Conteúdo

D1 Séries de potências

Chamamos **Série de potências (SDP) de centro x_0** uma série da forma

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{D1.1}$$

onde a_n é uma sequencia de reais ou complexos.

OBS Por convenção (deixa as fórmulas mais simples) consideramos $x^0 = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$; também definimos $0! = 1$

Observação D1.1. A série (D1.1)

- sempre converge em x_0, ao valor a_0
- se converge em $\overline{x} \neq x_0$ então converge (absolutamente) para todo x t.q. $|x - x_0| < |\overline{x} - x_0|$
- se não converge em $\overline{x} \neq x_0$ então não converge para todo x t.q. $|x - x_0| > |\overline{x} - x_0|$ ★

Teorema D1.2. *Para a série de potências* (D1.1) *vale uma das três possibilidades:*

(1) a série converge apenas em x_0

(2) a série converge (absolutamente) em todo $\mathbb{R}$ *(ou em todo* $\mathbb{C}$*)*

(3) $\exists\, R > 0$ *tal que a série*

- *converge (absolutamente) se* $|x - x_0| < R$
- *não converge se* $|x - x_0| > R$
- *pode ou não convergir se* $|x - x_0| = R$ $\triangleleft$

- R é dito **raio de convergência** da série de potências, (pondo $R = 0$ no caso (1) e $R = \infty$ no caso (2))

- Para séries a valores em $\mathbb{R}$, o conjunto de convergência é sempre um intervalo (**intervalo de convergência, IC**), que pode ser
  – (1) um ponto,
  – (2) todo $\mathbb{R}$,
  – (3) um intervalo centrado em x_0 de raio R, que pode incluir ou não os extremos

- Para séries a valores em $\mathbb{C}$, o conjunto de convergência é sempre um circulo (**círculo de convergência, CC**), que pode ser
  – (1) um ponto,
  – (2) todo $\mathbb{C}$,
  – (3) um círculo centrado em x_0 de raio R, que pode incluir ou não os pontos na fronteira

Exemplo D1.3.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$, $R = \infty$, $IC = \mathbb{R}$ (*ou* $\mathbb{C}$).
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$, $R = 0$, $IC = \{0\}$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$, $R = 1$, $IC = [-1, 1)$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$, $R = 1$, $IC = [-1, 1]$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n\, x^n$, $R = 1$, $IC = (-1, 1)$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $R = 1$, $IC = (-1, 1)$. ★

Cálculo do raio de convergência

Teorema D1.4 [Critério da raiz].

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

ou

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \text{(se existir)} \qquad \triangleleft$$

Teorema D1.5 [Critério da razão].

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \qquad \text{(se existir)} \qquad \triangleleft$$

D1.1 Convergência uniforme - continuidade

Teorema D1.6. *A série de potências* (D1.1) *converge uniformememte em todo conjunto fechado e limitado contido em* $\{x : \ |x - x_0| < R\}$. $\triangleleft$

Teorema D1.7 [de Abel]. *Se a série de potências* (D1.1) *converge em* $\overline{z}$ *com* $|\overline{z} - x_0| = R$ *então converge uniformemente em todo o segmento* $\{x_0 + \tau(\overline{z} - x_0) : \ \tau \in [0,1]\}$. $\triangleleft$

Corolário D1.8. *Uma Série de potências é sempre contínua onde converge* $\triangleleft$

D1.2 Integração e derivação de SDP

Teorema D1.9. *A série de potências* (D1.1) *é integrável em todo* $[a,b] \subseteq IC$ *e valem*

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\left((b-x_0)^{n+1} - (a-x_0)^{n+1}\right),$$

$$\int_{x_0}^{x} S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\,(x-x_0)^{n+1} \qquad \textit{para todo } x \in [a,b]\,,$$

esta última é uma SDP com o mesmo raio de convergência (mas pode ter IC maior!)

◁

Teorema D1.10. *A série de potências* (D1.1) *é derivável em todo* $\{x : |x-x_0| < R\}$ *e vale*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n\,(x-x_0)^{n-1}$$

a qual resulta ser uma SDP com o mesmo raio de convergência (mas pode ter IC menor!)

◁

Corolário D1.11. *A série de potências* (D1.1) *é infinitas vezes derivável em todo* $\{x : |x-x_0| < R\}$ *e vale*

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n\,(x-x_0)^{n-k}$$

a qual resulta ser uma SDP com o mesmo raio de convergência (mas pode ter IC menor!) ◁

Observação D1.12. Valem resultados análogos em $\mathbb{C}$, mas precisaria definir derivada e integral em $\mathbb{C}$.... ★

D1.3 Unicidade de SDP

Teorema D1.13. *Se a série de potências* (D1.1) *tem* $R > 0$ *e vale* $S \equiv 0$ *em uma vizinhança de* x_0*, então* $a_n = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*.*

Se duas séries de potências têm $R > 0$ *e vale*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \tag{D1.2}$$

em uma vizinhança de x_0*, então* $a_n = b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*.* $\triangleleft$

Exemplo D1.14. Manipulando a partir de séries conhecidas, podemos escrever várias funções conhecidas como SDP:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad em\ \mathbb{R} \tag{D1.3}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad em\ \mathbb{R} \tag{D1.4}$$

$$Sh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad em\ \mathbb{R} \tag{D1.5}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad em\ \mathbb{R} \tag{D1.6}$$

$$Ch(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad em\ \mathbb{R} \tag{D1.7}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad em\ (-1,1) \tag{D1.8}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad em\ (-1,1] \tag{D1.9}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad em\ (-1,1) \tag{D1.10}$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad em\ [-1,1] \tag{D1.11}$$

★

Graficos em Geogebra
outros:
$\sin(x)$ com T^1, T^3, T^5, T^7, T^{13}
$\ln(x)$ com T^1, T^4, T^7, T^{10}
zoom $\ln(x)$ com T^1, T^4, T^7, T^{10}, T^{13}

Exemplo D1.15. As séries acima podem ser usadas para aproximar valores transcendentes:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

$$\pi = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{6}{\sqrt{3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left[\frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{3^{2n+1}}\right]$$

★

D2 Séries de Taylor e Funções analíticas

Notação: para um $\delta > 0$, denotamos por $V_\delta(x_0)$ a vizinhança de raio δ do ponto x_0.
Note: em $\mathbb{R}$ isto seria o intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$; em $\mathbb{C}$ seria o circulo aberto centrado em x_0 de raio δ.

Teorema D2.1 [P.d.T. com resto de Lagrange].
Se, para um $\delta > 0$, $f \in \mathcal{C}^{k+1}(V_\delta(x_0))$, **então dado $x \in V_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ existe $c_x \in (x_0, x)$ se $x > x_0$ (resp. $c_x \in (x, x_0)$ se $x < x_0$) tal que**

$$f(x) - T^k_{f,x_0}(x) = \frac{f^{(k+1)}(c_x)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1},$$

onde

$$T^k_{f,x_0}(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

é o **Polinômio de Taylor de ordem k, da função f, no ponto x_0**.

Veja a teoria sobre polinômios de Taylor Aqui: p7... ◁

Se $f \in \mathcal{C}^\infty(V_\delta(x_0))$ posso escrever a **Série de Taylor** de f em volta de x_0

$$\boxed{T_{f,x_0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}$$

Se $x_0 = 0$, a série acima é chamada de **Série de Maclaurin**.

Teorema D2.2. *Se a série de potências $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ converge em $(x_0 - R, x_0 + R)$, então $a_n = \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}$*
Ou seja, **se uma f pode ser escrita como SDP centrada em x_0 com raio de convergência positivo, então esta SDP é a T_{f,x_0}.** ◁

Observação D2.3. Nem sempre f coincide com sua série de Taylor:

- vimos que $e^x \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ em $\mathbb{R}$.
- $\frac{1}{1+x} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ em $(-1, 1)$,
  mas $\frac{1}{1+x}$ faz sentido em toda a semirreta $(-1, \infty)$.
- $\arctan(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ em $(-1, 1)$,
  mas $\arctan(x)$ tem domínio $\mathbb{R}$.

- $U(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
  mas $U = T_{U,0} = 0$ apenas em 0!

★

Definição D2.4. $f \in \mathcal{C}^\infty(V_\delta(x_0))$ é dita

- $\boxed{\text{analítica em } x_0}$ se $\exists\, r$ tal que $f \equiv T_{f,x_0}$ em $V_r(x_0)$.
- $\boxed{\text{analítica}}$, se for analítica em todo ponto do seu domínio.

★

Exemplo D2.5. e^x, $\sin(x)$, $\ln(x)$ ecc.. são analíticas
$U(x)$ não é analítica em 0.

★

Teorema D2.6 [Cond.suf. para analiticidade]. *Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(V_\delta(x_0))$: se existem $M, r > 0$ tais que*

$$\sup_{x \in (x_0 - r, x_0 + r)} |f^{(n)}(x)| \leq M \frac{n!}{r^n}$$

então f é analítica em x_0

◁

Corolário D2.7. *Se $\exists\ M, \alpha > 0$ tais que a estimativa $|f^{(n)}(x)| \leq M\alpha^n$*

- *vale em vizinhança de x_0, então f é analítica em x_0*
- *vale em $\mathbb{R}$ então f é analítica em $\mathbb{R}$ e suas T_{f,x_0} convergem em todo $\mathbb{R}$*

◁

D2.1 Extensão analítica

Dada uma função analítica f de domínio $D \subseteq \mathbb{R}$, suas séries de Taylor T_{f,x_0} ($x_0 \in D$) definem funções de variável complexa no círculos complexos de raio R_{x_0}.

Juntando estas definições podemos estender f a uma vizinhança em $\mathbb{C}$ de D.

Exemplo D2.8. Exponencial complexa:

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad em\ \mathbb{C}$$

logaritmo complexo:

$$\ln(1+z) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \quad em\ V_1(0)$$

note

$$e^{iy} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(y) + i \sin(y)$$

logo

$$e^{x+iy} := e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i \sin(y))$$

★

D2.2 Série binomial

A solução do P. de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{\alpha}{1+x} y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

é $y(x) = (1+x)^\alpha$.

Resolvendo por séries obtemos $y(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ onde $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)..(\alpha-n+1)}{n!}$.

Se $\alpha \in \mathbb{N}$ então

$$a_n = \begin{cases} \binom{\alpha}{n} & n \leq \alpha, \\ 0 & n > \alpha, \end{cases}$$

logo a série converge em todo $\mathbb{R}$ pois é apenas um polinômio de ordem α: o conhecido **Binômio de Newton**:

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} x^n$$

No caso geral definimos os **coeficientes binomiais generalizados** como

$$\binom{\alpha}{0} := 1, \quad \binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)..(\alpha-n+1)}{n!}, \quad n \geq 1\,,$$

logo podemos escrever

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad em \quad (-1,1),$$

de fato $\left| \frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}} \right| = \left| \frac{n+1}{\alpha-n} \right| \to 1 = R.d.C.$

Exemplo D2.9.

- $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n$ *em* $(-1,1)$, onde podemos calcular os primeiros coeficientes: $\binom{1/2}{n} = 1, 1/2, -1/8, 1/16, -5/64, \ldots$
- $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^n$ *em* $(-1,1)$, onde podemos calcular os primeiros coeficientes : $\binom{-1/2}{n} = 1, -1/2, -3/8, -5/16, \ldots$
- note que $\binom{-1}{n} = (-1)^n$.
- Obtemos também

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n \quad em \quad (-1,1)$$

e logo

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad em \quad (-1,1)\,.$$

★

Conteúdo

Lista dos teoremas