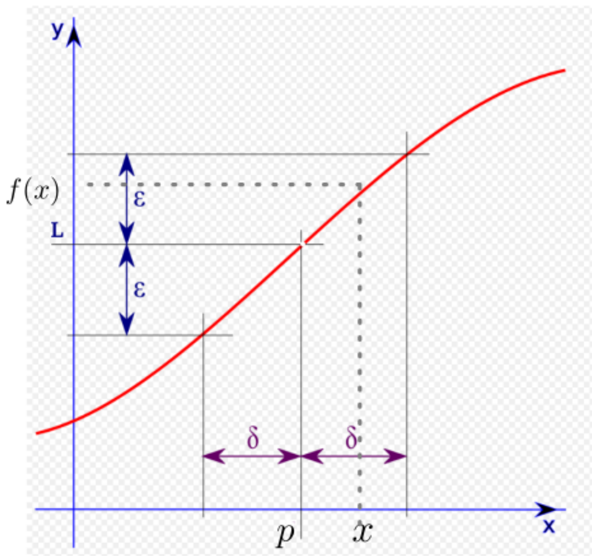
Conteúdo

L.1 Limites infinitos: definição

Se $f : D_f \to \mathbb{R}$ e p é ponto de acumulação de D_f

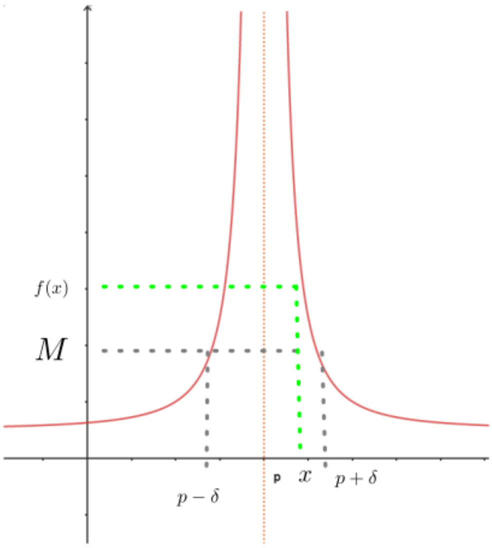
- $\lim_{x\to p} f(x) = L$ significa

  $\forall \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists \delta > \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{x} \in \mathbf{D_f}$ **e** $\mathbf{0} < |\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \delta$ implica $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}| < \varepsilon$



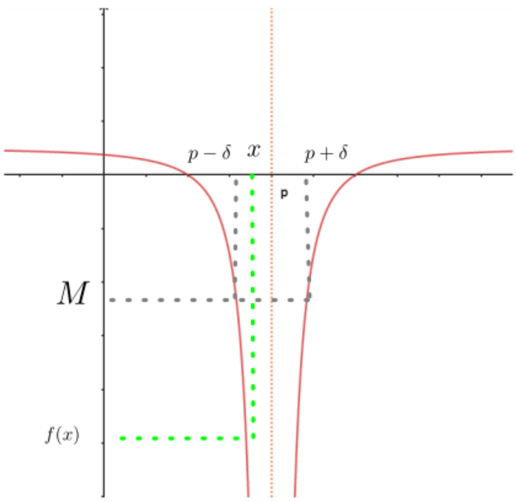
- $\lim_{x \to p} f(x) = +\infty$ significa

$$\forall\, \mathbf{M} \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta > \mathbf{0} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } \mathbf{0} < |\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \delta \text{ implica } \mathbf{f}(\mathbf{x}) > \mathbf{M}$$



- $\lim_{x \to p} f(x) = -\infty$ significa

$$\forall\, \mathbf{M} \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta > \mathbf{0} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } \mathbf{0} < |\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \delta \text{ implica } \mathbf{f}(\mathbf{x}) < \mathbf{M}$$

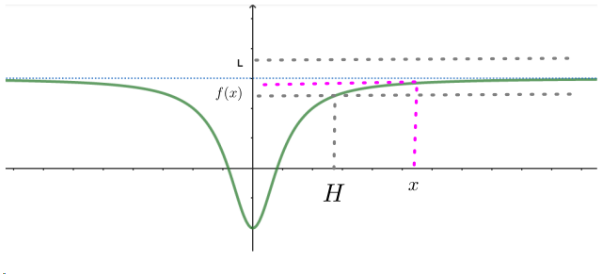


L.2 Limites no infinito: definição

Se $f : D_f \to \mathbb{R}$ e D_f **não é limitado superiormente**

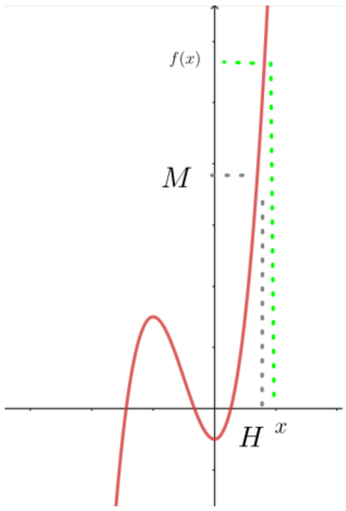
- $\lim\limits_{\mathbf{x}\to+\infty} f(x) = L$ significa

$$\forall\, \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists\, \mathbf{H} \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } \mathbf{x} > \mathbf{H} \text{ implica } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}| < \varepsilon$$



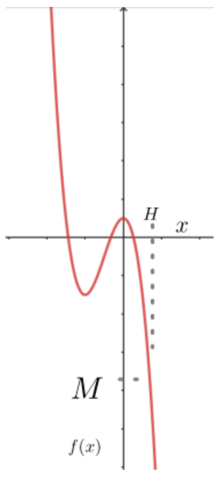
- $\lim\limits_{\mathbf{x}\to+\infty} f(x) = +\infty$ significa

$$\forall\, \mathbf{M} \in \mathbb{R}\ \exists\, \mathbf{H} \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } \mathbf{x} > \mathbf{H} \text{ implica } \mathbf{f}(\mathbf{x}) > \mathbf{M}$$



- $\lim\limits_{\mathbf{x}\to+\infty} f(x) = -\infty$ significa

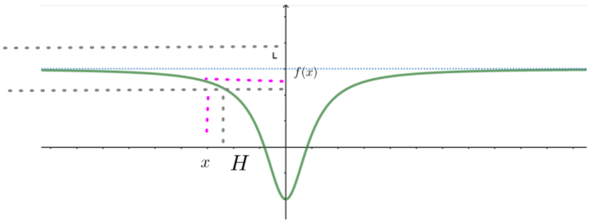
$$\forall\, \mathbf{M} \in \mathbb{R}\ \exists\, \mathbf{H} \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } \mathbf{x} > \mathbf{H} \text{ implica } \mathbf{f}(\mathbf{x}) < \mathbf{M}$$



Se $f : D_f \to \mathbb{R}$ e D_f **não é limitado inferiormente**

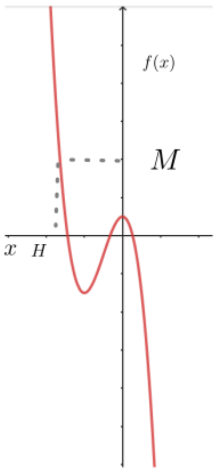
- $\lim_{\mathbf{x}\to-\infty} f(x) = L$ significa

$$\forall \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists \mathbf{H} \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } \mathbf{x} < \mathbf{H} \text{ implica } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}| < \varepsilon$$



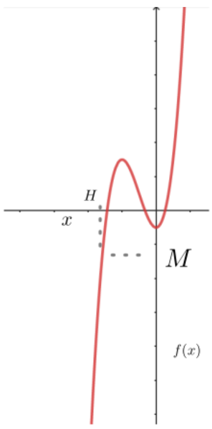
- $\lim_{\mathbf{x}\to-\infty} f(x) = +\infty$ significa

$$\forall \mathbf{M} \in \mathbb{R}\ \exists \mathbf{H} \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } \mathbf{x} < \mathbf{H} \text{ implica } \mathbf{f}(\mathbf{x}) > \mathbf{M}$$



- $\lim_{\mathbf{x}\to-\infty} f(x) = -\infty$ significa

$$\forall \mathbf{M} \in \mathbb{R}\ \exists \mathbf{H} \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } \mathbf{x} < \mathbf{H} \text{ implica } \mathbf{f}(\mathbf{x}) < \mathbf{M}$$



L.3 Propriedades dos limites infinitos

Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ e seja p ponto de acumulação de D.
Considere limites para $x \to p$.[1]

- se $f \to +\infty$, $g \to +\infty$ **então** $f + g \to +\infty$, $fg \to +\infty$
- se $f \to -\infty$, $g \to -\infty$ **então** $f + g \to -\infty$, $fg \to +\infty$
- se $f \to +\infty$, $g \to -\infty$ **então** $f + g$ **DÚVIDA!**, $fg \to -\infty$

- se $f \to L$, $g \to +\infty$ **então** $f+g \to +\infty$, $fg \to \begin{cases} +\infty & se\ L > 0 \\ -\infty & se\ L < 0 \\ \textbf{DÚVIDA!} & se\ L = 0 \end{cases}$
- se $f \to L$, $g \to -\infty$ **então** $f+g \to -\infty$, $fg \to \begin{cases} -\infty & se\ L > 0 \\ +\infty & se\ L < 0 \\ \textbf{DÚVIDA!} & se\ L = 0 \end{cases}$

- se $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f \to +\infty$ ou $f \to -\infty$ **então** $\dfrac{c}{f} \to 0$

  A saber,

  se $f \to +\infty$, **então** $\dfrac{c}{f} \to 0^+$ se $c > 0$; $\dfrac{c}{f} \to 0^-$ se $c < 0$

  ou

  se $f \to -\infty$, **então** $\dfrac{c}{f} \to 0^-$ se $c > 0$; $\dfrac{c}{f} \to 0^-$ se $c < 0$.

---

[1] Os mesmos resultados valem se $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$ ou $x \to p^+$ ou $x \to p^-$.

- se $f \to 0^+$ **então** $\dfrac{1}{f} \to +\infty$ **(desde que p seja de acumulação para $D_{1/f}$)**

$$\frac{c}{f} \to +\infty \quad \text{se } c > 0; \qquad \frac{c}{f} \to -\infty \quad \text{se } c < 0$$

- se $f \to 0^-$ **então** $\dfrac{1}{f} \to -\infty$ **(desde que p seja de acumulação para $D_{1/f}$)**

$$\frac{c}{f} \to -\infty \quad \text{se } c > 0; \qquad \frac{c}{f} \to +\infty \quad \text{se } c < 0$$

Nota. São **indeterminações**:

$$(+\infty) + (-\infty) \qquad 0.\infty \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{0}{0} \qquad 0^0$$

$$\infty^0 \qquad 1^\infty$$

Não é indeterminação: $\dfrac{0}{\infty}$. Basta reescrever "$\dfrac{0}{\infty} = 0\frac{1}{\infty} = 0.0 = 0$".

Definição L.3.1. Dizemos que a reta:

- $x = p$ é uma **assíntota vertical** (**AV**) do gráfico de f quando:

$$\lim_{\mathbf{x \to p}} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\mathbf{x \to p^+}} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\mathbf{x \to p^-}} f(x) = \pm\infty$$

- $y = L$ é uma **assíntota horizontal** (**AH**) do gráfico de f quando:

$$\lim_{\mathbf{x \to +\infty}} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{\mathbf{x \to -\infty}} f(x) = L$$

Teorema (de confronto com limites infinitos).
Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ e seja p ponto de acumulação de D. Suponha que

$$\exists\, r > 0 : \ x \in D \ e \ 0 < |x - p| < r \ \Rightarrow f(x) \le g(x)$$

Então:

$$se \ \lim_{x\to p} f(x) = +\infty \ \textbf{então} \ \lim_{x\to p} g(x) = +\infty$$

$$se \ \lim_{x\to p} g(x) = -\infty \ \textbf{então} \ \lim_{x\to p} f(x) = -\infty$$

Ainda,

- no Teorema do Limite da composta, podemos ter $\pm\infty$ no lugar de a ou no lugar de L;
- os teoremas de unicidade e de permanência do sinal valem também se os limites valem $\pm\infty$;

L.4 Propriedades dos limites no infinito

Todos os teoremas vistos ainda valem

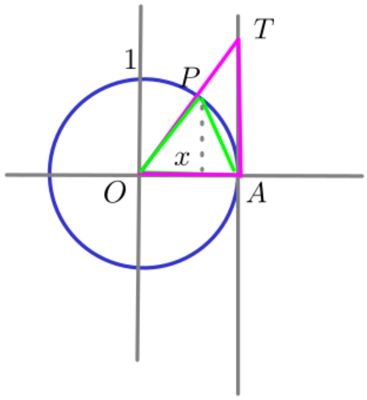
- substituindo
  – $x \to p$ por $x \to +\infty$,
  – $\exists r > 0 :$ .... $0 < |x - p| < r$ ... por $\exists H \in \mathbb{R} :$ .... $x > H$ ...,
  – p de acumulação de D_f por D_f **não limitado superiormente**
- substituindo
  – $x \to p$ por $x \to -\infty$,
  – $\exists r > 0 :$ .... $0 < |x - p| < r$ ... por $\exists H \in \mathbb{R} :$ .... $x < H$ ...,
  – p de acumulação de D_f por D_f **não limitado inferiormente**

PS: também valem análogos com limites laterais.

Exemplo 1. Exercícios 27 e 28 em Slides de Exercícios.

L.5 Limites Fundamentais

L.5.1 Primeiro limite fundamental: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$



$$area(\Delta OAP) < area(setor\,circular\,OAP) < area(\Delta OAT)$$

- $$0 < \frac{\sin x}{2} \overset{(*)}{<} \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2} \iff \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$
- $$\cos x < \frac{\sin x}{x} \overset{(**)}{<} 1, \quad -\frac{\pi}{2} < x < 0$$

Portanto,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad |x| < \frac{\pi}{2}, \; x \neq 0 \qquad (***)$$

- A função seno é contínua em 0:

  use (*), (**) e o Teorema do Confronto;

- A função cosseno é contínua em 0:

  use $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, para x numa vizinhança de 0;

- As funções seno e cosseno são contínuas em $\mathbb{R}$:

  use $\lim_{x\to p}\cos x = \lim_{y\to 0}\cos(y+p)$;

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

  use (***) e o Teorema do Confronto.

Exemplo 2. Exercício 30 em Slides de Exercícios.

L.5.2 Segundo limite fundamental: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Sequência: $n \in \mathbb{N}$: $n = 1, 2, 3, \ldots, 300, \ldots, 3.000, \ldots, 30.000, \ldots$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n : 2, 2.25, 2.370, , \ldots, 2.713765, \ldots, 2.7178289, \ldots, 2.7182365, \ldots$$

- $x \in \mathbb{R} \implies \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n \le x \le n+1$
- $$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\substack{\downarrow \\ e}}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \ge \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \ge \underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\substack{\downarrow \\ e}}\underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}}_{\substack{\downarrow \\ 1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Formas equivalentes do segundo limite fundamental:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$$

Limites úteis:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$$

Consequência:

A função exponencial e^x é contínua em 0.

$$\lim_{x\to 0}e^{x}=e^{0}\iff\lim_{x\to 0}(e^{x}-1)=0.$$

Mas,

$$\lim_{x\to 0}(e^{x}-1)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}x=0.$$

A função exponencial e^x é contínua em $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to p}e^{x}\overset{u=x-p}{\underset{u\to 0}{=}}\lim_{u\to 0}e^{u+p}=\lim_{u\to 0}e^{u}e^{p}=e^{0}e^{p}=e^{p}$$

L.6 Teoremas sobre funções contínuas

Teorema (de conservação do sinal para funções contínuas).
Seja $f : D \to \mathbb{R}$, seja $p \in D$ um ponto de acumulação de D e seja f contínua em p.
Se $f(p) > 0$ (resp. $f(p) < 0$), **então**

$$\exists\, r > 0 : \; x \in D \; e \; |x - p| < r \;\Rightarrow f(x) > 0 \;\; (resp. \; f(x) < 0)$$

Teorema (Teorema de Bolzano (ou dos zeros)).
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, com $f(a)f(b) < 0$,
então existe $c \in (a, b) : \; f(c) = 0$.

Corolário (Teorema do valor intermediário).
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, e seja $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(a) > \gamma > f(b) \qquad ou \qquad f(a) < \gamma < f(b)$$

então existe $c \in (a, b) : \; f(c) = \gamma$.
Em particular f assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$.

Teorema (Teorema de Weiestrass).
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua,
então existem $x_1, x_2 \in [a, b] : \; f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \; \forall\, x \in [a, b]$.

Corolário.
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua,
então

$$Im(f) = [m, M],$$

onde m, M **são, respectivamente, o mínimo e o máximo de** f.

bisec.c
bisec.exe