

Conteúdo

C1	Transformações lineares não limitadas	C2
C1.1	Aula 9 Exemplos	C4
C1.2	Fechadas	C4
C2	Adjunto	C7
	Aula 10	C9
C3	Relações de Ortogonalidade	C12
C3.1	Caracterização de Transformações Lineares com Imagem Fechada	
	Aula 11	C18
C4	Exercícios	C26

C1 Transformações lineares não limitadas

Motivação: Vale considerar transformações $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ lineares?

- X, Y e.m.: contínua $\implies$ fechada
- (TGF) X, Y Banach: linear fechada $\implies$ contínua/limitada
 $\therefore$ X, Y Banach, $T \in \mathcal{L}_?(X, Y)$: fechada $\iff$ limitada
 as únicas transformações $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ lineares fechadas que não são limitadas estarão definidas em subesp. vet. próprios de X
- Por que considerar aplicações fechadas?
 - * aplicações de interesse são fechadas
 - * ser fechada é hipótese mais do fraca que ser contínua e ainda assim obtém-se resultados importantes

Exemplo. Considere a norma uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$, o operador diferencial

$$T : (C^1([0, 1]), \|f\|_\infty)_{\text{não é Banach}} \rightarrow (C([0, 1]), \|f\|_\infty)_{\text{Banach}} : f \mapsto f'$$

é linear, não é limitado mas é fechado.



Pergunta:

Conseguimos X Banach de modo que $C^1([0, 1]) \overset{s.e.v.}{\subset} X$ e o operador diferencial $T : C^1([0, 1]) \subset X \rightarrow C([0, 1])$ ainda é fechado?

Sejam X, Y espaços de Banach.

Definição C1.1 (Trans. lin. “não-limitada”). Uma **transformação linear “não-limitada” de X em Y** é uma transformação linear $T : D(T) \rightarrow Y$, onde $D(T)$ é um subespaço de X .

Chamamos

- $D(T)$ é o **Domínio** de T ,
- $G(T) = \{(x, Tx) \in X \times Y : x \in D(T)\} \subseteq X \times Y$ é o **Gráfico** de T ,
- $R(T) = \{Tx \in Y : x \in D(T)\} \subseteq Y$ é a **Imagem** (Range) de T ,
- $N(T) = \{x \in D(T) : Tx = 0\}$ é o **Núcleo** de T .

T é dita

- **densamente definida** se $D(T)$ é denso em X ($\overline{D(T)} = X$)
- **limitada** se $\exists c \geq 0$ tal que $\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X, \forall x \in D(T)$
- **fechada** se $G(T)$ é fechado em $X \times Y$



Comparação:

- $T \in \mathcal{L}_?(X, Y)$ é fechada se $G(T)$ é fechado (pag. B23):
 - se $X \times Y \ni (x_n, T(x_n)) \rightarrow (x, y) \in X \times Y$ então $y = Tx$
 - equiv se $X \times Y \ni (x_n, T(x_n)) \rightarrow (0, y) \in X \times Y$ então $y = 0$
- T não-limitada é fechada se $G(T)$ é fechado em $X \times Y$:
 - se $D(T) \times Y \ni (x_n, T(x_n)) \rightarrow (x, y) \in X \times Y$ então $x \in D(T)$ e $y = Tx$
 -

⁰ X, Y são e.v.n. sobre $\mathbb{K}$ e somente isso bastava para a definição.

C1.1 Exemplos

Aula 9

Exemplo C1.2. Considere o operador diferencial $T : f \mapsto Tf = f'$.

1. $T : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ está mal definida
2. $T : \underbrace{(C^1([0, 1]), \|f\|_\infty)}_{X \text{ não é Banach}} \rightarrow \underbrace{(C([0, 1]), \|f\|_\infty)}_{Y \text{ Banach}}$ é linear de X em Y , não é limitado mas é fechado.
3. $T : \underbrace{(C^1([0, 1]), \|f\| = \sup |f| + \sup |f'|)}_{X \text{ Banach}} \rightarrow \underbrace{(C([0, 1]), \|f\|_\infty)}_{Y \text{ Banach}}$ é linear de X em Y limitado/contínuo e fechado (TGF B4.14)
4. $T : C^1([0, 1]) \xrightarrow{s.e.v} Y \rightarrow Y$ é um operador linear “não-limitado” de Y em Y que não é limitado mas é fechado.



Exemplo C1.3. Considere o operador identidade $T : x \mapsto Tx = x$.

1. $T : X \rightarrow X$ é: linear limitado e fechado
2. $T : D(T) \xrightarrow{s.e.v} X \rightarrow X$ tal que $\overline{D(T)} = X$ (densamente definido) é: linear não-limitado de X em X que é limitado mas não é fechado.



C1.2 Fechadas

Proposição. *Sejam X, Y espaços de Banach, $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ linear.*

- *Se $D(T)$ é fechado em X , então T é fechada se e só se T é limitada.*
- *Se T é fechada e limitada, então $D(T)$ é fechado em X .*



Demonstração. Exercício.



Observação C1.4. Se $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ é linear limitada e densamente definida, podemos estendê-la a uma única transformação linear limitada em X .

Neste caso, se $D(T) \neq X$ então T não é fechada.

Queremos: $\exists! \bar{T} : X \rightarrow Y$ linear limitada tal que $\bar{T}|_{D(T)} = T$

- $x \in X = \overline{D(T)}, \exists \{x_n\} \subset D(T); x_n \rightarrow x \in X$
- defina $\bar{T} : X \rightarrow Y : x \mapsto \bar{T}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n$

Af.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = y \in Y$ é único

Af.2. $\bar{T}$ é linear, limitada e $\bar{T}|_{D(T)} = T$

Af.3. $\bar{T}$ é única



As aplicações de interesse estão relacionadas principalmente com transformações lineares densamente definidas e fechadas.

Observação. O Teorema da aplicação aberta e algumas de suas consequências se estendem ao caso de T fechada:

Teorema da Aplicação aberta para T fechada

Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in L(X, Y)$ ~~$T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$~~ linear fechada.

- se T é sobrejetora, então T é aberta (se A é um aberto de X então $T(A \cap D(T))$ é aberto).^[TL80, p.212]
Além disso, existe $C > 0$ tal que para cada $y \in Y$ pode-se encontrar $x \in D(T)$ tal que

$$\|x\| \leq C\|y\| \quad \text{e} \quad y = Tx.$$

- se T é bijetora, então T^{-1} é contínua: $T^{-1} \in L(Y, X)$.

Exercícios

- Exercício C1.5.** • Considere $T : (c_{00}, \| \cdot \|_1) \rightarrow \ell_1 : (x_i) \mapsto (ix_i)$
 é bem definido? limitado? contínuo? fechado?
- Considere $T : c_{00} \subseteq \ell_1 \rightarrow \ell_1 : (x_i) \mapsto (ix_i)$
 é limitado? densamente definido? fechado?
 - Considere $T : c_{00} \subseteq \ell_1 \rightarrow \mathbb{K} : (x_i) \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} x_i$
 é limitado? contínuo? fechado?
 - Considere $T : c_{00} \subseteq (c_0, \| \cdot \|_{\infty}) \rightarrow \mathbb{K} : (x_i) \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} x_i$
 é limitado? contínuo? fechado?



C2 Adjunto

Definição C2.1 (Adjunto (de contínuo)).

Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in L(X, Y)$. Definimos o **adjunto de T** como

$$T^* : Y^* \rightarrow X^* : \phi \mapsto \phi \circ T.$$

★

Objetivo: definir adjunto para operador não limitado

$$T : D(T) \underset{s.e.v.}{\subset} X \rightarrow Y \quad \text{linear densamente definido}$$

$$T^* : D(T^*) \subset Y^* \rightarrow X^* : g \mapsto T^*g = f = ??$$

- $D(T^*) = ??$ seja s.e.v. de Y^*
- tenhamos a garantia de que dada $g \in D(T^*)$, $\exists! f \in X^*$ tal que $T^*g = f$

Definição C2.2 (Adjunto (de não-limitado)).

Sejam X, Y espaços de Banach e $T : D(T) \underset{X}{\subset} Y$ uma *transformação linear densamente definida*. Definimos o **adjunto de T** como

$$T^* : D(T^*) \underset{s.e.v.}{\subseteq} Y^* \rightarrow X^* : g \mapsto T^*g = f$$

onde

$$D(T^*) = \{g \in Y^* : g \circ T : D(T) \rightarrow \mathbb{K} \text{ é limitada}\}$$

e $f = \overline{g \circ T}$ é a única extensão linear contínua em X (Obs. C1.4) de $g \circ T$. ★

Vale então

$$(T^*g)(x) = f(x) = (g \circ T)(x) = g(Tx) \quad \forall x \in D(T), g \in D(T^*). \quad (\text{C2.1})$$

Se para $f \in X^*$ substituirmos a notação $f(x)$ por $\langle f, x \rangle_{X^*, X}$, a relação acima torna-se:

$$\langle T^*g, x \rangle_{X^*, X} = \langle g, Tx \rangle_{Y^*, Y} \quad \forall x \in D(T), g \in D(T^*).$$

Teorema C2.3. *Seja $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ uma transformação linear densamente definida (X, Y Banach). Então*

(a) T^* é linear e fechado.

(b) Se T é fechada então $D(T^*)$ separa os pontos de Y :

$$\forall y \in Y \setminus \{0\}, \exists g \in D(T^*); g(y) \neq 0.^1$$

Spoiler: Se Y é reflexivo então $D(T^*)$ é denso em Y^* . Poderá ser definido o adjunto do adjunto.

(c) Se $T \in L(X, Y)$ então $T^* \in L(Y^*, X^*)$ e $\|T\| = \|T^*\|$. $\triangleleft$

Demonstração.

(a) T^* é linear:

- $\lambda \in \mathbb{K}, g_1, g_2 \in D(T^*) \implies \exists! f_1, f_2; T^*g_i = f_i, i = 1, 2$
 $f_1 + \lambda f_2$ é a única extensão linear contínua de $(g_1 + \lambda g_2) \circ T$

(a) T^* é fechado:

- $D(T^*) \times X^* \ni (g_n, T^*g_n) \rightarrow (g, f) \in Y^* \times X^*$

Queremos: $g \in D(T^*)$ e $f = T^*g \Leftrightarrow g \circ T : D(T) \rightarrow \mathbb{K}$ ltda. e $T^*g(x) = f(x), x \in X$

Temos $g_n \in D(T^*)$ e :

- (i) $g_n \rightarrow g$ em $Y^* \iff \|g_n - g\|_{Y^*} \rightarrow 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y) = g(y), y \in Y$
- (ii) $T^*g_n \rightarrow f$ em $X^* \iff \|T^*g_n - f\|_{X^*} \rightarrow 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} T^*g_n(x) = f(x), x \in X$

Queremos $|g(Tx)| \leq c \|x\|_X$ para todo $x \in D(T)$, mas $g(Tx) = ???$

- $x \in D(T) \implies y = Tx \in Y$ e

$$g(Tx) \stackrel{(i)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(Tx) \stackrel{(C2.1)}{=} \lim_{g_n \in D(T^*)} T^*g_n(x) \stackrel{(ii)}{=} f(x) \quad (*)$$

- $|g(Tx)| = |f(x)| \leq \|f\|_{X^*} \|x\|_X$ para todo $x \in D(T)$

$\therefore g \in D(T^*)$

¹Portanto, se $g(y) = 0$ para toda $g \in D(T^*)$, então $y = 0$.

- Por (*):

$$T^*g(x) \stackrel{(C2.1)}{=}_{g \in D(T^*)} g(T(x)) = f(x), \quad \forall x \in D(T)$$

$\therefore$ em particular, T^*g é linear limitada em $D(T)$ e vale:

$$\overline{T^*g(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} T^*g(x_n) \stackrel{(C2.1)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} gT(x_n) \stackrel{(*)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \stackrel{f \in X^*}{=} \overline{f(x)}, \quad \forall x \in \overline{D(T)}$$

pois

$$x \in \overline{D(T)} \implies x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad x_n \in D(T)$$

.....

Aula 10

(b) Se T é fechada então $D(T^*)$ separa os pontos de Y

Teorema B2.4. Se M é um subespaço fechado de X e $x_0 \in X \setminus M$, então $\exists f \in X^*$;

$$f|_M = 0, \quad \|f\|_{X^*} = 1 \quad \text{e} \quad f(x_0) = d(x_0, M) = \inf_{m \in M} \|x_0 - m\| > 0.$$

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y \quad (p.A13)$$

- $y_0 \in Y \setminus \{0\}$

Queremos: $g = ?? \in D(T^*); g(y_0) \neq 0$

- $(0, y_0) \notin G(T)$ que é s.e.v. fechado de $X \times Y$
- $\exists f \in (X \times Y)^*; f|_{G(T)} = 0, \quad \|f\|_{(X \times Y)^*} = 1 \quad \text{e} \quad f(0, y_0) = d > 0.$
- Note: $f(x, y) = f(x, 0) + f(0, y)$ para todo $(x, y) \in X \times Y$
- $h : X \rightarrow \mathbb{K} : x \mapsto h(x) = f(x, 0)$ está em X^*
- $g : Y \rightarrow \mathbb{K} : y \mapsto g(y) = f(0, y)$ está em Y^* e $g(y_0) \neq 0$

falta provar que $g \circ T : D(T) \rightarrow \mathbb{K}$ é limitada

$$g(Tx) = f(0, Tx) = f(x, Tx) - f(x, 0) \stackrel{f|_{G(T)}=0}{=} 0 - h(x), \quad x \in D(T)$$

$$(g \circ T)(x) = -h(x), \quad x \in D(T), \quad \text{e } h \text{ é limitada em } X$$

.....

(c) $T \in L(X, Y) \implies T^* \in L(Y^*, X^*)$ e $\|T\| = \|T^*\|$

- $D(T^*) = \{g \in Y^* : g \circ T : D(T) \rightarrow \mathbb{K} \text{ é limitada}\} \stackrel{T \text{ ltdo}}{=} Y^*$

Queremos: T^* limitado $\iff \|T^*g\|_{X^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} |T^*g(x)| \leq c \|g\|_{Y^*}, \forall g \in Y^*$

- $x \in X = D(T); \|x\| \leq 1$ e $g \in Y^* = D(T^*)$

$$|T^*g(x)| \stackrel{(\text{C2.1})}{=} |gT(x)| \stackrel{g \in Y^*}{\leq} \|g\|_{Y^*} \|Tx\|_Y \stackrel{T \in L}{\leq} \|g\| \|T\| \|x\| \leq \underbrace{\|T\|}_c \|g\|$$

Queremos: $\|T^*\| = \|T\|$

- $\|T^*\| = \sup_{\|g\| \leq 1} \|T^*g\|$

$$\therefore \|T^*\| \leq \|T\|$$

- $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|_Y$ e $\|Tx\|_Y = \sup_{\|f\|_{Y^*}=1} |f(Tx)|$

Exercício B2.5. Se X é um e.v.n. não trivial, vale $\|x\|_X = \max_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|_{X^*}=1}} |f(x)|$.

$$|f(Tx)| \stackrel{(\text{C2.1})}{=} |T^*(fx)| \stackrel{T^* \in L}{\leq}_{f \in Y^*} \|T^*\| \|f\| \|x\|$$

$$\therefore \|T\| \leq \|T^*\|$$

□

Exercícios

Exercício C2.4. Sejam $p \in [1, \infty)$ e $q = \frac{p}{p-1} \in (1, \infty]$. Então o dual de ℓ_p é isometricamente isomorfo a ℓ_q , $(\ell_p)^* \approx \ell_q$. [Muj, p. 44] ^a ★

Exercício C2.5. Calcule o adjunto dos operadores

1. $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax$ sendo A uma matriz $m \times n$
2. $T : D(T) \subseteq \ell_1 \rightarrow \ell_1 : (x_j) \mapsto (2^{-j}x_j)$
3. $T : D(T) \subseteq \ell_1 \rightarrow \ell_1 : (x_j) \mapsto (x_{j+1} + x_j)$
4. $T : D(T) \subseteq \ell_1 \rightarrow \ell_1 : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$
5. $T : D(T) \subseteq \ell_3 \rightarrow \ell_2 : x \mapsto 2x$
6. $T : D(T) \subseteq \ell_2 \rightarrow \ell_3 : x \mapsto 2x$ ★

Exercício C2.6. Dados $S \in L(X; Y)$, $T \in L(Y; G)$, prove que $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$. Deduza que se T é um isomorfismo topológico (resp. isomorfismo isométrico), então T^* isomorfismo topológico (resp. isomorfismo isométrico). ★

Exercício C2.7. $(X \times Y)^* \approx X^* \times Y^*$ (isometricamente isomorfos). ^b ★

$${}^aT : \ell_q \rightarrow \ell_p^* : y \mapsto T(y) = \phi_y \text{ onde } \phi_y : \ell_p \rightarrow \mathbb{K} : x \mapsto \phi_y(x) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j x_j = \langle y, x \rangle$$

$${}^bT : (X \times Y)^* \rightarrow X^* \times Y^* : f \mapsto (h, g) \text{ onde } f(x, y) = f(x, 0) + f(0, y) =: h(x) + g(y)$$

$$(h, g)(x, y) = h(x) + g(y)$$

$$\langle (h, g), (x, y) \rangle = \langle h, x \rangle + \langle g, y \rangle$$

C3 Relações de Ortogonalidade

Sejam X um e.v.n. sobre $\mathbb{K}$, $M \subseteq X$ e $N \subseteq X^*$ (subconjuntos). Definimos os conjuntos **ortogonais**² de M e N , resp., por

$$M^\perp = \{f \in X^* : f(x) = 0, \forall x \in M\}$$

$$N^\perp = \{x \in X : f(x) = 0, \forall f \in N\}.$$

Proposição C3.1.

(a) $M^\perp$, $N^\perp$ são subespaços fechados (de X^* e de X resp.)

(b) se M, N são subespaços (de X e de X^* resp.), então vale

$$(M^\perp)^\perp = \overline{M} \quad \text{e} \quad (N^\perp)^\perp \supset \overline{N}$$

(**Spoiler:** se X é reflexivo então $(N^\perp)^\perp = \overline{N}$)

◁

Demonstração. (a) Exercício.

(b)

- $(M^\perp)^\perp = \{x \in X : f(x) = 0, \forall f \in M^\perp\}$ é fechado (por (a))

Queremos: $\overline{M} \subset (M^\perp)^\perp$ e portanto basta mostrar $M \subset (M^\perp)^\perp$

- $x \in M \implies f(x) = 0, \forall f \in M^\perp$ (def. de $M^\perp$)
- $x \in (M^\perp)^\perp$ (def. de $(M^\perp)^\perp$)

Queremos: $(M^\perp)^\perp \subset \overline{M}$ e portanto basta mostrar $\nexists x \in (M^\perp)^\perp \setminus \overline{M}$

- supor que $\exists x_0 \in (M^\perp)^\perp \setminus \overline{M} \subset X \setminus \overline{M}$

Teorema B2.4. $\overline{M} \stackrel{\text{fechado}}{\subset}_{s.e.v} X$ e $x_0 \in X \setminus \overline{M}, \exists f \in X^*; f|_{\overline{M}} = 0, f(x_0) > 0$.

- $\exists f \in X^*; f|_{\overline{M}} = 0$ e $f(x_0) \neq 0 \implies f \in M^\perp$ e $f(x_0) \neq 0$
- $x_0 \in (M^\perp)^\perp$ e $f \in M^\perp \implies f(x_0) = 0$

²A notação mais comum é $N^\perp$.

- $(N^\perp)^\perp = \{f \in X^* : f(x) = 0, \forall x \in N^\perp\}$ é fechado (por (a))

Queremos: $\overline{N} \subset (N^\perp)^\perp$ e basta mostrar $N \subset (N^\perp)^\perp$

- $f \in N \implies f(x) = 0, \forall x \in N^\perp$ (def. de $N^\perp$)
- $f \in (N^\perp)^\perp$ (def. de $(N^\perp)^\perp$)

□

Exercícios

Exercício C3.2. Faça o exercício 1.16 (p. 24) do [Bre11]. ^a ★

Exercício C3.3. Se M_1, M_2 são subespaços vetoriais do e.v.n. X com $M_1 \subseteq M_2$ e N_1, N_2 subespaços vetoriais de X^* com $N_1 \subseteq N_2$, então $M_2^\perp \subseteq M_1^\perp$ e $N_2^\perp \subseteq N_1^\perp$. ★

Exercício C3.4. (!) Mostre que, se M é subespaço de X
 $M^\perp = \{0\} \iff \overline{M} = X$
 Mostre que o mesmo não vale para $N^\perp$ e X^* . ★

Exercício C3.5. Sejam Y e Z subespaços vetoriais fechados do e.v.n. X , então

$$Y \cap Z = (Y^\perp + Z^\perp)^\perp, \quad (\text{C3.1})$$

$$Y^\perp \cap Z^\perp = (Y + Z)^\perp, \quad (\text{C3.2})$$

$$(Y \cap Z)^\perp \supseteq \overline{Y^\perp + Z^\perp}, \quad (Y^\perp \cap Z^\perp)^\perp = \overline{Y + Z}. \quad (\text{C3.3})$$

^a $X = \ell_1, X^* = \ell_\infty, N = c_0$ s.e. fechado de ℓ_∞ (Ex. A3.17): $N^\perp = \{0\} \implies (N^\perp)^\perp = \ell_\infty \not\subseteq \overline{N} = c_0$

Os gráficos de T e T^* estão ligados por uma **relação de ortogonalidade**.

Proposição C3.6. *Sejam X, Y espaços de Banach e $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ uma transformação linear densamente definida. Seja*

$$\mathcal{J} : Y^* \times X^* \rightarrow X^* \times Y^* : (g, f) \mapsto (-f, g)$$

então,

$$G(T)^\perp = \{(-T^*g, g) : g \in D(T^*)\} = \mathcal{J}(G(T^*)).$$

◁

Demonstração.

A segunda igualdade segue da definição de imagem.

$$\begin{aligned} \bullet G(T^*) &= \{(g, f) \in Y^* \times X^* : f = T^*g, g \in D(T^*)\} \\ &= \{(g, T^*g) \in Y^* \times X^* : g \in D(T^*)\} \end{aligned}$$

Para a primeira igualdade:

$$\begin{aligned} \bullet G(T)^\perp &= \{h \in (X \times Y)^* : h(a) = 0, a = (x, Tx) \in G(T)\} \\ &= \{(f, g) \in X^* \times Y^* : (f, g)(x, Tx) = 0, x \in D(T)\} \end{aligned}$$

▷

$$\begin{aligned} (-T^*g, g) \in G(T)^\perp, g \in D(T^*) &\iff (-T^*g, g)(x, Tx) = 0, x \in D(T), g \in D(T^*) \\ &\iff -T^*g(x) + g(Tx) = 0, x \in D(T), g \in D(T^*) \\ &\stackrel{(C2.1)}{\iff} -g(Tx) + g(Tx) = 0, x \in D(T), g \in D(T^*) \checkmark \end{aligned}$$

◁

$$\begin{aligned} (f, g) \in G(T)^\perp &\iff (f, g)(x, Tx) = 0, x \in D(T), g \in Y^* \\ &\iff f(x) = -g(Tx), x \in D(T), g \in Y^* \\ &\stackrel{f \text{ ltda}}{\stackrel{g \circ T \text{ ltda}}{\iff}} f(x) = -g(Tx), x \in D(T), g \in D(T^*) \\ &\stackrel{(C2.1)}{\iff} f(x) = -T^*(gx), x \in D(T), g \in D(T^*) \\ &\implies (f, g) = (-T^*g, g), g \in D(T^*) \checkmark \end{aligned}$$

◻

Teorema C3.7. *Seja $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ linear densamente definido. Então*

$$i*) \ N(T) \subseteq R(T^*)^\perp$$

$$ii*) \ \boxed{N(T^*) = R(T)^\perp} \quad \text{e logo} \quad iv*) \ \boxed{N(T^*)^\perp = \overline{R(T)}}$$

Se T é também fechado então

$$i) \ \boxed{N(T) = R(T^*)^\perp} \quad \text{e logo} \quad iii) \ \boxed{N(T)^\perp \supset \overline{R(T^*)}}$$

(**Spoiler:** se X é reflexivo então $N(T)^\perp = \overline{R(T^*)}$) $\triangleleft$

Demonstração. **iv) e iii)** seguem usando a Proposição C3.1-(b).

Proposição C3.1 (b): se M, N são subespaços de X e de X^* resp., então vale

$$(M^\perp)^\perp = \overline{M} \quad \text{e} \quad (N^\perp)^\perp \supset \overline{N}.$$

$$ii) \ N(T^*) = R(T)^\perp$$

$$R(T) = \{Tx \in Y : x \in D(T) \subseteq X\} \subseteq Y$$

$$N(T^*) = \{f \in D(T^*) \subseteq Y^* : T^*f = 0\} \subset Y^*$$

$$M \subset X : M^\perp = \{g \in X^* : g(x) = 0, \ \forall x \in M\}:$$

$$R(T)^\perp = \{f \in Y^* : f(y) = 0, \ \forall y \in R(T)\}$$

$$\begin{aligned} f \in N(T^*) &\iff T^*f = 0 \text{ e } f \in D(T^*) \\ &\iff T^*f(x) = 0, \ \forall x \in X \text{ e } f \in D(T^*) \\ &\iff T^*f(x) = 0, \ x \in D(T) \text{ e } f \in D(T^*)^3 \\ &\stackrel{(C2.1)}{\iff} f(Tx) = 0, \ x \in D(T) \text{ e } f \in D(T^*) \\ &\iff f \in R(T)^\perp^4 \end{aligned}$$

³volta: $D(T)$ é denso em X

⁴volta: $f \in Y^*$ tal que $f(Tx) = 0 \ \forall x \in D(T)$ implica $f \circ T$ limitada em $D(T)$ e portanto $f \in D(T^*)$

$i*) N(T) \subseteq R(T^*)^\perp$

$$R(T^*) = \{T^*f \in X^* : f \in D(T^*)_{\subset Y^*}\} \subseteq X^*$$

$$N(T) = \{x \in D(T) : Tx = 0\} \subset X$$

$$N \subset X^* : N^\perp = \{x \in X : f(x) = 0, \forall f \in N\}:$$

$$R(T^*)^\perp = \{x \in X : g(x) = 0, \forall g \in R(T^*)\}$$

$$\begin{aligned} x \in N(T) &\iff Tx = 0 \text{ e } x \in D(T) \\ &\iff f(Tx) = 0, \forall f \in Y^* \text{ e } x \in D(T) \quad ^5 \\ &\implies f(Tx) = 0, f \in D(T^*) \text{ e } x \in D(T) \quad ^6 \\ &\stackrel{(C2.1)}{\iff} T^*f(x) = 0, f \in D(T^*) \text{ e } x \in D(T) \\ &\implies x \in R(T^*)^\perp \end{aligned}$$

$i) N(T) = R(T^*)^\perp$, se T é fechada

Queremos: $R(T^*)^\perp \subset N(T)$ e portanto basta mostrar $\nexists x \in R(T^*)^\perp \setminus N(T)$

Seja $x_0 \in R(T^*)^\perp \setminus N(T)$.

- $x_0 \in R(T^*)^\perp \implies x_0 \in X$ e $T^*f(x_0) = 0$ para toda $f \in D(T^*)$
- $x_0 \notin N(T) \implies \begin{cases} x_0 \notin D(T) \\ T(x_0) \neq 0 \end{cases} \implies (x_0, 0) \notin G(T) \stackrel[T \text{ fechada}]{s.e.v. \text{ fech.}} \subset X \times Y$

Teorema B2.4 [Existem muitos funcionais] Se M é um subespaço fechado de um e.v.n. $\tilde{X}$ e $y_0 \in X \setminus M$, então existe $f \in \tilde{X}^*$ tal que

$$h|_M = 0, \quad h(y_0) = d(y_0, M) > 0.$$

- $\exists h \in (X \times Y)^*$; $h(x_0, 0) \neq 0$ e $h|_{G(T)} = 0$
- $h \in (X \times Y)^* \implies h = (f, g)$ para alguma $f \in X^*$ e $g \in Y^*$
- $0 \neq h(x_0, 0) = f(x_0) + g(0) \implies f(x_0) \neq 0$

⁵volta: Teo. B2.4-(c): Y^* separa pontos

⁶podemos ir para a 1a. linha se T fechada: Teo. C2.3-(b): $D(T^*)$ separa pontos

$$\bullet \quad h|_{G(T)} = 0 \implies h(x, Tx) = \boxed{f(x) + g(Tx) = 0, x \in D(T)}$$

$$\implies g(Tx) = -f(x), x \in D(T)$$

$$\xRightarrow{f \in X^*} g \circ T \text{ limitada em } D(T)$$

$$\implies \boxed{g \in D(T^*)}$$

$$\therefore \boxed{T^*g(x_0) = 0}$$

$$\bullet \quad x_0 \in X = \overline{D(T)} \implies x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \text{ para alguma sequencia } \{x_n\} \subset D(T)$$

$$\begin{aligned} \boxed{T^*g(x_0)} &= T^*g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) \stackrel{T^*g \in X^*}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} T^*g(x_n) \stackrel{g \in D(T^*)}{=} \lim_{\substack{x \in D(T) \\ n \rightarrow \infty}} g(Tx_n) \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \stackrel{f \in X^*}{=} -f(x_0) \neq 0 \end{aligned}$$

□

Corolário C3.8. *Seja $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ linear densamente definido. Vale*

$$T \text{ sobre} \implies T^* \text{ inj} \quad (\text{C3.4})$$

$$(T \text{ fechada}) \quad T^* \text{ sobre} \implies T \text{ inj} \quad (\text{C3.5})$$

Se a dimensão de X (para (C3.5)) ou de Y (para (C3.4)) é finita, então valem as reciprocas. ◁

Demonstração. Exercício.

$$ii) \quad \boxed{N(T^*) = R(T)^\perp}$$

$$\text{Se } T \text{ é também fechado então } i) \quad \boxed{N(T) = R(T^*)^\perp}$$

□

C3.1 Caracterização de Transformações Lineares com Imagem Fechada Aula 11

Uma importância deste resultado é que Imagem fechada implica Imagem Banach e logo nos permite aplicar outros resultados.

Teorema C3.9. *Seja $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ uma transformação linear densamente definida e fechada. Então, são equivalentes: [TL80, p...240..][Rud73, p...96..]*

- | | |
|--------------------------------|----------------------------|
| $i) R(T) \text{ é fechada}$ | $iii) R(T) = N(T^*)^\perp$ |
| $ii) R(T^*) \text{ é fechada}$ | $iv) R(T^*) = N(T)^\perp$ |

 $\triangleleft$

$$\textcircled{iii} \iff \textcircled{i} \xRightarrow{**} \textcircled{iv} \implies \textcircled{ii} \xRightarrow{*} \textcircled{i}$$

Demonstração.

$iv) R(T^*) = N(T)^\perp \implies ii) R(T^*) \text{ é fechada}$

Segue diretamente da Proposição C3.1-(a)

Proposição C3.1.

- (a) $M^\perp, N^\perp$ são subespaços fechados (de X^* e de X resp.)
- (b)

$i) R(T) \text{ é fechada} \iff iii) R(T) = N(T^*)^\perp$

Segue do Teorema C3.7-iv):

Teorema C3.7. *Seja $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ densamente definido. Então*

$$ii) \text{ e logo } iv) \quad \boxed{N(T^*)^\perp = \overline{R(T)}}$$

$$\bullet R(T) \xrightarrow[\text{iv)}]{\text{Hip.i)}} \overline{R(T)} \xrightarrow[\text{iv)}]{T.C3.7} N(T^*)^\perp$$

$$\bullet \overline{R(T)} \xrightarrow[\text{iv)}]{T.C3.7} N(T^*)^\perp \xrightarrow[\text{iv)}]{\text{Hip.iii)}} R(T)$$

$T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ densamente definida e fechada:

$ii) R(T^*)$ é fechada $\implies i) R(T)$ é fechada

Queremos: $R(T) = \overline{R(T)}$

- consideramos $S = T| : D(T) \subseteq X \rightarrow \overline{R(T)} : x \mapsto Sx = Tx$
- S é linear, densamente definida, fechada e $R(S) = R(T)$

Queremos: S sobrejetora pois daí $R(T) = R(S) = \overline{R(T)}$

Lema C3.10. Seja $S : D(T) \subseteq X \rightarrow \text{Banach}$ densamente definido e fechado. Se existe $C > 0$; $\|\phi\| \leq C\|S^*\phi\|, \forall \phi \in D(S^*)$, então S é aberta e sobrejetora.

Precisamos: $\overline{R(T)}$ Banach e $\|\phi\| \leq C\|S^*\phi\|, \forall \phi \in D(S^*)$, pois daí S é sobrejetora

- $\overline{R(T)}$ é subconj. fechado do esp. de Banach Y , portanto é Banach

Af.1. $\|\phi\| \leq C\|S^*\phi\|, \forall \phi \in D(S^*)$

$$S = T| : D(T) \subseteq \underbrace{X}_{\text{Banach}} \rightarrow \underbrace{\overline{R(T)}}_{\text{Banach}} \quad S^* : D(S^*) \subseteq \overline{R(T)}^* \rightarrow X^*$$

- S^* é linear e fechada

Teorema C2.3. Seja $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ uma transformação linear densamente definida (X, Y Banach). Então T^* é linear e fechado.

Teorema da Aplicação Aberta para T fechada (pag. C5). Sejam X, Y espaços de Banach e $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ linear fechada e sobrejetora. Então T é aberta e existe $C > 0$ tal que para cada $y \in Y$ pode-se encontrar $x \in D(T)$ tal que

$$\|x\| \leq C\|y\| \quad \text{e} \quad y = Tx.$$

- considere $S^*| = S^* : D(S^*) \subset \underbrace{\overline{R(T)}^*}_{\text{Banach}} \rightarrow \underbrace{R(S^*)}_{\text{Banach?}}$ que é linear, fechada e sobrejetora

Precisamos: $R(S^*)$ **Banach** e com isso teríamos:

$$\exists C > 0; \forall \psi \in R(S^*), \exists \phi \in D(S^*) : \|\phi\| \leq C \|S^* \phi\|$$

- Se S^* é injetora, então a Af. 1 está provada: $\|\phi\| \leq C \|S^* \phi\|, \forall \phi \in D(S^*)$.

Af.2. S^* é injetora

Exercício C3.4. Se M é subespaço de X , então $M^\perp = \{0\} \iff \overline{M} = X$

- $R(S) = R(T)$ é denso em $Y_0 = \overline{R(T)}$
- $N(S^*) \stackrel{T.C3.7}{=} R(S)^\perp = \{0\}$
ii)

Af.3. $R(S^*)$ é Banach

- $R(S^*) \subset X^*$ e X^* é Banach
- Se $R(S^*)$ é fechada, então $R(S^*)$ é Banach

Hipótese!: $R(T^*)$ é fechada

Af.4. $R(S^*) = R(T^*)$ e daí $R(S^*)$ é fechada

$$R(S^*) = \{S^* \phi \in X^* : \phi \in D(S^*) \subseteq \overline{R(T)}^* \subset Y^*\}$$

$$R(T^*) = \{T^* \psi \in X^* : \psi \in D(T^*) \subset Y^*\}$$

(C)

- $S^* \phi \in X^* : \phi \in D(S^*)$

Queremos: $S^* \phi = T^* ?$ com $? \in D(T^*) = \{g \in Y^* : g \circ T : D(T) \rightarrow \mathbb{K} \text{ limitada}\}$

Corol. B2.3. $M = \overline{R(T)} \subset Y$ e $f \in M^* \implies \exists \tilde{f} \in Y^*$ tal que $\tilde{f}|_M = f$.

- $\exists \tilde{\phi} \in Y^*$ tal que $\tilde{\phi}|_{\overline{R(T)}} = \phi$.
- $x \in D(S) = D(T)$

$$S^* \phi(x) \stackrel{\phi \in D(S^*)}{=} \phi(Sx) \stackrel{S=T}{=} \phi(Tx) \stackrel{\phi = \tilde{\phi}|_{\overline{R(T)}}}{=} \tilde{\phi}(Tx)$$

$$\implies \begin{cases} \tilde{\phi} \circ T \text{ limitada em } D(T) \implies \tilde{\phi} \in D(T^*) \\ S^* \phi(x) = T^* \tilde{\phi}(x), x \in D(T) \therefore x \in X \end{cases}$$

(⊃)

- $T^*\psi \in X^* : \psi \in D(T^*) = \{f \in Y^* : f \circ T : D(T) \rightarrow \mathbb{K} \text{ limitada}\}$

Queremos: $T^*\psi = S^*?$ com $? \in D(S^*) = \{g \in \overline{R(T)}^* : g \circ S : D(S) \rightarrow \mathbb{K} \text{ limitada}\}$

- $\psi|_{\overline{R(T)}} \in \overline{R(T)}^*$

- $x \in D(T) = D(S)$

$$T^*\psi(x) \stackrel{\psi \in D(T^*)}{=} \psi(Tx) \stackrel{S=T}{=} \psi(Sx) \stackrel{Sx \in \overline{R(T)}}{=} \psi|_{\overline{R(T)}}(Sx)$$

$$\implies \begin{cases} \psi|_{\overline{R(T)}} \circ S \text{ limitada em } D(S) \implies \psi|_{\overline{R(T)}} \in D(S^*) \\ T^*\psi = S^*\psi|_{\overline{R(T)}} \end{cases}$$

$T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ densamente definida e fechada:

i) $R(T)$ é fechada $\implies$ iv) $R(T^*) = N(T)^\perp$

(⊂)

Teorema C3.7. Seja $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ densamente definido. Se T é também fechado então iii) $N(T)^\perp \supset \overline{R(T^*)}$

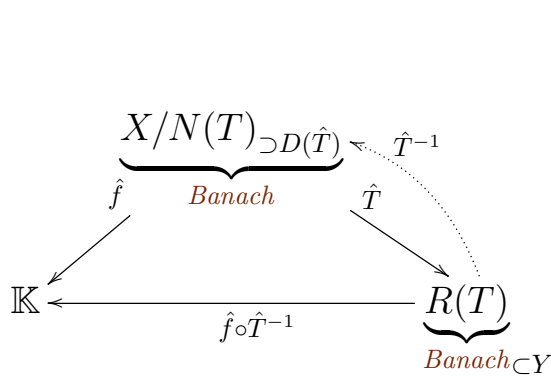
- $R(T^*) \subset \overline{R(T^*)} \subset N(T)^\perp$

(⊃)

- $f \in N(T)^\perp = \{f \in X^* : f(x) = 0, x \in N(T)\}$

Queremos: $f \in R(T^*)$, i.e., $f = T^*\psi$ para alguma $\psi = ?$ em Y^* tal que $\psi \circ T$ seja limitada em $D(T)$

Usaremos o espaço quociente para encontrar ψ a partir de f e T :



$$\hat{f} \in (X/N(T))^*$$

$$\hat{T}^{-1} \in L(R(T), X/N(T))$$

$\psi \in Y^*$ será a extensão do func. linear lido $\hat{f} \circ \hat{T}^{-1}$

C.B2.3. Y e.v.n., M um subespaço e $f \in M^* \Rightarrow \exists \tilde{f} \in Y^*; \tilde{f}|_M = f$.

Af.1. $X/N(T)$ é Banach:

(ver Seção B5.1)

$N(T) \subset X$ é fechado [verifique!] (T fechada)

Af.2. $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ em X^* induz um funcional linear limitado em $X/N(T)$:

$$\hat{f} : X/N(T) \rightarrow \mathbb{K} : [x] \mapsto \hat{f}([x]) = f(x)$$

★ está bem definido:^a

$$[y] = [x] \Leftrightarrow y - x \in N(T) \xRightarrow{f \in N(T)^\perp} f(x - y) = 0 \xLeftrightarrow{f \in X^*} \hat{f}([x]) \stackrel{f(x) = f(y)}{=} \hat{f}([y])$$

★ é linear

★ é limitado:

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\| &= \sup\{|\hat{f}([x])| : \|[x]\| < 1\} \\ &= \sup\{|f(x)| : \|[x]\| < 1\} \\ &\stackrel{\|x\| < 1 \Leftrightarrow \|[x]\| = \|\pi(x)\| < 1}{=} \sup\{|f(x)| : \|x\| < 1\} \\ &= \|f\| \end{aligned}$$

^aLembre-se: $[x] = \{y \in D(T) : y - x \in N(T)\}$, $x \in D(T) \subset X$

Af.3. $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ induz um operador $\hat{T}$ linear bijetor:

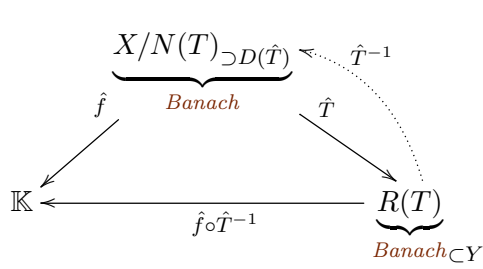
$$\hat{T} : D(\hat{T}) \subset X/N(T) \rightarrow R(T) : [x] \mapsto \hat{T}([x]) = T(x),$$

$$D(\hat{T}) = \{[x], x \in D(T)\} \stackrel{s.e.v.}{\subset} X/N(T)$$

★ está bem definido e é injetor:

$$[y] = [x] \Leftrightarrow y - x \in N(T) \Leftrightarrow T(x - y) = 0 \stackrel{T(x) = T(y)}{\Leftrightarrow} \hat{T}([x]) = \hat{T}([y])$$

★ é sobrejetor e linear



$\hat{f} \in (X/N(T))^*$ ok $\hat{T}^{-1}$ linear existe ok

$\hat{T}^{-1} \in L(R(T), X/N(T))$

$\psi \in Y^*$ será a extensão do func. linear lido $\hat{f} \circ \hat{T}^{-1}$

Af.4. $\hat{T}^{-1} \in L(R(T), X/N(T))$:

$$\hat{T}^{-1} : R(T) \rightarrow X/N(T) : y = Tx \mapsto \hat{T}^{-1}(T(x)) = [x]$$

★ $\hat{T} : D(\hat{T}) \subset X/N(T) \rightarrow R(T)$

Teorema da Aplicação Aberta para T fechada (pag.

C5). Sejam X, Y espaços de Banach e $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ linear fechada. Se T é bijetora, então $T^{-1} \in L(Y, X)$.

★ $R(T)$ é Banach

(hipótese: $R(T)$ fechado e Y Banach)

★ $\hat{T}$ é fechada

* $D(\hat{T}) \times Y \ni ([x_n], \hat{T}([x_n])) \rightarrow ([x], y) \in X/N(T) \times Y$

* $\tilde{x}_n \in [x_n], \tilde{x} \in [x]; \tilde{x}_n \rightarrow \tilde{x}$

* $\tilde{x}_n \in [x_n] \Rightarrow \tilde{x}_n - x_n \in N(T) \Rightarrow T\tilde{x}_n = Tx_n$

* $T\tilde{x}_n = Tx_n = \hat{T}([x_n]) \rightarrow y$

* $D(T) \times Y \ni (\tilde{x}_n, T(\tilde{x}_n)) \rightarrow (\tilde{x}, y) \in X \times Y$

* $\tilde{x} \in D(T)$ e $T\tilde{x} = y$ (T fechada)

* $[x] = [\tilde{x}] \in D(\hat{T})$ e $\hat{T}([x]) = \hat{T}([\tilde{x}]) = T\tilde{x} = y$

Af.5. $\exists \psi \in Y^*$ tal que $\psi|_{R(T)} = \hat{f} \circ \hat{T}^{-1}$

★ $\hat{f} \circ \hat{T}^{-1} : R(T) \xrightarrow{s.e.v.} Y \rightarrow \mathbb{K}$ é linear e limitada

Corolário B2.3 [Extensão de funcional mantendo a norma]. Sejam X um e.v.n. sobre $\mathbb{K}$, M um subespaço e $f \in M^*$. Então $\exists \tilde{f} \in X^*$ tal que $\tilde{f}|_M = f$.

Queremos: $f \in R(T^*)$, i.e., $f = T^*\psi$ para alguma $\psi \in D(T^*)$, ie, $\psi \in Y^*$; $\psi \circ T$ seja limitada em $D(T)$

Af.6. $\psi \circ T$ é limitada em $D(T)$

★ $x \in D(T)$

$$\psi \circ T(x) = \psi(Tx) \stackrel{\psi|_{R(T)} = \hat{f} \circ \hat{T}^{-1}}{=} \hat{f}(\hat{T}^{-1}(Tx)) = \hat{f}([x]) = f(x)$$

★ f limitada em $X \implies \psi \circ T$ limitada em $D(T)$

Af.7. $T^*\psi(x) = f(x)$, para todo $x \in X$

★ $x \in D(T)$

$$T^*\psi(x) \stackrel{x \in D(T)}{=} \psi(Tx) = f(x)$$

★ T dens. def. e continuidade $\implies T^*\psi = f$ em X (veja p. C9)

□

Lema C3.10. *Seja $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ operador linear densamente definido e fechado. Se existe $C > 0$ tal que*

$$\|\phi\| \leq C \|T^* \phi\| \quad \forall \phi \in D(T^*),$$

então T é aberta e logo sobrejetora.

◁

Este resultado fornece o **método da estimativa a priori**: para determinar se T é sobrejetora, considera-se $T^* \phi = g$ com $g \in X^*$ (sem se preocupar se existe ou não solução!) e prova-se que $\|\phi\| \leq C \|g\|$ para alguma constante C que é independente de g .

Demonstração.

Af.1. T é aberta

Exercício B4.2.1 $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ linear é **aberta** $\iff \exists r > 0$;
 $B_r^Y(0) \subseteq T(B_1^X(0) \cap D(T))$.

Lema 2 - TAA. p. B19. X espaço de Banach, Y e.v.n., T **fechada**, $\exists r > 0$;
 $B_{2r}^Y(0) \subset \overline{T(B_1^X(0) \cap D(T))} \implies B_r^Y(0) \subset T(B_1^X(0) \cap D(T))$.

Queremos: encontrar $r > 0$; $B_{2r}^Y(0) \subset \overline{T(B_1^X(0) \cap D(T))}$

Teorema B3.4 [Hahn-Banach - Forma Geométrica 2] Sejam X um e.v.n. real e $A, B \subseteq X$ conjuntos convexos, não vazios e disjuntos. Se A é **fechado** e B é **compacto**, então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido forte:
 $\exists f \in X^*; f|_B \geq \alpha + \epsilon > \alpha > \alpha - \epsilon \geq f|_A$.

- $A := \overline{T(B_1^X(0) \cap D(T))}$ é fechado, convexo
- $y_0 \in Y \setminus A$
- $B = \{y_0\}$ é compacto, convexo
- $\exists \phi \in Y^*; \phi(y_0) > \alpha > \phi|_A > -\alpha$ (T. HB-FG2)

$$\begin{aligned} |\phi(Tx)| < \alpha, \quad x \in B_1^X(0) \cap D(T) &\implies |\phi(Tx)| < 2\alpha \|x\|, \quad x \in D(T) \\ &\implies \phi \in D(T^*) \end{aligned}$$

- $|T^*\phi(x)| = |\phi(Tx)| < 2\alpha \|x\|, x \in D(T)$
- $\|T^*\phi\| \leq 2\alpha \implies \|\phi\| \leq 2C\alpha$ (Hipótese)

$$\alpha < \phi(y_0) \leq |\phi(y_0)| \leq \|\phi\| \|y_0\| \leq 2C\alpha \|y_0\|$$

$$\therefore \text{se } y \notin A \text{ então } \|y\| > \frac{1}{2C}$$

- $\exists r > 0; B_{2r}^X(0) \subset \overline{B_{\frac{1}{2C}}^X(0)} \subset A = \overline{T(B_1^X(0) \cap D(T))}$

Af.2. T é sobrejetora

- $\exists r > 0; B_r^Y(0) \subseteq T(B_1^X(0) \cap D(T))$ (T é aberta)
- dado $y \in Y \setminus \{0\}$, $\frac{ry}{2\|y\|} \in B_r^Y(0)$
- existe $x \in B_1^X(0) \cap D(T)$ tal que $Tx = \frac{ry}{2\|y\|}$

$$y = T(2\|y\| x/r), \quad \text{com } 2\|y\| x/r \in D(T)$$

□

De fato a prova acima nos fornece: se T é aberta então T é sobrejetora.

C4 Exercícios

Exercícios

Exercício C4.1. Reveja os exercícios 2.22 e 2.23 (p.53) do [Bre11] ★

Exercício C4.2 (EC1). Considere as aplicações $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y : x \mapsto x$ pegando como X, Y todas as possíveis combinações de c_0 e ℓ_p (com $1 \leq p \leq \infty$).

- Defina apropriadamente $D(T)$, encontre $R(T)$, discuta se a mapa for inj e/ou sobre, continua, fechada, densamente definida
- Defina apropriadamente T^* e $D(T^*)$, repita a discussão acima para T^*

★

Exercício C4.3 (EC2). Considere as aplicações $T : X \rightarrow Y$

1. $T : \ell_2 \rightarrow \ell_2 : (x_j) \mapsto (2^{-j}x_j)$
2. $T : \ell_1 \rightarrow \ell_2 : (x_j) \mapsto (2^{-j}x_j)$
3. $T : \ell_2 \rightarrow \ell_2 : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, x_2, x_3, \dots)$
4. $T : \ell_2 \rightarrow \ell_2 : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$
5. $T : \ell_2 \rightarrow \ell_2 : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$

Encontre entre elas exemplos de

- $R(T) = Y$, $R(T) \neq Y$, $R(T)$ fechada/não fechada
- $R(T^*) = X^*$, $R(T^*) \neq X^*$, $R(T^*)$ fechada/não fechada
- T injetora/não injetora,
- $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$ finito ou infinito
- $\sup_{\|Tx\| \leq 1} \|x\|$ finito ou infinito
- casos em que $T = T^*$ ou não. ★

Exercício C4.4. Mostre que a aplicação $T : X \rightarrow X : (x_i) \mapsto (x_i/i)$ fornece um exemplo de:

- afirmação (iii) do Teorema C3.7 com inclusão estrita, se $X = \ell_1$;
- recíprocas do corolário C3.8 falsas, se $X = \ell_2$. ★

Exercício C4.5. Seja $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ densamente definido e fechado.

- Mostre que se existe $C > 0$ tal que

$$\|\phi\| \leq C\|T^*\phi\| \quad \forall \phi \in D(T^*), \quad (\text{C4.1})$$

(como nas hipóteses do lema C3.10), pode-se mostrar diretamente que T^* é injetora e sua imagem é fechada (note que pelo Teorema C3.9 isso implica T sobrejetora).

- Mostre que, analogamente, se tivermos que existe $C > 0$ tal que

$$\|x\| \leq C\|Tx\| \quad \forall x \in D(T), \quad (\text{C4.2})$$

então T é injetora, sua imagem é fechada e T^* é sobrejetora.

- Mostre enfim que a desigualdade (C4.1) (resp. (C4.2)) pode ser obtida quando T (resp. T^*) é sobrejetora, aplicando o corolário B4.4 (resp. B4.3) ao conjunto $\{\phi \in D(T^*) : \|T^*\phi\| \leq 1\}$ (resp. $\{x \in D(T) : \|Tx\| \leq 1\}$),



Referências

- [Bre11] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011, pp. xiv+599. ISBN: 978-0-387-70913-0.
- [Muj] J. Mujica. “Notas de análise funcional”. Em: *Notas de aula - IMECC - UNICAMP* ().
- [Rud73] W. Rudin. *Functional analysis*. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Düsseldorf-Johannesburg, 1973, pp. xiii+397.
- [TL80] A. E. Taylor e D. C. Lay. *Introduction to functional analysis*. Second. John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane, 1980, pp. xi+467. ISBN: 0-471-84646-5.

Lista dos teoremas

C2.3	Teorema (Adjunto)	C8
C3.1	Proposição (Ortogonais)	C12
C3.6	Proposição (Ortogonalidade G)	C14
C3.7	Teorema (Ortogonalidade $R - N$)	C15
C3.8	Corolário	C17
C3.9	Teorema (Imagem fechada)	C18
C3.10	Lema (Estimativa a priori)	C25

Lista dos exercícios

C1.5	Exercício	C6
C2.4	Exercício	C11
C2.5	Exercício	C11
C2.6	Exercício	C11
C2.7	Exercício	C11
C3.2	Exercício	C13
C3.3	Exercício	C13
C3.4	Exercício	C13
C3.5	Exercício	C13
C4.1	Exercício	C26
C4.2	Exercício (EC1)	C26
C4.3	Exercício (EC2)	C27
C4.4	Exercício	C27
C4.5	Exercício	C27