compacta: **Teorema de Banach-Alaoglu** D5.2

- na topologia fraca $\sigma(X^*, X^{**})$ é compacta? **Spoiler: Teorema de Kakutani** E1.8: quando X for reflexivo

Exercícios

Exercício D5.1. Mostre que em espaços topológicos

(a) se f é contínua e K é compacto então $f(K)$ é compacto

(b) K compacto implica K fechado
(precisa Hausdorff: tome um ponto p no complementar e mostre que é interior construindo duas famílias de abertos $A_x \cap B_x = \emptyset$ com $\{A_x\}_{x\in K}$ que cobre K e $p \in B_x$ $\forall x \in K$ ...)

(c) se $F \subseteq K$ com F fechado e K compacto então F é compacto
(adicionando F^c uma cobertura aberta de F cobre K ...)

★

O resultado mais importante, e principal motivação para a introdução das topologias fracas é o seguinte:

Teorema D5.2 [Banach-Alaoglu]. *Seja X um e.v.n. A bola fechada $\overline{B^{X^*}} = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$ é compacta na topologia fraca* $\sigma(X^*, X)$.* ◁

A sua prova depende do Teorema de Tychonoff

Espaço e topologia produtos, Teorema de Tychonoff

- Dada uma família de conjuntos $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$, o **produto cartesiano** da família é o conjunto

$$P = \boxed{\prod_{\alpha\in A} X_\alpha} := \{f : A \to \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha : f(\alpha) \in X_\alpha, \quad \forall \alpha \in A\}$$
$$= \{x = (x_\alpha)_{\alpha\in A} : \; x_\alpha \in X_\alpha, \quad \forall \alpha \in A\}.$$

  Denotaremos este conjunto por X^A quando todos os conjuntos X_α são cópias de X, em particular,

$$\mathbb{K}^X = \{f : X \to \mathbb{K} : f(x) \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in X\} = \{y = (y_x)_{x\in X} : \; y_x \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in X\}.$$

- Sejam $\boxed{\pi_\beta} : \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\beta : x = (x_\alpha)_{\alpha\in A} \mapsto \boxed{x_\beta}$ as projeções do produto em cada fator.

$$\pi_x : \mathbb{K}^X \to \mathbb{K} : f \mapsto \pi_x(f) = f(x)$$

- Se cada X_α é dotado de uma topologia τ_α, podemos colocar em $\prod X_\alpha$ a **topologia produto** (denotada por $\boxed{\prod_{\alpha\in A} \tau_\alpha}$ $\boxed{\prod \tau_{\mathbb{K}^X}}$): gerada pela família
$$\mathcal{F} = \left\{\pi_\alpha^{-1}(U) : \; \alpha \in A, \; U \in \tau_\alpha\right\} .$$

  Uma **base de vizinhanças para $x \in \prod X_\alpha$** é composta pelos conjuntos da forma

$$V_{\varepsilon,\alpha_1,..,\alpha_N}(x) := \left\{y \in \prod X_\alpha : \; |x_{\alpha_i} - y_{\alpha_i}| < \varepsilon \; \forall i = 1, .., N\right\} \tag{D5.1}$$

  onde $\varepsilon > 0$ e $\alpha_i \in A$ para um número finito de $i = 1, .., N$.

  base de vizinhanças para $\varphi = (\varphi(x))_{x\in X} \in \mathbb{K}^X$

$$V_{\varepsilon,\alpha_1,..,\alpha_N}(\varphi) := \{\psi \in \mathbb{K}^X : \; |\psi(\alpha_i) - \varphi(\alpha_i)| < \varepsilon \; \forall i = 1, .., N\}$$

  com $\varepsilon > 0$ e $\alpha_i \in X$ para um número finito de $i = 1, .., N$

Teorema D5.3 [Tychonoff]. *(Usa Axioma da Escolha!)*
Se cada espaço topológico (X_α, τ_α) *é compacto então* $\left(\prod_{\alpha\in A} X_\alpha, \prod_{\alpha\in A}\tau_\alpha\right)$ *é compacto.* $\triangleleft$

Prova do Teorema de Banach-Alaoglu D5.2:

$\overline{B^{X^*}} = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$ *é compacta na topologia* $\sigma^* = \sigma(X^*, X)$.

- Seja $T : (X^*, \sigma^*) \to (\mathbb{K}^X, \prod \tau_{\mathbb{K}}) : \phi \mapsto T\phi = (\phi(x))_{x\in X}$

Af. 1. T é mergulho topológico

- T é injetora
- T é contínua (por D5.2)
- $T^{-1} : (T(X), \prod \tau_{\mathbb{K}}) \to (X^*, \sigma^*)$ é contínua (por D5.3)

Af. 2. $T(\overline{B^{X^*}}) \subseteq \prod_{x\in X} \overline{B^{\mathbb{K}}_{\|x\|}(0)}$, o qual é um compacto (T. Tychonoff)

Af. 3. $T(\overline{B^{X^*}})$ é fechado, logo compacto (Ex.D5-(c))

- $\overline{B^{X^*}} = T^{-1}(T(\overline{B^{X^*}}))$ é compacto na top. σ^* (T^{-1} é contínua, Ex.D5-(a))

$\blacksquare$

$\boxed{\text{Aula 15}}$

$$T : (X^*, \sigma^*) \to (\mathbb{K}^X, \prod \tau_{\mathbb{K}}) : \phi \mapsto T\phi = (\phi(x))_{x \in X}$$

Prova da Af. 1.: T é mergulho topológico.

- T é injetora: $T\phi = T\psi \implies \phi(x) = \psi(x),\ \forall x \in X \implies \phi = \psi$
- para as continuidades de T e sua inversa $T^{-1} : (T(X), \prod \tau_{\mathbb{K}}) \to (X^*, \sigma^*)$:

> **Proposição D3.3** ψ é contínua se, e somente se, $\varphi \circ \psi : Z \to \mathbb{K}$ é contínua, $\forall \varphi \in X^*$.
>
> $$\begin{tikzcd}(Z, \Sigma) \arrow[r, "\psi"] \arrow[rr, bend right, "\varphi\circ\psi"'] & (X, \sigma(X, X^*)) \arrow[r, "\varphi"] & (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})\end{tikzcd}$$
>
> Lembre: a top. fraca $\sigma(X, X^*)$ é a induzida pela família $\{\varphi\}_{\varphi \in X^*}$
> **De fato, resultado análogo vale em geral trocando o esp. (X, σ) pelo esp. topológico $(Y, \tilde{\sigma})$ e trocando φ por todas as funções que define $\tilde{\sigma}$ a menor topologia que as deixa contínuas, por exemplo,**
>
> $$\begin{tikzcd}(Z, \Sigma) \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "\pi_x\circ T"'] & (\mathbb{K}^X, \prod \tau_{\mathbb{K}}) \arrow[r, "\pi_x"] & (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})\end{tikzcd} \tag{D5.2}$$
>
> **T é contínua $\iff$ $\pi_x \circ T$ é contínua para todo $x \in X$**
> Lembre: a top. produto $\prod \tau_{\mathbb{K}}$ é a induzida pela família $\{\pi_x\}_{x \in X}$, **ou ainda,**
>
> $$\begin{tikzcd}(Z, \Sigma) \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "Jx\circ T"'] & (X^*, \sigma^*) \arrow[r, "Jx"] & (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})\end{tikzcd} \tag{D5.3}$$
>
> **T é contínua $\iff$ $Jx \circ T$ é contínua para todo $x \in X$**
>
> Lembre: a top. fraca* σ^* é a induzida pela família $\{Jx\}_{x \in X}$

- T é contínua (por D5.2)

$$\begin{tikzcd}(X^*, \sigma^*) \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "\pi_x\circ T"'] & (\mathbb{K}^X, \prod \tau_{\mathbb{K}}) \arrow[r, "\pi_x"] & (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})\end{tikzcd} : \qquad \phi \overset{T}{\mapsto} w = (\phi(x))_{x \in X} \overset{\pi_x}{\mapsto} \phi(x)$$

  - $\pi_x \circ T(\phi) = \phi(x) = Jx(\phi),\ \forall x \in X$
  - $\pi_x \circ T = Jx \in J(X)$, a qual é contínua na top. σ^* (Def top.frac* D4.3)
  - $\pi_x \circ T$ é contínua para todo $x \in X$

- T^{-1} é contínua (por D5.3)

$$(T(X), \prod \tau_{\mathbb{K}}) \xrightarrow{T^{-1}} (X^*, \sigma^*) \xrightarrow{Jx} (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}}) : \qquad w = (w_x)_{x\in X} \overset{T^{-1}}{\mapsto} (\phi : x \mapsto w_x) \overset{Jx}{\mapsto} Jx(\phi) = \phi(x) = w_x$$

$Jx \circ T^{-1}$

  - $Jx \circ T^{-1}(w) = w_x = \pi_x(w)$, $\forall w \in T(X)$
  - $Jx \circ T^{-1} = \pi_x$, a qual é contínua na top. $\prod \tau_{\mathbb{K}^X}$ (Def top.produto)
  - $Jx \circ T^{-1}$ é contínua para todo $x \in X$

□

Prova da Af. 2.: $T(\overline{B^{X^*}}) \subseteq \prod_{x\in X} \overline{B^{\mathbb{K}}_{\|x\|}(0)}$.

- $\varphi \in \overline{B^{X^*}}$

Queremos $(\varphi(x))_{x\in X} = T\varphi \in \prod_{x\in X} \overline{B^{\mathbb{K}}_{\|x\|}(0)}$

> $$\prod_{x\in X} \overline{B^{\mathbb{K}}_{\|x\|}} = \left\{ f : X \to \mathbb{K} : f(x) \in \overline{B^{\mathbb{K}}_{\|x\|}(0)},\ x \in X \right\}$$

- **Basta mostrar que** $\varphi(x) \in \overline{B^{\mathbb{K}}_{\|x\|}(0)},\ x \in X$**:** $|\varphi(x)| \leq \|x\|, \forall x \in X$

$$\varphi \in \overline{B^{X^*}} \implies \|\varphi\|_{X^*} = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} \leq 1 \implies \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} \leq 1, \forall x \neq 0$$

□

Prova da Af. 3.: $T(\overline{B^{X^*}})$ é fechado.

- $\varphi \in \overline{T(\overline{B^{X^*}})} \subset \mathbb{K}^X$:

$$\boxed{\varphi \in O \in \prod \tau_{\mathbb{K}^X} \implies O \cap T(\overline{B^{X^*}}) \neq \emptyset}$$

Queremos $(\varphi(x))_{x\in X} = \varphi \in T(\overline{B^{X^*}})$**, i.e,**

$\exists\ f \in \overline{B^{X^*}}_{\subset X^*}$**, i.e.,** $f : X \to \mathbb{K}$ **linear ltda. com** $\|f\|_{X^*} \leq 1$**;** $Tf = \varphi$

$$T : (X^*, \sigma^*) \to (\mathbb{K}^X, \prod \tau_{\mathbb{K}}) : \phi \mapsto T\phi = (\phi(x))_{x\in X} = (\phi : X \to \mathbb{K})$$

$$Tf = \varphi \iff (f(x))_{x\in X} = Tf = \varphi = (\varphi(x))_{x\in X} \iff f = \varphi$$

- **Basta mostrar que φ é linear e $|\varphi(x)| \leq 1$ para todo $x \in X, \|x\| \leq 1$**

φ é linear:

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \forall x, y \in X$$
$$\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x), \quad \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{K}$$

- dados $x, y \in X$ e $\varepsilon > 0$ considere

$$V_{\varepsilon,x,y,x+y}(\varphi) = \{\psi : X \to \mathbb{K};\ |\psi(\alpha) - \varphi(\alpha)| < \varepsilon,\ \alpha = x, y, x+y\}$$

- $V_{\varepsilon,x,y,x+y}(\varphi) \in \prod \tau_{\mathbb{K}^X}$ (Eq. D5.1)
- $\exists\ \psi \in V_{\varepsilon,x,y,x+y}(\varphi) \cap T(\overline{B^{X^*}})$

$$\begin{aligned}
& |\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y)| = \\
\overset{\psi\ linear}{=} & |\varphi(x+y) - \psi(x+y) + \psi(x) + \psi(y) - \varphi(x) - \varphi(y)| \\
\leq & |\varphi(x+y) - \psi(x+y)| + |\psi(x) - \varphi(x)| + |\psi(y) - \varphi(y)| \\
\overset{\psi\in V}{\leq} & 3\varepsilon
\end{aligned}$$

- dados $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $\varepsilon > 0$ considere

$$V_{\varepsilon,x,\lambda x}(\varphi) = \{\psi : X \to \mathbb{K};\ |\psi(\alpha) - \varphi(\alpha)| < \varepsilon,\ \alpha = x, \lambda x\}$$

- $V_{\varepsilon,x,\lambda x}(\varphi) \in \prod \tau_{\mathbb{K}^X}$ (Eq. D5.1)
- $\exists\ \psi \in V_{\varepsilon,x,\lambda x}(\varphi) \cap T(\overline{B^{X^*}})$

$$\begin{aligned}
|\varphi(\lambda x) - \lambda\varphi(x)| \overset{\psi\ linear}{=} & |\varphi(\lambda x) - \psi(\lambda x) + \lambda\psi(x) - \lambda\varphi(x)| \\
\leq & |\varphi(\lambda x) - \psi(\lambda x)| + |\lambda||\psi(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon + |\lambda|\varepsilon
\end{aligned}$$

$|\varphi(x)| \leq 1$ para todo $x \in X$, $\|x\| \leq 1$

- dados $x \in X$, com $\|x\| \leq 1$ e $\varepsilon > 0$ considere

$$V_{\varepsilon,x}(\varphi) = \{\psi : X \to \mathbb{K};\ |\psi(x) - \varphi(x)| < \varepsilon\}$$

- $V_{\varepsilon,x}(\varphi) \in \prod \tau_{\mathbb{K}^X}$ (Eq. D5.1)
- $\boxed{\exists\ \psi \in V_{\varepsilon,x}(\varphi) \cap T(\overline{B^{X^*}})}$

$$|\varphi(x)| \leq |\varphi(x) - \psi(x)| + |\psi(x)| \underset{ltda}{\overset{\psi\ linear}{\leq}} \varepsilon + \|\psi\|\,\|x\| \overset{\|\psi\|\leq 1}{\leq} \varepsilon + \|x\| \leq \varepsilon + 1$$

□

Exercícios

Exercício D5.4. A topologia fraca* $\sigma(X^*, X)$ em X^* é a topologia em X^* induzida pela topologia produto $\prod \tau_{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{K}^X$: $\sigma(X^*, X) = \tau_{\mathbb{K}^X}|_{X^*}$ ★

D6 Mais coisas..

Observação D6.1. Os Corolários do Teorema da Limitação Uniforme B4.4 (resp. B4.3) podem ser reformulados concluindo que um conjunto limitado na topologia fraca* (resp. fraca) é fortemente limitado. ★

> Corolário B4.3 Se X é um e.v.n. sobre $\mathbb{K}$ e $B \subset X$, suponha que $\phi(B) = \{\phi(x),\ x \in B\}$ seja limitado $\forall\ \phi \in X^*$. Então B é limitado.
>
> Cororálio B4.4 Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{B} \subset X^*$, suponha que $\{\phi(x),\ \phi \in \mathcal{B}\}$ seja limitado $\forall\ x \in X$. Então $\mathcal{B}$ é limitado.

Exercícios

Exercício D6.2. Faça os exercícios 3.1,..,3.5 (p. 79...) do [Bre11] ★

Referências

[Bre11] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011, pp. xiv+599. ISBN: 978-0-387-70913-0.

[Loi75] G. F. Loibel. "Notas de Topologia Geral". Em: *ICMC - USP* (1975).

Lista dos teoremas

Lista dos exercícios

Lista de Teoremas para saber para P1

Teorema A2.15 – do Ponto Fixo de Banach Contração
Teorema A2.21 – das categorias de Baire
Teorema A3.12 – (absoluta convergência)
Proposição A4.1 – (continuidade linear)
Proposição A4.2 – (completeza espaço L)
Teorema A5.7 – Riesz (com seu lema)
Teorema B2.1 – Hahn-Banach real
Corolário B2.3 – Extensão de funcional mantendo a norma
Teorema B2.4 – Existem muitos funcionais
Teorema B4.7 – da aplicação aberta
Teorema B4.14 – do gráfico fechado
Teorema B4.1 – da Limitação Uniforme - Banach-Steinhaus
Teorema C2.3 – (adjunto)
Proposição C3.6 – (ortogonalidade gráficos)
Lema C3.10 – (estimativa a priori)
Proposição D3.4 – (propriedades de σ)
Proposição D3.7 – (conv. fraca)
Teorema D3.10 – Mazur (convexos fechados)