Conteúdo

Objetivo

Definir o conceito de produto escalar entre dois vetores e sua relação com ortogonalidade.

Construir base ortonormal: o cálculo com vetores com coordenadas em relação a base ortonormal se torna mais simples.

P.1 Produto Escalar

Aula 6

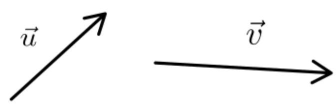
Para definir produto escalar precisamos responder as seguintes duas perguntas:

1. Como definir a medida do ângulo entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do espaço?

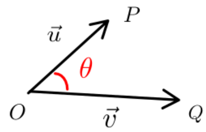
2. Como “calcular” a medida do ângulo entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do espaço?

P.1.1 Ângulo entre dois vetores não nulos de V^3

Considere os seguintes vetores não nulos de V^3:



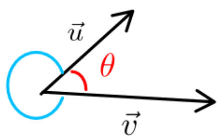
Considere os pontos O, P e Q tais que $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$.



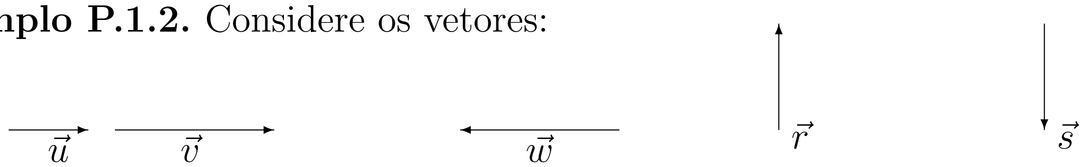
Definição P.1.1. A **medida angular** (ou a **medida do ângulo**) entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é a medida θ do ângulo $P\widehat{O}Q$ com $0 \leq \theta \leq \pi$. Escrevemos

$$\theta = ang(\vec{u}, \vec{v})$$

Nota: Existem duas escolhas para definir a medida do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Nossa escolha é aquela de modo que a medida está entre 0 e π.



Exemplo P.1.2. Considere os vetores:

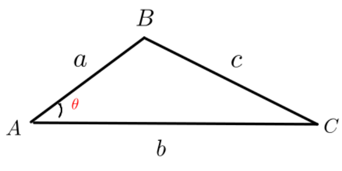


- Qual a medida do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$?
- Qual a medida do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$?
- Qual a medida do ângulo entre os vetores $\vec{w}$ e $\vec{v}$?
- Qual a medida do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{r}$?
- Qual a medida do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{s}$?
- Qual a medida do ângulo entre os vetores $\vec{w}$ e $\vec{r}$?
- Qual a medida do ângulo entre os vetores $\vec{w}$ e $\vec{s}$?
- Qual a medida do ângulo entre os vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$?

Se os vetores não são tão "bem comportados", como calcular o ângulo?

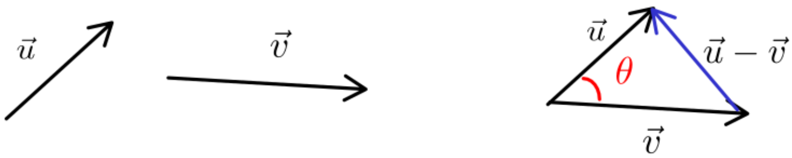
Lei dos cossenos: Sejam ABC um triângulo como na figura abaixo, a o comprimento do segmento $\overline{AB}$, b o comprimento do segmento $\overline{AC}$, c o comprimento do segmento $\overline{BC}$ e θ o ângulo formado pelos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Então (tarefa!),

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$



Considere dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos e pontos O, P e Q tais que

$$\overrightarrow{OP} = \vec{u} \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{OQ} = \vec{v}$$



Pela Lei dos Cossenos:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta, \quad \theta = ang(\vec{u}, \vec{v}). \tag{P.1.1}$$

Nota:

1. A equação acima diz que podemos calcular o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ conhecendo os valores: $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ e $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.

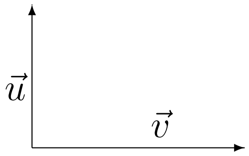
2. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos. Então,

$$\theta = ang(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2 \iff \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta = 0.$$

Definição P.1.3. Dizemos que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **ortogonais** se:

- ou um deles é o vetor nulo;
- ou ambos são não nulos e a medida do ângulo entre eles é $\pi/2$.

Notação: $\vec{u} \perp \vec{v}$.



P.1.2 Produto escalar

Definição P.1.4. O **produto escalar entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de V^n**, indicado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, é o número real tal que

- Se $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ é o vetor nulo, $\vec{u} \cdot \vec{v} := 0$.
- Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não nulos e θ é a medida do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v} := \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta.$$

Proposição P.1.5.

$(P1)$ *Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não nulos e $\theta = ang(\vec{u}, \vec{v})$, então*

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

$(P2)$ $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

$(P3)$ $\vec{u} \perp \vec{v}$ *se e somente se* $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

$(P4)$ *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Para quaisquer que sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em V^3,*

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|.$$

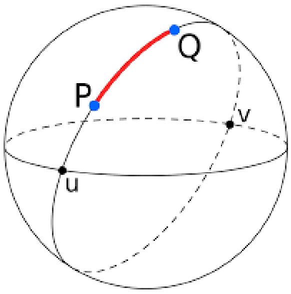
A igualdade vale se, e somente se, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD.

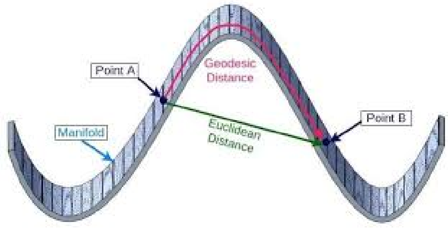
Curiosidade: Quando $x, y \in S_1(0)$ (esfera de raio 1), a função ângulo

$$\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos\left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{||\mathbf{x}||||\mathbf{y}||}\right) = \arccos(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$$

é a **distância geodésica** entre os pontos x e y, usualmente dita a função que determina a "distância real"na Terra ("variedades"), veja **Geodésica**.

(a) Delfim Moreira-MG, 2019





(b) Ilustração distância geodésica: fonte internet

Nota: As propriedades P1 e P2 da Proposição P.1.5 dizem que podemos calcular o ângulo entre dois vetores conhecendo o produto interno entre vetores.

MAS...

- Não sabemos CALCULAR a norma de um vetor...
- Não sabemos CALCULAR o produto interno entre vetores...
- Tudo o que foi feito é **geométrico**...

- Vamos retomar as coordenadas de vetores e base do espaço!
- Para termos propriedades **analíticas**!

P.2 Base Ortonormal

Definição P.2.1. Uma base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de V^3 é uma base ortogonal quando os vetores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ são dois a dois ortogonais, isto é,

$$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, \quad \vec{e}_1 \perp \vec{e}_3, \quad \text{e} \quad \vec{e}_3 \perp \vec{e}_2.$$

Definição P.2.2. Uma base ortogonal $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de V^3 é uma base ortonormal quando os vetores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ além de dois a dois ortogonais são unitários, isto é,

$$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, \quad \vec{e}_1 \perp \vec{e}_3, \quad \text{e} \quad \vec{e}_3 \perp \vec{e}_2,$$

e

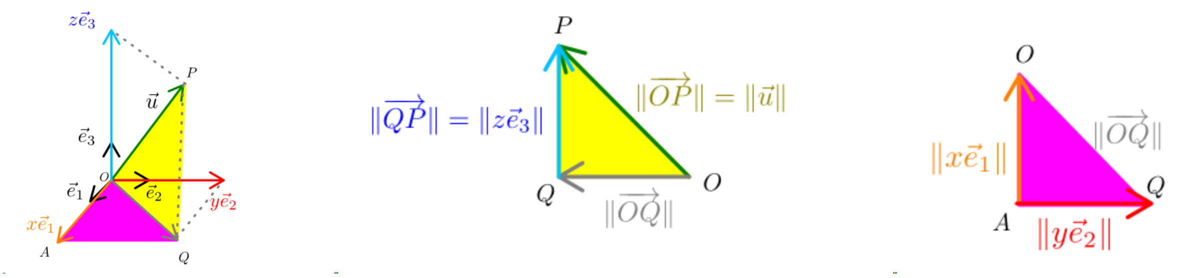
$$\|\vec{e}_1\| = 1, \quad \|\vec{e}_2\| = 1 \quad \text{e} \quad \|\vec{e}_3\| = 1.$$

Teorema P.2.3. *Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal de V^3.*
Se $\vec{u} = (x, y, z)_E$ e $\vec{v} = (a, b, c)_E$, então

1.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

Segue do fato dos vetores serem ortogonais e unitários, observando que :



2.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xa + yb + zc.$$

Nota.

1. As fórmulas acima valem somente quando a base E é **ortonormal**.
2. As fórmulas acima valem para **qualquer** base ortonormal.

Exemplo P.2.4. Ver Exercícios 21 a 23 em Slide de Exercícios.

Proposição P.2.5. *Para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ de V^3 e qualquer escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, vale:*

1. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$; *(distributiva)*
2. $\vec{u} \cdot (\lambda\vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$;
3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$; *(comutativa)*
4. *Se* $\vec{u} \neq \vec{0}$, *então* $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$.

Demonstração. Tarefa! (use as coordenadas dos vetores em uma fixada base ortonormal). □

Nota.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Longrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$?
- Faz sentido as expressões: $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$ e $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$?
- Se sim, vale $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$? (é associativa?)

Aula 7

Exemplo P.2.6. Sejam $\vec{w}$ um vetor não nulo e T o conjunto dos vetores em V^3 que são ortogonais a $\vec{w}$. Prove que:

(a) $\vec{w} \notin T$;

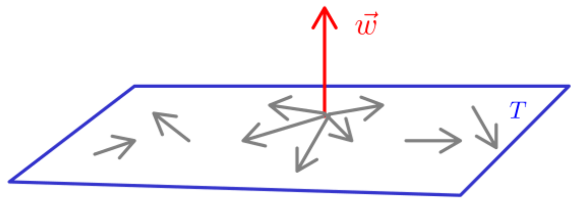
(b) Qualquer combinação linear de vetores em T pertence a T;

(c) Se $\vec{u}, \vec{v} \in T$ são LI, então $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI;

(d) Três vetores quaisquer de T são LD; *e portanto 3 vetores quaisquer de T são coplanares ("existem representantes que estão em um mesmo plano")*

(e) Se $\vec{u}, \vec{v} \in T$ são LI, então $\vec{u}, \vec{v}$ geram T, isto é, todo vetor de T é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

T é chamado **plano ortogonal** a $\vec{w}$.



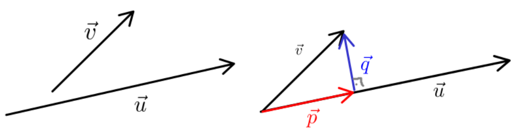
P.2.1 Projeção Ortogonal

Motivação: A projeção será usada na construção de base ortonormal.

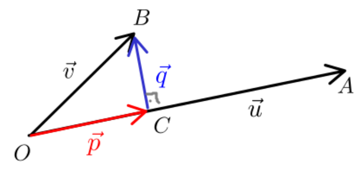
Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em V^3, é possível decompor o vetor $\vec{v}$ como soma de dois vetores $\vec{p}, \vec{q}$,

$$\vec{v} = \vec{p} + \vec{q},$$

de forma que $\vec{p}$ seja paralelo a $\vec{u}$ e $\vec{q}$ seja ortogonal a $\vec{u}$?



- O, A, B tais que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$
- C: ponto de intersecção da reta perpendicular à reta OA que passa por B



- Por construção (geométrica), os vetores

$$\vec{p} := \overrightarrow{OC}, \qquad \vec{q} := \overrightarrow{CB}$$

satisfazem:

$$\vec{p} \parallel \vec{u}, \qquad \vec{q} \perp \vec{u}, \qquad \vec{v} = \vec{p} + \vec{q}.$$

Definição P.2.7. Seja $\vec{u}$ um vetor não nulo em V^3. Dado um vetor $\vec{v}$, a **projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$** é o vetor $\vec{p}$, denotado por $proj_{\vec{u}}\vec{v}$, que satisfaz as condições:

$$\vec{p} \parallel \vec{u} \qquad \text{e} \qquad (\vec{v} - \vec{p}) \perp \vec{u}.$$

Sempre existe o vetor projeção ortogonal de um vetor $\vec{v}$ sobre $\vec{u} \neq \vec{0}$?

Ele é único?

No caso de existir, temos uma expressão analítica para o vetor projeção $\vec{p}$?

Proposição P.2.8. *Seja $\vec{u}$ um vetor não nulo em V^3. Para qualquer vetor $\vec{v}$, existe uma única projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ dada por*

$$\boxed{proj_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\right)\vec{u},}$$

cuja norma é

$$\|proj_{\vec{u}}\vec{v}\| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\|}.$$

Exemplo P.2.9. Ver Exercício 26 em Slide de Exercícios.

Vimos como é fácil calcular o produto escalar de dois vetores e, portanto, é fácil calcular:

- a norma de vetores, $\left(\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)$

- a medida angular entre vetores, $\left(\theta = \arccos\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right)$

- a projeção ortogonal, $\left(proj_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}\right)$

quando as coordenadas dos vetores são em relação a uma **base ortonormal**.

- E se a base não é ortonormal? 

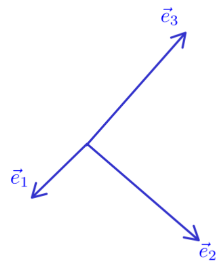
Se $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é uma base de V^3 que **não é ortonormal**, então é possível construir uma **base ortonormal** $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ a partir de E!

Como??

Nota. Obtendo a base B, podemos fazer a mudança de base de E (não ortonormal) para B (ortonormal) e trabalhar sempre com as coordenadas dos vetores em relação à base ortonormal B, onde é fácil fazermos os cálculos!!

P.2.2 Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt

Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3.

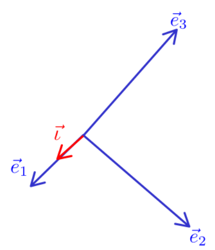


- **Construção de $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ ortonormal a partir de E:**

  Ver uma simulação no Wikipedia.

1. Escolher $\vec{\imath}$ como o versor $\vec{e}_1$:

$$\vec{\imath} = \frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|}.$$

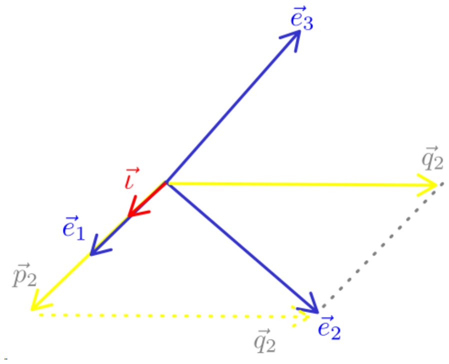


Claro que

$$\|\vec{\imath}\| = 1.$$

2. Decompor $\vec{e}_2$ em dois vetores $\vec{p}_2$ e $\vec{q}_2$ tais que:

- $\vec{e}_2 = \vec{p}_2 + \vec{q}_2$
- $\vec{p}_2 \parallel \vec{\imath}$
- $\vec{q}_2 \perp \vec{\imath}$.



Sabemos que

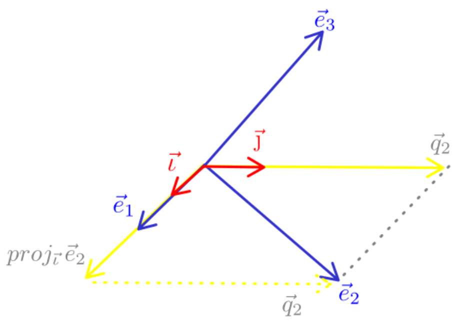
$$\vec{p}_2 \;=\; proj_{\vec{\imath}}\vec{e}_2 = \left(\frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{\imath}}{\|\vec{\imath}\|^2}\right)\vec{\imath} = (\vec{e}_2 \cdot \vec{\imath})\vec{\imath} \quad \text{e} \qquad \vec{q}_2 = \vec{e}_2 - \vec{p}_2.$$

Logo,

$$\vec{q}_2 = \vec{e}_2 - (\vec{e}_2 \cdot \vec{\imath})\vec{\imath}.$$

Escolha[1,2],

$$\vec{\jmath} = \frac{\vec{q}_2}{\|\vec{q}_2\|}.$$



Claro que

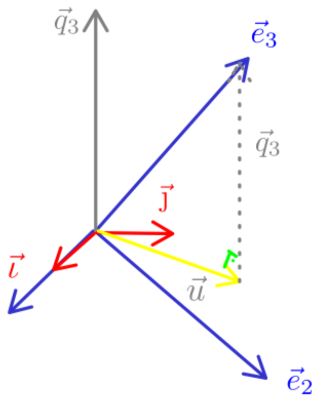
$$\|\vec{\jmath}\| = 1 \qquad \text{e} \qquad \vec{\jmath} \perp \vec{\imath}.$$

[1] $\vec{q}_2 \neq \vec{0}$ pois $\{\vec{e}_2, \vec{\imath}\}$ é LI.

[2] $\vec{\imath}$ é paralelo a $\vec{e}_1$ e $\vec{\jmath}$ é combinação linear de $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$

3. Decompor $\vec{e}_3$ em dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{q}_3$ tais que:

- $\vec{e}_3 = \vec{u} + \vec{q}_3$
- $\vec{u}$, $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ são coplanares;
- $\vec{q}_3$ é ortogonal a $\vec{\imath}$ e a $\vec{\jmath}$.



$\vec{u}$ é a projeção ortogonal de $\vec{e}_3$ sobre plano gerado por $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$

Como $\vec{u}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}$ são coplanares, segue do Exemplo P.2.6-(e)[a] que

$$\vec{u} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}, \quad \text{para algum } \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Temos

- $\vec{q}_3 = \vec{e}_3 - \vec{u}$;
- $\vec{u} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}$;
- $\vec{q}_3$ é ortogonal a $\vec{\imath} \Longrightarrow \vec{\imath} \cdot \vec{q}_3 = 0$;
- $\vec{q}_3$ é ortogonal a $\vec{\jmath} \Longrightarrow \vec{\jmath} \cdot \vec{q}_3 = 0$.

Logo,

$$\vec{q}_3 = \vec{e}_3 - \vec{u} = \vec{e}_3 - \alpha\vec{\imath} - \beta\vec{\jmath}$$

e

$$\vec{\imath} \cdot \vec{q}_3 = 0 \Longleftrightarrow \vec{\imath} \cdot (\vec{e}_3 - \alpha\vec{\imath} - \beta\vec{\jmath}) = 0 \Leftrightarrow \vec{\imath} \cdot \vec{e}_3 - \alpha\vec{\imath} \cdot \vec{\imath} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\vec{\imath} \cdot \vec{e}_3}{\vec{\imath} \cdot \vec{\imath}}$$

e

$$\vec{\jmath} \cdot \vec{q}_3 = 0 \Longleftrightarrow \vec{\jmath} \cdot (\vec{e}_3 - \alpha\vec{\imath} - \beta\vec{\jmath}) = 0 \Leftrightarrow \vec{\jmath} \cdot \vec{e}_3 - \beta\vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath} = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{\vec{\jmath} \cdot \vec{e}_3}{\vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath}}.$$

Logo,

$$\boxed{\vec{q}_3 = \vec{e}_3 - (\vec{\imath} \cdot \vec{e}_3)\vec{\imath} - (\vec{\jmath} \cdot \vec{e}_3)\vec{\jmath}.}$$

[a] $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ LI

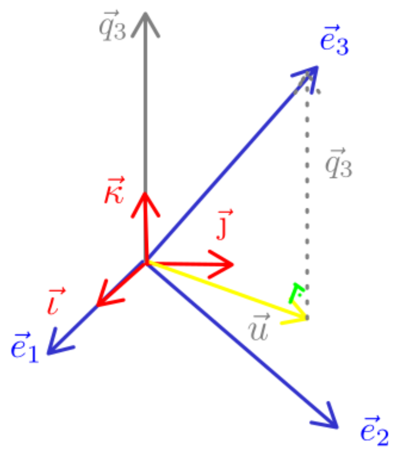
Escolha[3],

$$\vec{\kappa} = \frac{\vec{q}_3}{\|\vec{q}_3\|}.$$

Claro que

$$\|\vec{\kappa}\,\| = 1 \qquad \text{e} \qquad \vec{\kappa} \perp \vec{\imath},\ \vec{\kappa} \perp \vec{\jmath}.$$

A base $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ é ortonormal!



Nota. A matriz de mudança de base E para B é uma matriz triangular superior:

$$M_{EB} = \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix}.$$

---

[3] $\vec{q}_3 \neq \vec{0}$ pois pelo Exemplo P.2.6-(c) temos que $\{\vec{e}_3, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ é LI.

Exemplo P.2.10. Ver Exercícios 27 - 29 em Slide de Exercícios.

Aula 8

Alguma propriedade a mais sobre a relação entre M_{EB} e M_{BE}?

- $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ base e $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ base ortonornal de V^3
- $\vec{e}_1 = (a, b, c)_B$; $\quad \vec{e}_2 = (d, e, f)_B$; $\quad \vec{e}_3 = (g, h, i)_B$;
- $M_{BE} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$
-

$$(M_{BE})^t M_{BE} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

Proposição P.2.11. *Sejam $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base e $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ uma base ortonormal de V^3. Então, E é ortonormal se, e somente se,*

$$(M_{BE})^t M_{BE} = Id. \tag{P.2.1}$$

Corolário P.2.12. *Se B e E são bases ortonormais de V^3, então* [4]

$$M_{EB} = (M_{BE})^{-1} = (M_{BE})^t$$

e

$$\det M_{BE} = 1 \quad \textit{ou} \quad \det M_{BE} = -1.$$

Nota.

1. É muito mais fácil encontrar a matriz transposta que a matriz inversa de uma matriz.

2. Matrizes M que satisfazem a condição (P.2.1), isto é,

$$M^t M = Id,$$

   são chamadas **matrizes ortogonais**.

3. Dada uma matriz M, ela pode ser pensada como uma matriz de mudança M_{BE} de uma base ortonormal B para uma base E e
   M é ortogonal se, e somente se E é ortonormal.

   Portanto, M é ortogonal se, e somente se,

   - Cada coluna de M constitui um vetor unitário.
   - Duas a duas de quaisquer colunas (distintas) de M constituem vetores ortogonais.

Exemplo P.2.13. Ver Exercício 30 em Slide de Exercícios.

[4]Veja Nota na pág. B.9