

Conteúdo

Lc.1 Definição de derivada	Lc.2
Lc.2 Teoremas estudados em Cálculo 1 - Revisão	Lc.3
Lc.2.1 Operações e Regras de derivação	Lc.3
Lc.2.2 Outros Resultados	Lc.4
Relação entre f' e f	Lc.5
Lc.2.3 Derivadas de ordem superior	Lc.5
Lc.3 Fórmula de Taylor	Lc.7
Lc.3.1 Alguns exemplos de Polinômio de Taylor	Lc.11
Lc.4 Integral de Riemann e Teorema Fundamental do Cálculo	Lc.12
Lc.4.1 Definição de integral (definida) de Riemann	Lc.12
Lc.4.2 Teoremas de integrabilidade	Lc.14
Lc.4.3 Teorema Fundamental do Cálculo Integral	Lc.16

Lc.1 Definição de derivada

Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $p \in D_f$ um *ponto de acumulação de D_f* .

- Se existir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = L \in \mathbb{R},$$

então dizemos que

- f é derivável (ou diferenciável) em p ,
- L é a derivada de f em p ; notação: $f'(p) := L$.
- Se o limite não existir (ou for infinito), dizemos que f não é derivável (ou diferenciável) em p .
- Se f é derivável em todo $p \in A \cap A'$ dizemos f é derivável em $A \subset D_f$,
- se f é derivável em todo $p \in D_f \cap D'_f$ dizemos f é derivável.

Observação Lc.1.1. Seja $p \in D_f$ é ponto de acumulação de D_f .¹

1. f é derivável em p se e somente se existem $L \in \mathbb{R}$ e $\rho : D^* \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(p+h) = f(p) + [L + \rho(h)]h, \quad \text{com } \lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0.$$

2. Seja $\rho(h) : D \rightarrow \mathbb{R} : h \mapsto \rho(h) = \begin{cases} \frac{f(p+h) - f(p) - Lh}{h}, & h \neq 0 \\ 0, & h = 0 \end{cases} (L \in \mathbb{R}).$

f é derivável em p se e somente se $\exists L \in \mathbb{R}$ tal que ρ é contínua em 0.

3. A saber: se f é derivável em p , então $L = f'(p)$. ★

A função derivada de f é dada por: $f' : D_{f'} \rightarrow \mathbb{R} : p \mapsto f'(p)$ onde

$$D_{f'} = \{p \in D_f : p \text{ é p.a. de } D_f \text{ e } f \text{ é derivável em } p\}$$

¹ $D = \{h \in \mathbb{R} : p+h \in D_f\}$, $D^* = \{h \in \mathbb{R} : p+h \in D_f\} \setminus \{0\}$

Lc.2 Teoremas estudados em Cálculo 1 - Revisão

Teorema [Relação diferenciabilidade/continuidade].

Seja $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ e $p \in D_f$ um ponto de acumulação de D_f .

Se f é derivável em p então f é contínua em p . \triangleleft

Lc.2.1 Operações e Regras de derivação

Teorema [Operações com derivadas].

Sejam $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in D$ ponto de acumulação de D e $k \in \mathbb{R}$.

Se f e g são deriváveis em p , então

- $f \pm g$, kf , fg são deriváveis em p ,
- f/g é derivável em p , desde que $g(p) \neq 0$,
- vale

$$\begin{cases} (f \pm g)'(p) = f'(p) \pm g'(p), \\ (kf)'(p) = k f'(p) & (fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p), \\ (f/g)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{(g(p))^2} & (\text{se } g(p) \neq 0). \end{cases} \triangleleft$$

Teorema [*Derivada da composta* - Regra da cadeia].

Sejam

$$f : D_f \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : D_g \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{Im}(f) \subseteq D_g,$$

$$f \text{ derivável em } p, \quad g \text{ derivável em } f(p).$$

($p \in D_f$ um ponto de acumulação de D_f , $f(p) \in D_g$ um ponto de acumulação de D_g)

Então $g \circ f$ é derivável em p e vale $(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p)$. \triangleleft

Teorema [Derivada da inversa].

Sejam $f : A \rightarrow B$ contínua e bijetora, onde A é um intervalo ou um compacto (*logo f^{-1} é contínua*)^[ver Corolários Lc.3.7 e Lc.3.11], e $x_0 \in A$ um p.a. de A .

Se f derivável em x_0 e $f'(x_0) \neq 0$ então f^{-1} é derivável em $y_0 := f(x_0)$ e

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

\triangleleft

Exemplo Lc.2.1. Qualquer função obtida via soma, diferença, produto, divisão ou composição de funções deriváveis, **é derivável**. Todas **funções elementares** são **deriváveis**. Encontre o domínio da função derivada de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \sin(x)\sqrt[3]{x}$. ★

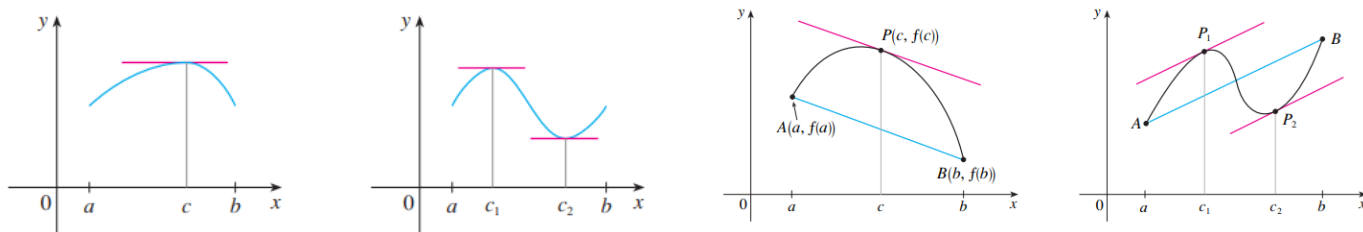
Lc.2.2 Outros Resultados

Teorema [de Rolle].

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f derivável em (a, b) e $f(a) = f(b)$,
então existe $c \in (a, b)$ **tal que** $f'(c) = 0$. ◁

Teorema [do Valor Médio].

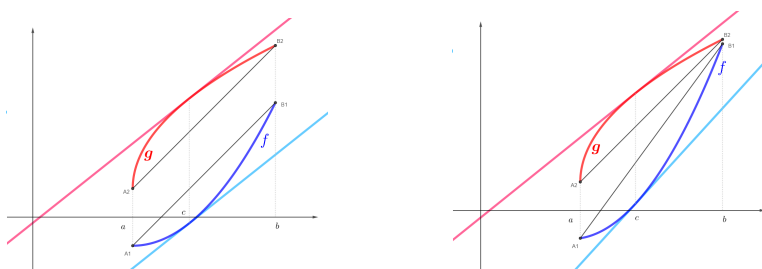
Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f derivável em (a, b) , **então existe** $c \in (a, b)$
tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ◁



Fonte: Stewart. A reta tang. ao gráf. de f em $(c, f(c))$ é paralela à secante $(a, f(a))(b, f(b))$.

Teorema [de Cauchy].

Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b) : **então existe**
 $c \in (a, b)$ **tal que** $f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]$. ◁



Na fig. da esquerda, as retas secantes são paralelas e também as retas tang. aos gráficos de f e g em $(c, f(c))$ e $(c, g(c))$. Na fig. da direita, a reta secante ao gráf. de f é mais inclinada que a reta secante ao gráf. de g , e a inclinação da reta tangente ao gráf. de f em $(c, f(c))$ é maior que a inclinação da reta tangente ao gráf. de g em $(c, g(c))$ na mesma proporção das inclinações das secantes. **Geogebra**

Relação entre f' e f

Corolário [Crescimento/Decrescimento].

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) :

- se $f'(x) > 0$ em (a, b) , **então f é estritamente crescente em $[a, b]$,**
- se $f'(x) \geq 0$ em (a, b) , **então f é crescente em $[a, b]$,**
- se $f'(x) < 0$ em (a, b) , **então f é estritamente decrescente em $[a, b]$,**
- se $f'(x) \leq 0$ em (a, b) , **então f é decrescente em $[a, b]$,**
- se $f'(x) = 0$ em (a, b) , **então f é constante em $[a, b]$.**
- se f é crescente (ou estr. cresc.) em $[a, b]$ **então $f'(x) \geq 0$ em (a, b) ,**
- se f é decrescente (ou estr. decresc.) em $[a, b]$ **então $f'(x) \leq 0$ em (a, b) .**

◁

Lc.2.3 Derivadas de ordem superior

Sejam $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ derivável k vezes em $D_{f^{(k)}}$ e $p \in D_{f^{(k)}}$ um p.a. de $D_{f^{(k)}}$.

- **Se existir**

$$\lim_{t \rightarrow p} \frac{\mathbf{f}^{(k)}(t) - \mathbf{f}^{(k)}(p)}{t - p} = \mathbf{L} \in \mathbb{R},$$

então dizemos que

- **f é $k + 1$ vezes derivável em p ,**
- **L é a derivada $(k + 1)$ -ésima de f em p ;** not.: $\mathbf{f}^{(k+1)}(p) := L$.
- Se o limite não existir (ou for infinito), dizemos que **f não é $k + 1$ vezes derivável em p .**

A função derivada $(k + 1)$ -ésima de $f : \mathbf{f}^{(k+1)} : \mathbf{D}_{\mathbf{f}^{(k+1)}} \rightarrow \mathbb{R} : p \mapsto \mathbf{f}^{(k+1)}(p)$,

$$D_{f^{(k+1)}} = \{p \in D_{f^{(k)}} : p \text{ é p.a. de } D_{f^{(k)}} \text{ e } f \text{ é } k + 1 \text{ vezes deriv. em } p\}$$

Dado um conjunto $A \subset D_f \subseteq \mathbb{R}$

- se f é contínua e tem todas derivadas até ordem k contínuas em A dizemos **f é de classe C^k em A , $f \in C^k(A)$.**
- se f é contínua e tem derivadas de todas as ordens contínuas em A dizemos **f é de classe C^∞ em A , $f \in C^\infty(A)$.**

Observação Lc.2.2.

1. As **funções elementares**: polinomial, exponencial, logarítmica, trigonométricas e hiperbólicas são **de classe C^∞ em seus domínios naturais**.

2. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ é derivável em \mathbb{R} porém f' não é contínua em 0. (ver Exercício10, Lista 4)

3. Exercício 11, Lista 4:

Teorema Lc.2.3 [de Darboux, Valor Intermed. para derivada].
Sejam $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em um intervalo I , $[a, b] \subset I$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$f'(a) > \gamma > f'(b) \quad \text{ou} \quad f'(a) < \gamma < f'(b)$$

então existe $c \in (a, b) : f'(c) = \gamma$.

Em particular f' assume todos os valores entre $f'(a)$ e $f'(b)$. ◁

Note: O Teorema de Darboux não pede que a derivada seja contínua!

TVI: Seja $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, e seja $\gamma \in \mathbb{R}$ entre $g(a)$ e $g(b)$, então existe $c \in (a, b) : g(c) = \gamma$.

Em particular g assume todos os valores entre $g(a)$ e $g(b)$.

Pelo TVI: se f é de classe C^1 em um intervalo I , dados $a < b$ em I : e $\gamma \in \mathbb{R}$ está entre $f'(a)$ e $f'(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \gamma$.

Em particular f' assume todos os valores entre $f'(a)$ e $f'(b)$.

Uma consequência: Se uma função g possui descontinuidade em um ponto onde os limites laterais são distintos (possui “um salto”, como a função degrau), então não existe função f derivável tal que $f' = g$.



Lc.3 Fórmula de Taylor

Lembrando 1: Uma função $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ser k vezes derivável em p significa que $p \in D_{f^{(k-1)}} \subseteq \dots \subseteq D_{f'} \subseteq D_f$, p é p.a. de $D_{f^{(k-1)}}$, f é $k - 1$ vezes derivável em $D_{f^{(k-1)}}$ e que existe $f^{(k)}(p)$.

Lembrando 2:

Se existe $f'(p)$ então a *reta tangente* ao gráfico de f em $(p, f(p))$ é dada pela função

$$T_p(x) = f(p) + f'(p)(x - p), \quad x \in \mathbb{R}$$

e satisfaz

$$E_p(\mathbf{x}) := \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}_p(\mathbf{x}) = \mathbf{o}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \text{ quando } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}, \quad (\text{Lc.3.1})$$

isto é,

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{E_p(x)}{x - p} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - T_p(x)}{x - p} = 0.$$

Logo,

T_p é o único polinômio de grau no máximo 1 que satisfaz (Lc.3.1) e tal que

$$T_p(p) = f(p), \quad T'_p(p) = f'(p),$$

Q polinômio de grau no máximo 1, $Q(x) = a + b(x - p)$, com

$$f(x) - Q(x) = r(x) \text{ onde } \lim_{x \rightarrow p} \frac{r(x)}{x - p} = 0$$

• r é derivável (logo, contínua) em p

$$\bullet r(p) = \lim_{x \rightarrow p} r(x) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{r(x)}{x - p}(x - p) = 0 \implies \boxed{a = f(p)}$$

$$\bullet r'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{r(x) - r(p)}{x - p} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{r(x)}{x - p} = 0 \implies \boxed{b = f'(p)}$$

$$\therefore Q = T_p$$

Pergunta 1) Se f é k vezes derivável em p , existe polinômio T de grau no máximo k tal que

$$T^{(j)}(p) = f^{(j)}(p) \text{ para todo } j = 0, \dots, k ? \quad (\text{Lc.3.2})$$

• $T(x) = a_0 + a_1(x-p) + a_2(x-p)^2 + \dots + a_k(x-p)^k$ tal que:

■ $T(p) = f(p) \implies a_0 = f(p)$

■ $T'(p) = f'(p) \implies a_1 = f'(p)$

■ $T''(p) = f''(p) \implies a_2 = \frac{f''(p)}{2}$

⋮

■ $T^{(k)}(p) = f^{(k)}(p) \implies a_k = \frac{f^{(k)}(p)}{k!}$

Resposta 1) SIM:

Se f é k vezes derivável em p , existe um único polinômio de grau no máximo k satisfazendo (Lc.3.2) que é dado por:

$$T_{f,p}^k(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(p)}{j!} (x-p)^j, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$T_{f,p}^k(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2}(x-p)^2 + \frac{f'''(p)}{3!}(x-p)^3 + \dots + \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k,$$

chamado de **Polinômio de Taylor de ordem k da função f no ponto p** .

Pergunta 2) Vale uma propriedade análoga à propriedade (Lc.3.1)-($k = 1$):

$$f(x) - T_{f,p}^k(x) := E_p(x) = o((x-p)^k) \text{ quando } x \rightarrow p ?$$

Pergunta 3) O polinômio de Taylor é o único polinômio de grau no máximo k que satisfaz

$$f(x) - T_{f,p}^k(x) := E_p(x) = o((x-p)^k) \text{ quando } x \rightarrow p ?$$

Respostas 2 e 3) SIM:

Teorema Lc.3.1 [P.d.T. com resto de Peano].

Se f é uma função k vezes derivável em p , **então**

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - T_{f,p}^k(x)}{(x-p)^k} = 0.$$

Em outras palavras,

$$E_p(x) := f(x) - T_{f,p}^k(x) = o((x-p)^k) \text{ quando } x \rightarrow p. \quad (\text{Lc.3.3})$$

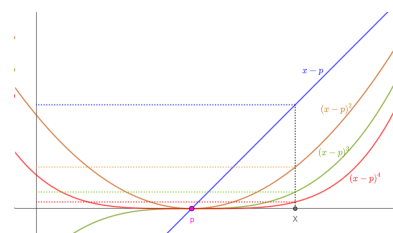
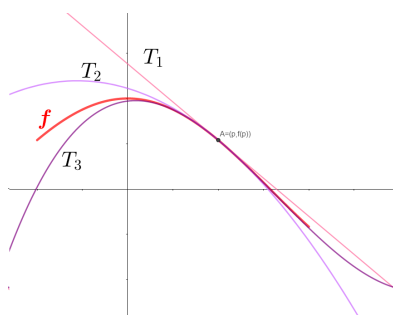
Além disso, $T_{f,p}^k(x)$ **é o único polinômio de grau no máximo k com esta propriedade.** \triangleleft

Lema Lc.3.2. *Seja r uma função k vezes derivável em p .
Então,*

$$r^{(j)}(p) = 0, \quad j = 0, \dots, k, \text{ se e somente se } \lim_{x \rightarrow p} \frac{r(x)}{(x-p)^k} = 0.$$

\triangleleft

1. $E_p(x)$ (que depende da ordem k) é o erro que se comete quando usamos o valor do polinômio de Taylor $T_{f,p}^k$ de ordem k avaliado em x , $T_{f,p}^k(x)$, para obter uma aproximação do valor da função f em x , $f(x)$.
2. Por (Lc.3.3), podemos inferir:
 - (a) para $x \in D_f$, menor é o erro cometido na aproximação de $f(x)$ quanto maior é a ordem do polinômio de Taylor usado;
 - (b) quanto mais próximo x está de p , menor é o erro cometido na aproximação de $f(x)$ quando utilizado um polinômio de Taylor de dada ordem.



Sobre o Erro

Pergunta 4) O erro é conhecido?

Resposta 4) SIM e NÃO:

Teorema Lc.3.3 [P.d.T. com resto de Lagrange].

Se, para um $\delta > 0$, f é $k + 1$ vezes derivável em $V_\delta(p)$, **então dado** $x \in V_\delta(p) \setminus \{p\}$ **existe** $c_x \in (p, x)$ (**resp.** $c_x \in (x, p)$ **se** $x < p$) **tal que**

$$E_p^{k+1}(x) := f(x) - T_{f,p}^k(x) = \frac{f^{(k+1)}(c_x)}{(k+1)!} (x-p)^{k+1}.$$

◁

Nota.

- Os polinômios de Taylor podem ser usados para dar aproximações dos valores da função numa vizinhança de um dado ponto p :

$$f(x) \approx T_{f,p}^k(x), \quad x \approx p.$$

- Se $k = 0$, o Teorema do P. de Taylor com resto de Lagrange é o T.V.M:

$$f(x) - T_{f,p}^0(x) = f(x) - f(p) = \frac{f'(c)}{1} (x-p).$$

Para $k \geq 1$, ele pode ser visto como uma generalização do TVM.

- Se as derivadas até ordem $k + 1$ de f são limitadas numa vizinhança de p , podemos usar o Teorema do P. de Taylor com resto de Lagrange para obter **uma estimativa do erro** E_p^{k+1} :

Se $|f^{(k+1)}(x)| \leq M$, para todo $x \in V_\delta(p) \setminus \{p\}$, então

$$|E_p^{k+1}(x)| \leq \frac{M}{(k+1)!} |x-p|^{k+1}, \quad x \in V_\delta(p) \setminus \{p\},$$

Lc.3.1 Alguns exemplos de Polinômio de Taylor

$\sin(x)$ com $T^1, T^3, T^5, T^7, T^{13}$

$\ln(x)$ com T^1, T^4, T^7, T^{10} zoom $\ln(x)$ com $T^1, T^4, T^7, T^{10}, T^{13}$

1. Considere $f(x) = \cos(x)$.
 - (a) Calcule os polinômios de Taylor de ordens 1, 2, 3 e 4 no ponto 0 de f .
 - (b) Calcule os limites abaixo usando, respectivamente, o polinômio de Taylor de ordem 2 e de ordem 4 em torno de 0 de f :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^4}.$$

- (c) Calcule o valor aproximado para $\cos(0.01)$ e dê uma estimativa do erro cometido quando usado: o polinômio de Taylor de ordem 1 no ponto 0 e o polinômio de Taylor de ordem 2 no ponto 0.
2. Qual um polinômio de Taylor adequado para calcular um valor aproximado de $\sin(1)$ com erro $< 10^{-5}$?

Lc.4 Integral de Riemann e Teorema Fundamental do Cálculo

Lc.4.1 Definição de integral (definida) de Riemann

Seja a seguir sempre $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **limitada (com $[a, b]$ limitado)**;

logo existem m, M tais que $m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b]$.

Uma **Partição de $[a, b]$** é um conjunto finito de pontos da forma

$$\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\};$$

também denotamos por $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$.

Dadas f e \mathcal{P} definimos

Soma inferior associada a f e \mathcal{P} :

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i x, \text{ onde } m_i = \inf \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\};$$

Soma superior associada a f e \mathcal{P} :

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i x, \text{ onde } M_i = \sup \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

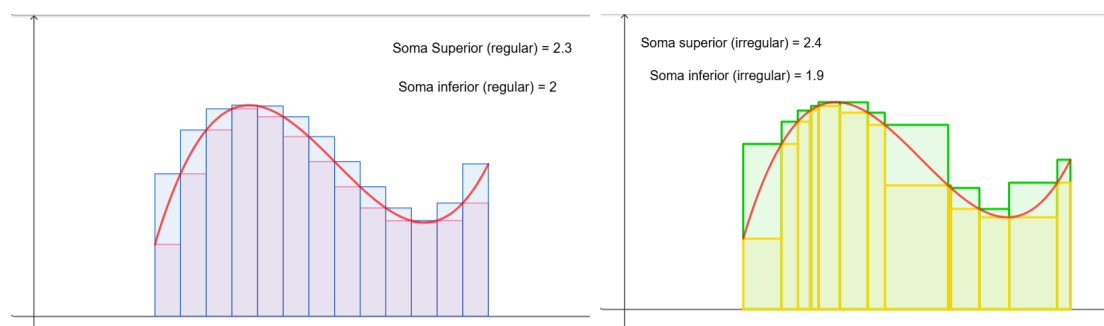


Figura 1: Ver no [Geogebra](#): aproximações da “área” por retângulos regulares e irregulares

Algumas propriedades:

1. $m(b - a) \leq s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}) \leq M(b - a)$
2. se $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$ então $s(f, \mathcal{P}_1) \leq s(f, \mathcal{P}_2) \leq S(f, \mathcal{P}_2) \leq S(f, \mathcal{P}_1)$
3. para quaisquer $\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4$ vale $s(f, \mathcal{P}_3) \leq S(f, \mathcal{P}_4)$

Por consequência, fixada f , consideramos

$$\sup_{\mathcal{P}} \mathbf{s}(f, \mathcal{P}) := \sup \{ \mathbf{s}(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partição qualquer de } [a, b] \},$$

$$\inf_{\mathcal{P}} \mathbf{S}(f, \mathcal{P}) := \inf \{ \mathbf{S}(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partição qualquer de } [a, b] \} :$$

ambos **existem** e vale

$$\sup_{\mathcal{P}} \mathbf{s}(f, \mathcal{P}) \leq \inf_{\mathcal{P}} \mathbf{S}(f, \mathcal{P}).$$

Definição Lc.4.1 (Integral de Riemann). Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada.

- se $\sup_{\mathcal{P}} s(f, \mathcal{P}) = \inf_{\mathcal{P}} S(f, \mathcal{P})$ dizemos que
 - f é **Riemann integrável em $[a, b]$,**
 - $I := \sup_{\mathcal{P}} s(f, \mathcal{P}) = \inf_{\mathcal{P}} S(f, \mathcal{P})$ é a **integral definida (de Riemann)**

de f em $[a, b]$:
$$I = \int_a^b f;$$

- se $\sup_{\mathcal{P}} s(f, \mathcal{P}) < \inf_{\mathcal{P}} S(f, \mathcal{P})$ dizemos que

- f **não é Riemann integrável em $[a, b]$.** ★

Em geral, define-se as **integrais superior e inferior**, respectivamente, por

$$\overline{\int}_a^b f = \inf_{\mathcal{P}} S(f, \mathcal{P}), \quad \underline{\int}_a^b f = \sup_{\mathcal{P}} s(f, \mathcal{P})$$

Exemplo Lc.4.2. $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 3, & c.c. \end{cases}$ ★

Proposição Lc.4.3 [Integrabilidade em subintervalos].

Seja $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ limitada.

1. Se $[a, b] \subseteq D_f$ e f é integrável em $[a, b]$ e $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$, **então f é integrável em $[\alpha, \beta]$.**
2. Se $[a, b], [b, c] \subseteq D_f$ e f é integrável em $[a, b]$ e em $[b, c]$, **então f é integrável em $[a, c]$ e vale**

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

◁

Se f é integrável em $[a, b]$, **definimos**

$$\int_b^a f := - \int_a^b f \quad e \quad \int_a^a f := 0.$$

Desta maneira a fórmula $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$ **vale seja qual for a ordem de a, b, c (desde que tudo faça sentido!²).**

Lc.4.2 Teoremas de integrabilidade

(Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada, m, M tais que $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$).

Teorema Lc.4.4 [caracterização da integrabilidade].

f é Riemann integrável em $[a, b]$ se e só se vale

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathcal{P} : S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \varepsilon.$$

Em outras palavras,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n\} : \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta_i x < \varepsilon.$$

◁

Exemplo Lc.4.5. $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$ ★

²por exemplo, admitindo integrabilidade no intervalo maior

Teorema Lc.4.6 [integrabilidade das contínuas].

Se f é contínua em $[a, b]$ **então f é Riemann integrável em $[a, b]$.** \triangleleft

Teorema Lc.3.19. Sejam $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e D_f compacto. Se f é contínua, então f é uniformemente contínua.

Teorema Lc.4.7 [integrabilidade das contínuas por partes].

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e contínua exceto em um número finito de pontos, **então f é Riemann integrável em $[a, b]$.**³ \triangleleft

Lema Lc.4.8 [integrabilidade por aproximação]. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada e integrável em todo intervalo $[c, d]$ com $a < c < d < b$, então f é integrável em $[a, b]$. \triangleleft

Teorema Lc.4.9 [integrabilidade das monótonas].

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona **então f é Riemann integrável em $[a, b]$.** \triangleleft

Algumas propriedades da integral (Exercício 31, Lista 4)

- se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e integrável, e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$ contém um número finito de pontos, **então g é integrável e $\int_a^b f = \int_a^b g$.**
- se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são limitadas e integráveis, então:
 - 1) $f \geq 0$ em $[a, b]$ **implica $\int_a^b f \geq 0$;**
 - 2) $f = 0$ em $[a, b]$ **implica $\int_a^b f = 0$,**
 - $f \geq 0$ e contínua em $[a, b]$, com $\int_a^b f = 0$, **implica $f = 0$ em $[a, b]$;**
 - 3) $\alpha f + \beta g$ **é integrável** e $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \left(\int_a^b f \right) + \beta \left(\int_a^b g \right)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
 - 4) $f \geq g$ em $[a, b]$ **implica $\int_a^b f \geq \int_a^b g$;**
 - 5) $|f|$ **é integrável** e $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$;
 - 6) fg **é integrável.**

³De fato, o conjunto dos pontos de descontinuidade pode ter medida nula, ver Elon, T. 20, p. 273

Lc.4.3 Teorema Fundamental do Cálculo Integral

Definição Lc.4.10. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e integrável e $c \in [a, b]$. Chamamos **Função integral** a função

$$F_c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_c^x f.$$

★

Observe que para outro ponto $d \in [a, b]$ vale

$$F_d(x) := \int_d^x f = \int_d^c f + F_c(x).$$

Teorema Lc.4.11.

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e integrável, $c \in [a, b]$ e

$$F_c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_c^x f$$

então vale

(a) F_c é limitada e (uniformemente) contínua

(b) se f é contínua em $p \in [a, b]$, então F_c é derivável em p e vale

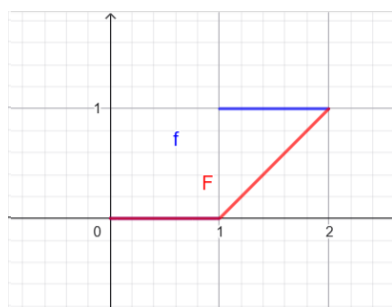
$$F'_c(p) = f(p).$$

◁

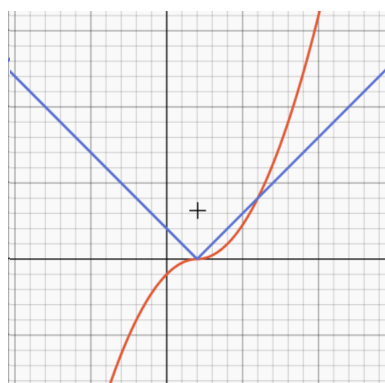
Demonstração. Tarefa!

□

Exemplo Lc.4.12.



f limitada, integrável, F_c contínua;



f contínua, F_c derivável

★

Definição Lc.4.13. Dadas $f, F : I \rightarrow \mathbb{R}$, sendo I intervalo, se $F' = f$ em I dizemos que F é primitiva de f em I .

★

Vale:

- se F é primitiva de f em I então $F + c$ também, $\forall c \in \mathbb{R}$;
- se F, G são primitivas de f em I então $F - G = \text{const}$

Teorema Lc.4.14 [Teorema Fundamental do Cálculo].

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, $c \in [a, b]$ e $F_c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_c^x f$, então:

- (a) F_c é derivável em $[a, b]$ e $F'_c = f$ em $[a, b]$,
(i.e., F_c é primitiva de f em $[a, b]$).
- (b) se G é uma primitiva de f em $[a, b]$ então $\int_a^b f = G(b) - G(a)$.
(notação: $G(b) - G(a) = G(x) \Big|_a^b$)

◁

Definição:

Indicaremos com $\int f$ a **integral indefinida de f** : a família (conjunto) de todas as primitivas de f (num certo intervalo fixado):

$$\int f = \left\{ \left(\int_a^x f \right) + k, k \in \mathbb{R} \right\}.$$

cuidado:

- $\int_a^b f$ é um número,
- $\int_a^x f$ é uma função,
- $\int f$ é uma família de funções.

Lista dos teoremas

Lc.1.1	Observação	Lc.2
	Teorema (Relação diferenciabilidade/continuidade) . . .	Lc.3
	Teorema (Operações com derivadas)	Lc.3
	Teorema (<i>Derivada da composta</i> - Regra da cadeia)	Lc.3
	Teorema (Derivada da inversa)	Lc.3
Lc.2.1	Exemplo	Lc.4
	Teorema (de Rolle)	Lc.4
	Teorema (do Valor Médio)	Lc.4
	Teorema (de Cauchy)	Lc.4
	Corolário (Crescimento/Decrescimento)	Lc.5
Lc.2.2	Observação	Lc.6
Lc.2.3	Teorema (de Darboux, Valor Intermed. para derivada)	Lc.6
Lc.3.1	Teorema (P.d.T. com resto de Peano)	Lc.9
Lc.3.2	Lema	Lc.9
Lc.3.3	Teorema (P.d.T. com resto de Lagrange)	Lc.10
Lc.4.1	Definição (Integral de Riemann)	Lc.13
Lc.4.2	Exemplo	Lc.13
Lc.4.3	Proposição (Integrabilidade em subintervalos)	Lc.14
Lc.4.4	Teorema (caracterização da integrabilidade)	Lc.14
Lc.4.5	Exemplo	Lc.14
Lc.4.6	Teorema (integrabilidade das contínuas)	Lc.15
Lc.4.7	Teorema (integrabilidade das contínuas por partes) . . .	Lc.15
Lc.4.8	Lema (integrabilidade por aproximação)	Lc.15
Lc.4.9	Teorema (integrabilidade das monótonas)	Lc.15
Lc.4.10	Definição (Função Integral)	Lc.16
Lc.4.11	Teorema	Lc.16
Lc.4.12	Exemplo	Lc.16
Lc.4.13	Definição (Primitiva)	Lc.17
Lc.4.14	Teorema (Teorema Fundamental do Cálculo)	Lc.18

Temporary page!

\LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because \LaTeX now knows how many pages to expect for this document.