Conteúdo

Lc.1 Definições de limite e continuidade - Revisão

Lc.1.1 Definição de limite

Ponto de acumulação

- Seja $A \subseteq \mathbb{R}$: $p \in \mathbb{R}$ é dito **ponto de acumulação de A** se

$$\forall\, \delta > 0\ \exists\, x \in A:\ 0 < |x - p| < \delta$$

Nota. Um ponto de acumulação de um conjunto A pode ou não pertencer ao conjunto A.

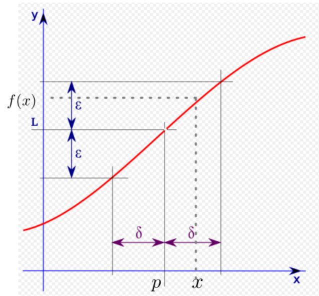
Notação. A' conjunto dos pontos de acumulação de A.

Dados $p \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, definimos:

- **vizinhança de p**: um qualquer intervalo aberto que contém p
- **vizinhança de p de raio r**: o intervalo $V_r(p) := (p - r, p + r)$

p é **ponto de acumulação de** A se
$\forall\, \delta > 0\ \exists\, x \in A:\ 0 < |x - p| < \delta$; $\quad \forall\, \delta > 0\ \exists\, x \in A,\ x \neq p:\ x \in (p - \delta, p + \delta)$
$\forall\, \delta > 0\ \exists\, x \in A \cap V_\delta(p) \setminus \{p\}$; $\quad \forall\, X$ vizinhança de p $\exists\, x \in A \cap X \setminus \{p\}$

Definição Lc.1.1 (Limtes).
Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D_f.



Fonte:Wikipedia

- $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$ significa

$$\forall\, \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists\, \delta > \mathbf{0} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } \mathbf{0} < |\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \delta \text{ implica } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}| < \varepsilon$$

- se a afirmação acima é falsa para todo $L \in \mathbb{R}$, isto é,

$$\forall \mathbf{L} \in \mathbb{R}, \exists\, \varepsilon > \mathbf{0} \text{ tal que } \forall\, \delta > \mathbf{0}\ \exists \mathbf{x} \in \mathbf{D_f};\ \mathbf{0} < |\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \delta \text{ e } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}| \geq \varepsilon,$$

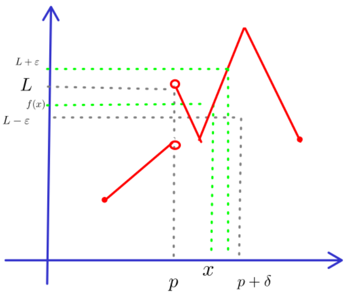
dizemos que $\lim\limits_{x \to p} f(x)$ **não existe**

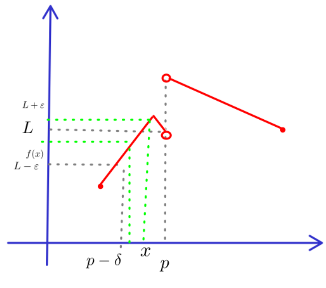
- se p é ponto de acumulação de $\boxed{D_f^+} := D_f \cap (p, \infty)$, $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{p}^+} f(x) = L$ dizemos "limite de $f(x)$ quando x tende a p **pela direita** e significa

$$\forall\, \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists\, \delta > \mathbf{0} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \textbf{ e } \mathbf{p} < \mathbf{x} < \mathbf{p} + \delta \text{ implica } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}| < \varepsilon$$

- se p é ponto de acumulação de $\boxed{D_f^-} := D_f \cap (-\infty, p)$, $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{p}^-} f(x) = L$ dizemos "limite de $f(x)$ quando x tende a p **pela esquerda** e significa

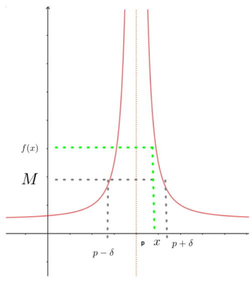
$$\forall\, \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists\, \delta > \mathbf{0} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \textbf{ e } \mathbf{p} - \delta < \mathbf{x} < \mathbf{p} \text{ implica } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}| < \varepsilon$$





- se p é ponto de acumulação de D_f, $\lim\limits_{x \to p} f(x) = +\infty$ significa

$$\forall\, \mathbf{M} \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta > \mathbf{0} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \textbf{ e } \mathbf{0} < |\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \delta \text{ implica } \mathbf{f}(\mathbf{x}) > \mathbf{M}$$



- $\lim\limits_{x \to p} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, etc...

★

Observação Lc.1.2.

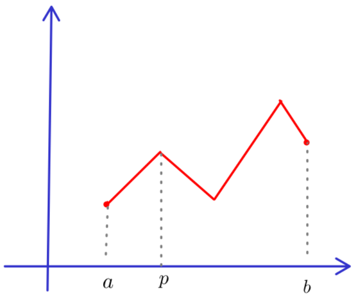
1. Se p não é p.a. de D_f, não faz sentido $\lim_{x \to p} f(x)$.
2. Se $\lim\limits_{x \to p} f(x)$ existe, então f é limitada em uma vizinhança de p.
3. Se $\lim\limits_{x \to p} f(x) = \infty$, então f não é limitada em qualquer vizinhança de p.

★

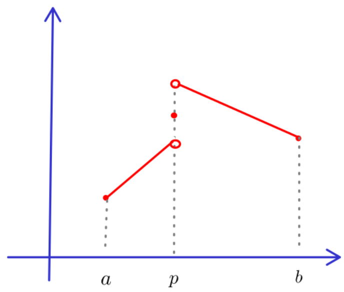
Lc.1.2 Definição de continuidade

Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$.

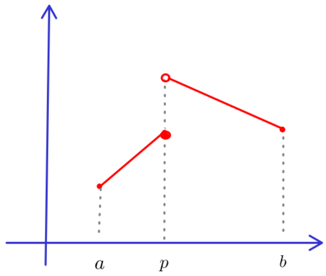
QUAIS DOS SEGUINTES DESENHOS PODEMOS DIZER QUE REPRESENTAM GRÁFICO DE FUNÇÃO CONTÍNUA ?[1]



(I)

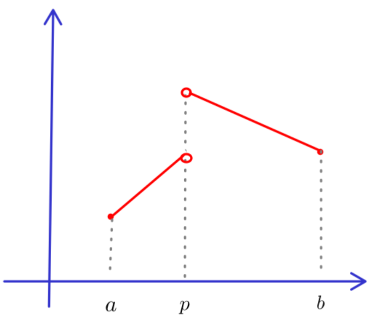


(II)



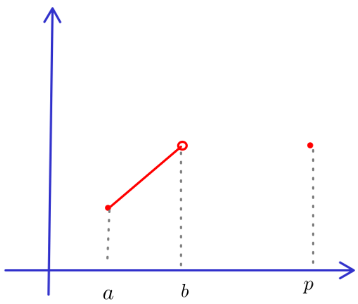
(III)

$D_f = [a, b]$



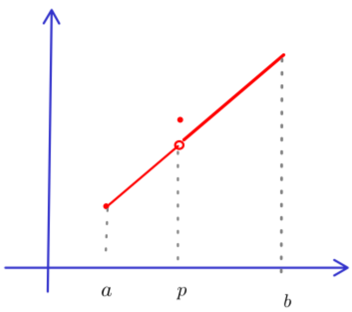
(IV)

$D_f = [a, b] \setminus \{p\}$



(V)

$D_f = [a, b) \cup \{p\}$



(VI)

$D_f = [a, b]$

[1]**Nota.** As figuras (II), (III) e (VI) não representam gráficos de funções contínuas e (I), (IV) e (V) representam gráficos de funções contínuas!

Definição Lc.1.3 (Continuidade).
Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$

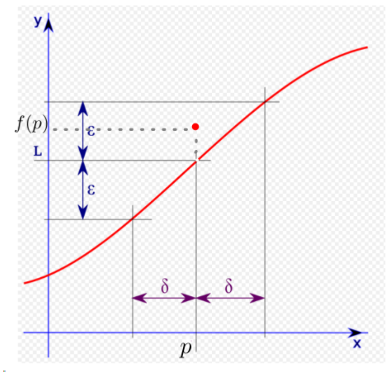
- dizemos que f **é contínua em** p, se

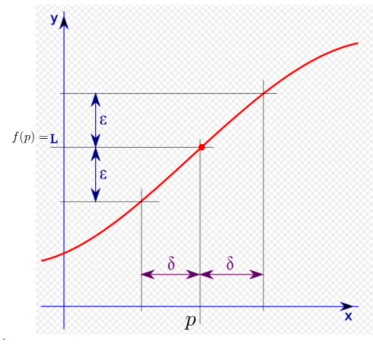
$$\forall \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists \delta > \mathbf{0} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } |\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \delta \text{ implica } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{p})| < \varepsilon \qquad (*)$$

- dizemos que f **é descontínua em** p, se a propriedade $(*)$ é falsa

---

- se f é contínua em p para todo $p \in A \subset D_f$ dizemos f **é contínua em** A
- se f é contínua em p para todo $p \in D_f$ dizemos f **é contínua** ★





Nota.

1. Se f é contínua em $p \in D_f$, temos duas possibilidades:
   - se p é ponto de acumulação de D_f, então

$$f \text{ é contínua em } p \iff \lim_{x \to p} f(x) = f(p)$$

   - se p não é ponto de acumulação de D_f, então f é contínua em p

2. Se $p \notin D_f$, NÃO SE FALA SOBRE CONTINUIDADE OU DESCONTINUIDADE EM p!!!

Lc.2 Teoremas estudados em Cálculo 1 - Revisão

Lc.2.1 Teoremas sobre operações com limites e funções contínuas

Teorema [Operações com limites].
Sejam

$$f : D_f \to \mathbb{R}\,, \quad g : D_g \to \mathbb{R}\,, \quad p \text{ ponto de acumulação de } D_f \cap D_g\,,$$

$$\lim_{x \to p} f(x) = L_f\,, \qquad \lim_{x \to p} g(x) = L_g\,.$$

Então

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to p} f(x) \pm g(x) = L_f \pm L_g\,, \\ \\ \lim\limits_{x \to p} f(x)g(x) = L_f L_g\,, \\ \\ \lim\limits_{x \to p} f(x)/g(x) = L_f/L_g \qquad \textbf{desde que } L_g \neq 0\,. \end{cases}$$

$\triangleleft$

Corolário [Operações com funções contínuas].
Sejam

$$f : D_f \to \mathbb{R}\,, \quad g : D_g \to \mathbb{R}\,, \quad p \text{ ponto de acumulação de } D_f \cap D_g\,.$$

Além disso, se $p \in D_f \cap D_g$, f **e** g **são contínuas em** p, **então**

$$\begin{cases} f \pm g \textbf{ é contínua em } p\,, \\ \\ fg \textbf{ é contínua em } p\,, \\ \\ f/g \textbf{ é contínua em } p\,, \qquad \textbf{desde que } g(p) \neq 0\,. \end{cases}$$

$\triangleleft$

Teorema [Limite da composta].
Sejam

$$f : D_f \to \mathbb{R}\,, \quad g : D_g \to \mathbb{R} \text{ tais que } \quad Im(f) \subseteq D_g,$$

p ponto de acumulação de D_f , a ponto de acumulação de D_g tais que

$$\lim_{x\to p} f(x) = a \qquad \lim_{y\to a} g(y) = L\,.$$

Além disso, valha pelo menos UMA entre

(a) $a \in D_g$ e g **contínua em** a .

(b) $\exists\, r > 0 :\ x \in D_f\ e\ 0 < |x - p| < r \Rightarrow \mathbf{f(x) \neq a}$.

Então

$$\lim_{x\to p}(g \circ f)(x) = L$$

◁

Corolário [Continuidade da composta].
Sejam

$$f : D_f \to \mathbb{R}\,, \quad g : D_g \to \mathbb{R}\,, \quad Im(f) \subseteq D_g,$$

$$p \in D_f \quad (\Rightarrow f(p) \in D_g) \text{ tais que}$$

p ponto de acumulação de D_f , $f(p)$ ponto de acumulação de D_g ,

f **contínua em** p $\quad e \quad$ g **contínua em** $f(p)$.

Então $g \circ f$ **é contínua em** p. ◁

Corolário [Continuidade das composições de contínuas].
Qualquer função obtida via soma, diferença, produto, divisão, composição ou inversão(se o domínio é um intervalo) [2] de funções contínuas, **é contínua no seu domínio natural**. ◁

[2] Ver Corolário Lc.3.7

Teorema [Limites laterais].

$\boxed{D_f^{+\prime}}$: conj. pontos de acumulação de $D_f \cap (p, \infty)$

$\boxed{D_f^{-\prime}}$: conj. pontos de acumulação de $D_f \cap (-\infty, p)$

Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $p \in D_f^{+\prime} \cap D_f^{-\prime}$. Então vale a seguinte equivalência:

$$\exists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}^+} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}^-} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$$

$\triangleleft$

. . . .

Também valem análogos dos teoremas sobre operações com limites e limite da composta:

- substituindo $x \to p$ por $x \to p^+$ e $0 < |x - p| < r$ por $p < x < p + r$
- substituindo $x \to p$ por $x \to p^-$ e $0 < |x - p| < r$ por $p - r < x < p$
- substituindo $y \to a$ por $y \to a^+$ e a por a^+
- substituindo $y \to a$ por $y \to a^-$ e a por a^-, **por exemplo:**

Teorema [Limite lateral da composta].

Sejam

$$f : D_f \to \mathbb{R}\,, \quad g : D_g \to \mathbb{R}\,, \quad Im(f) \subseteq D_g,$$

p ponto de acumulação de $D_f \cap (p, \infty)$, $\quad a$ ponto de acumulação de $D_g \cap (-\infty, a)$,

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = a^-\,, \qquad \lim_{y\to a^-} g(y) = L\,.$$

Além disso, valha pelo menos UMA entre

(a) $\quad a \in D_g$ e g contínua em a,

(b) $\exists\, r > 0 : \; x \in D_f$ e $p < x < p + r \Rightarrow f(x) \neq a\,.$

Então [3]

$$\lim_{x\to p^+} g \circ f(x) = L\,.$$

$\triangleleft$

[3] Veja Exercício 5, Lista 3.

Lc.2.2 Outros teoremas sobre limites

Teorema [Unicidade do limite]. Se

$$\exists \lim_{x\to p} f(x) = L_1 \qquad e \quad \exists \lim_{x\to p} f(x) = L_2$$

então $L_1 = L_2$ $\triangleleft$

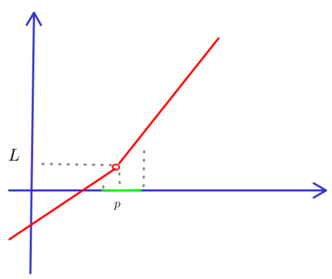
Teorema [de conservação do sinal]. Se

$$\exists \lim_{x\to p} f(x) = L > 0 \ \ (resp.\ L < 0)$$

então

$$\exists r > 0 : \ x \in D \ e \ 0 < |x-p| < r \ \Rightarrow f(x) > 0 \ \ (resp.\ f(x) < 0)$$

$\triangleleft$



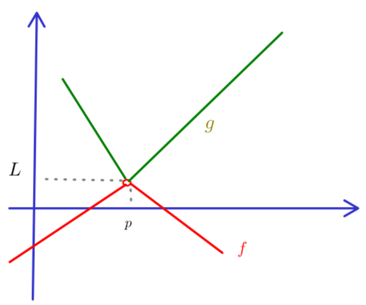
Teorema [de comparação]. Se

$$f(x) \leq g(x) \quad (\text{ou } f(x) < g(x))$$

para $x \in D_f$ e $0 < |x-p| < r$ para algum $r > 0$ e se existem os limites

$$\lim_{x\to p} f(x) = L_f \qquad \text{e} \quad \lim_{x\to p} g(x) = L_g$$

então $L_f \leq L_g$. $\triangleleft$



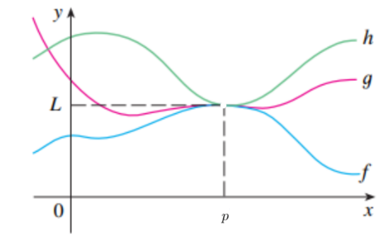
Teorema [de confronto]. Se

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad (\text{ou } f(x) < g(x) < h(x))$$

para $x \in D_f$ e $0 < |x-p| < r$ para algum $r > 0$ e se

$$\exists \lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} h(x) = L$$

então $\exists \ \lim_{x \to p} g(x) = L$ $\triangleleft$



Fonte: Stewart, Cálculo, vol. 1

Teorema [do anulamento].
Se f é limitada numa vizinhança de p, ou seja,

$$\exists M > 0, \exists r > 0 : \ x \in D_f \ e \ 0 < |x-p| < r \ \Rightarrow |f(x)| \leq M$$

e

$$\lim_{x \to p} g(x) = 0$$

então $\lim_{x \to p} f(x)g(x) = 0.$ $\triangleleft$

Todos os teoremas valem:

- substituindo $x \to p$ por $x \to p^+$ e $0 < |x-p| < r$ por $p < x < p+r$
- substituindo $x \to p$ por $x \to p^-$ e $0 < |x-p| < r$ por $p - r < x < p$

Lc.2.3 Outros teoremas sobre funções contínuas

Teorema [de conservação do sinal para funções contínuas].
Seja $f : D \to \mathbb{R}$, seja $p \in D$ um ponto de acumulação de D e seja f contínua em p.
Se $f(p) > 0$ (resp. $f(p) < 0$), **então**

$$\exists\, r > 0 : \;\; x \in D \text{ e } |x - p| < r \;\Rightarrow f(x) > 0 \;\; (\textit{resp. } f(x) < 0)$$

◁

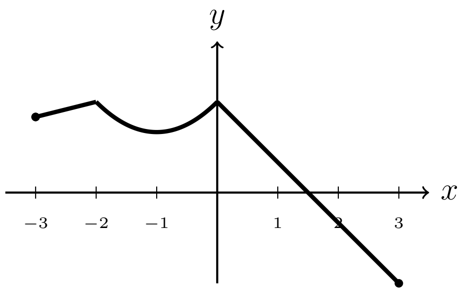


Figura 1: f satisfaz todas as hipóteses, por exemplo, em $p = 1$

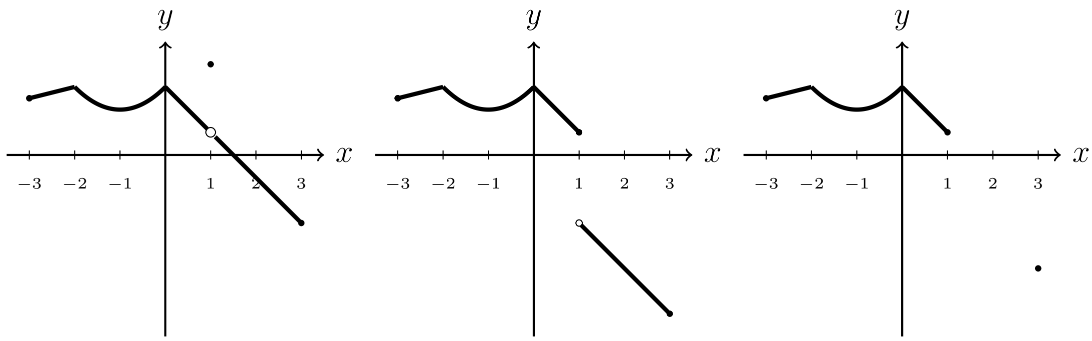


Figura 2: f NÃO satisfaz todas as hipóteses (em $p = 1$ nos grafs. 1 e 2 e em $p = 3$ no graf. 3): a tese pode (no graf. 1) ou não estar satisfeita

Teorema [Teorema de Bolzano / dos zeros].
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, com $f(a)f(b) < 0$,
então existe $c \in (a, b) : \; f(c) = 0$. $\triangleleft$

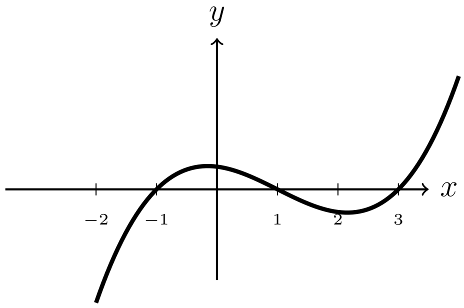


Figura 3: f satisfaz todas as hipóteses em $[-2, 4]$, existem $c = -1, 1, 3$

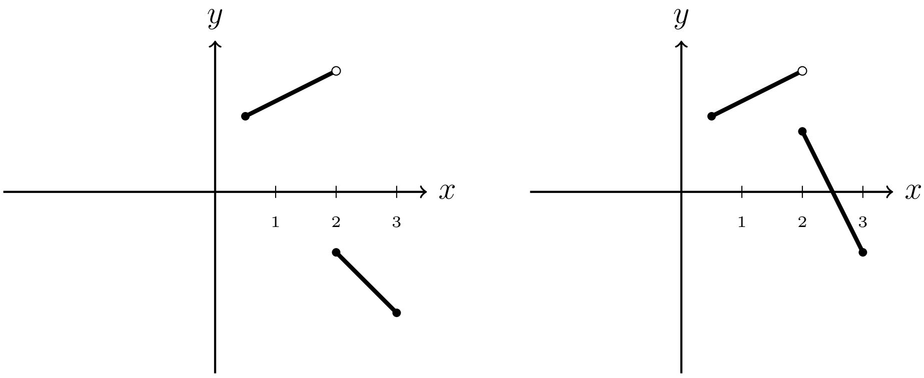


Figura 4: f NÃO satisfaz todas as hipóteses em $p = 1$: a tese pode (no graf. 2) ou não (no graf. 1) estar satisfeita

Corolário [Teorema do valor intermediário].
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, e seja $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(a) > \gamma > f(b) \qquad ou \qquad f(a) < \gamma < f(b)$$

então existe $c \in (a, b) : \; f(c) = \gamma$.
Em particular f assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$. $\triangleleft$

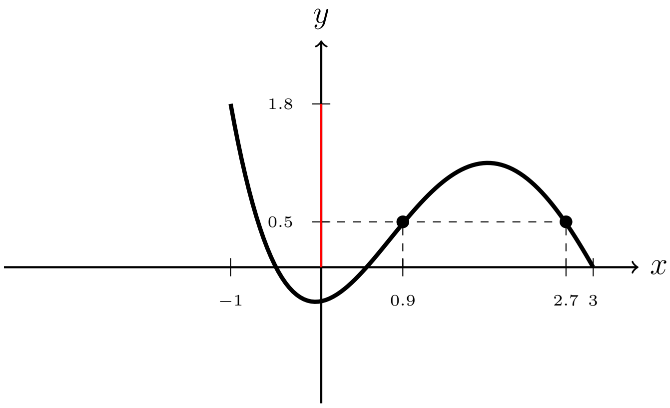


Figura 5: f satisfaz todas as hipóteses em $[-1, 3]$: por exemplo, para $1.8 = f(-1) > \gamma = 0.5 > f(3) = 0$ existem dois valores para $c \approx 0.9, 2.7$ que satisfazem $f(c) = \gamma$

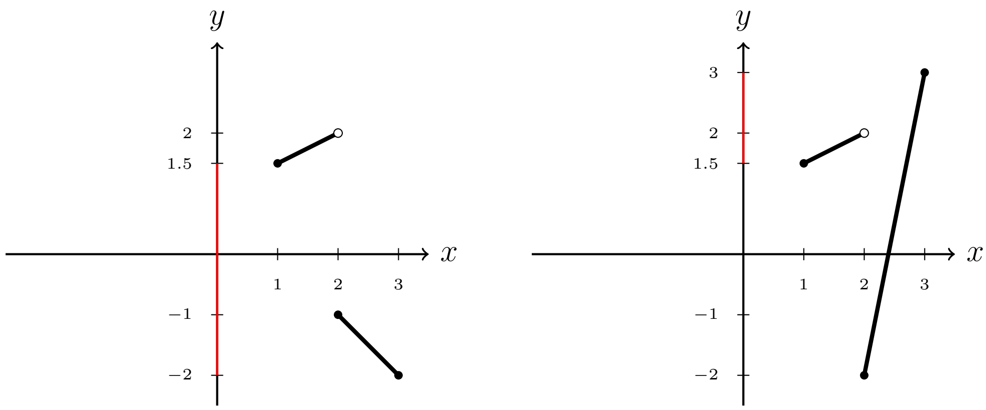


Figura 6: f NÃO é contínua em $[1, 3]$: para $\gamma \in [-1, 1.5]$ no graf. 1 a tese não é satisfeita e $\gamma \in [1.5, 3]$ no graf. 2 a tese é satisfeita

Lc.3 Limite, continuidade

Topologia da reta: $X \subset \mathbb{R}$

um ponto é aderente a X quando é o limite de uma sequência de pontos de X:

$\bar{X}$ denota o conjunto dos pontos aderentes a X (fecho de X)

- se X é limitado inferiormente, $\inf X$ é aderente a X;
- se X é limitado superiormente, $\sup X$ é aderente a X;
- p é aderente a X se só se $\forall \varepsilon > 0,\ X \cap (p-\varepsilon, p+\varepsilon) \neq \emptyset$;
- p ponto de acumulação $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ p ponto aderente.

X é fechado quando todo ponto aderente a X pertence a X, i.e., $\bar{X} = X$:

- X é fechado se só se seu complementar $\mathbb{R} \setminus X$ é aberto;
- união finita de fechados é fechado;
- intersecção qualquer de fechados é fechado.

X é dito ser denso em $Y \supset X$ se todo ponto de Y é aderente a X, i.e., $Y \subset \bar{X}$, equivalentemente:

1. todo ponto de Y é o limite de uma sequência de pontos de X
2. $(a,b) \cap X \neq \emptyset,\ \ \forall (a,b) \subset Y$

X é dito compacto se satisfaz uma das seguintes condições equivalentes:

1. X é fechado e limitado;
2. toda cobertura aberta de X admite subcobertura finita;
3. todo subconjunto infinito de X possui ponto de acumulação pertencente a X;
4. toda sequência de pontos de X possui subsequência que converge a um ponto de X.

Lc.3.1 Função Monótona

Teorema Lc.3.1. *Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função monótona limitada, p ponto de acumulação de $D_f \cap (p, \infty)$ e/ou de $D_f \cap (-\infty, p)$. Então (quando fizer sentido),*

$$\lim_{x\to p^+} f(x) \qquad e \qquad \lim_{x\to p^-} f(x) \qquad existem.$$

Mais especificamente,

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to p^+} f(x) = \inf\limits_{x>p} f(x) \quad e \quad \lim\limits_{x\to p^-} f(x) = \sup\limits_{x<p} f(x), & se\ f\ crescente \\ \lim\limits_{x\to p^+} f(x) = \sup\limits_{x>p} f(x) \quad e \quad \lim\limits_{x\to p^-} f(x) = \inf\limits_{x<p} f(x), & se\ f\ decrescente. \end{cases}$$

◁

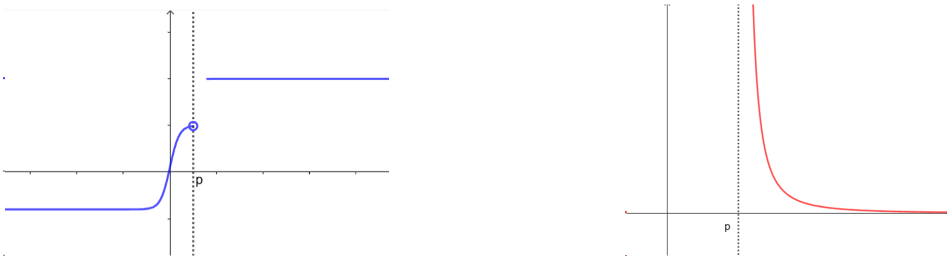


Figura 7: p p.a. de $D_f \cap (-\infty, p)$, p p.a. de $D_f \cap (p, \infty)$

Observação Lc.3.2.

- se p é p.a. de D_f e $\boxed{p \in D_f}$ a hipótese "f limitada" é desnecessária:

$$f \text{ monótona} \implies \exists \lim_{x\to p^+} f(x) \text{ e } \exists \lim_{x\to p^-} f(x) \qquad \bigstar$$

- sequência limitada monótona $\implies$ limite existe (seq. convergente)
- função limitada monótona $\not\Rightarrow$ limite existe :

$$\nexists \lim_{x\to 0}\left(x + \frac{x}{|x|}\right) \quad \text{e} \quad f : [-1,1]\setminus\{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto x + \frac{x}{|x|} \text{ crescente e limitada}$$

Teorema A2.7. Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $\boxed{p \text{ ponto de acumulação}}$ de D_f, então:

$$\lim_{x\to p} f(x) = L$$

se e só se

para toda seq. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D_f \setminus \{p\}$ tal que $a_n \to p$ vale $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$

Corolário Lc.3.3. *Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $\boxed{p \in D_f}$, então:*

f é contínua em p se e só se

para toda seq. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D_f$ tal que $a_n \to p$ vale $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(p)$

◁

Teorema Lc.3.4. *Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função monótona. Se $f(D_f)$ é um conjunto denso em algum intervalo, então f é contínua.*

Em particular, se $f(D_f)$ é um intervalo, então f é contínua. ◁

Observação Lc.3.5.

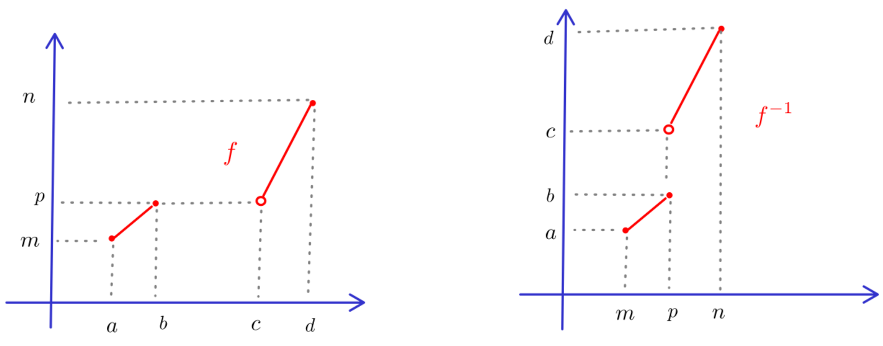
- Todas as hipóteses são importantes:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ e f é contínua só em 0.

- Visto que nem toda função contínua é monótona ou sua imagem é um intervalo, quando vale a recíproca do Teorema Lc.3.4? ★

Teorema Lc.3.6.
Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e D_f é um intervalo.
Se f é contínua, então $f(D_f)$ é um intervalo. [4]
Se ainda f é injetora, então f é monótona, logo $f^{-1} : f(D_f) \to D_f$ é monótona.
◁

[4] os extremos podem ou não pertencerem ao intervalo, $f : (-1, 3) \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ e $f(D_f) = [0, 9)$

Corolário Lc.3.7 [Continuidade da inversa - cont. em intervalo].
Seja $f : A \to B$ uma função bijetora. Se f é contínua e A é um intervalo então f^{-1} é contínua. $\triangleleft$



f é contínua e bijetora mas f^{-1} não é contínua!

Lc.3.2 Funções contínuas em conjuntos compactos

Teorema Lc.3.8.
Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ contínua. Se D_f é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, então $f(D_f)$ é compacto. $\triangleleft$

Corolário Lc.3.9 [Teorema de Weiestrass].
Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ contínua e D_f um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$,
então existem $x_1, x_2 \in D_f : \; f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \; \forall\, x \in D_f$. $\triangleleft$

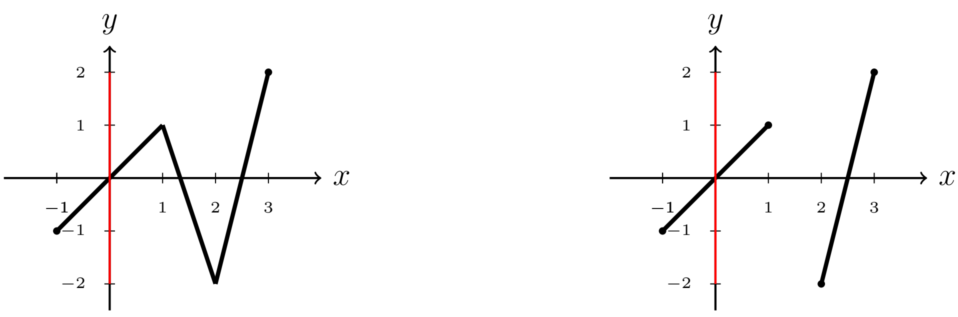


Figura 8: Graf. 1: f é contínua em $[-1, 3]$. Graf. 2: f é contínua em $[-1, 1] \cup [2, 3]$: -2 é o vm em $x = 2$ e 2 é o VM em $x = 3$

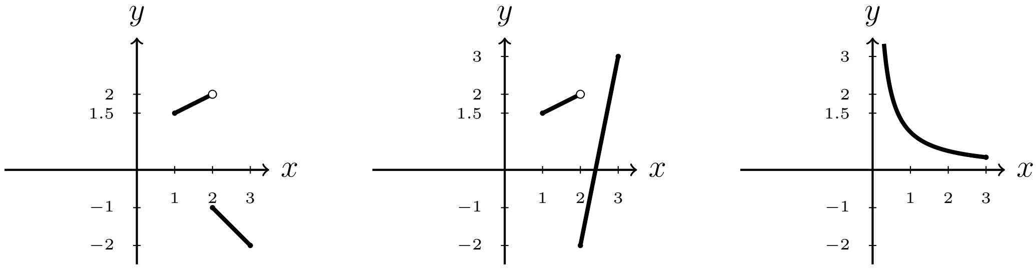


Figura 9: f NÃO é contínua em $[1,3]$ e a tese pode ou não estar satisfeita: não assume o máximo no graf. 1 e assume no graf. 2. No graf. 3, f é contínua em $(0,3]$ e não assume o máximo mas assume o mínimo.

Corolário Lc.3.10.
Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua,
então

$$Im(f) = [m, M],$$

onde m, M são, respectivamente, o mínimo e o máximo de f. ◁

Demonstração. Tarefa! □

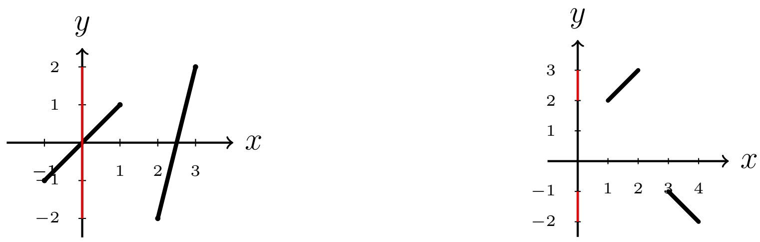


Figura 10: D_f é compacto e a $Im(f)$ é (figura da esquerda) e não é (figura da direita) intervalo

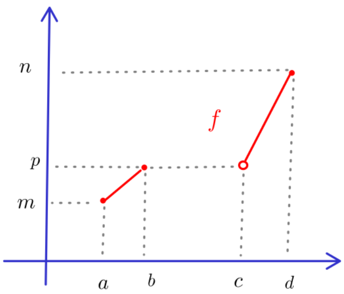
---

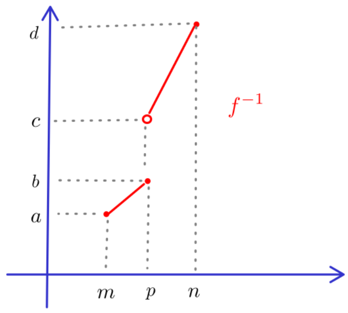
Corolário Lc.3.11 [Continuidade da inversa - cont. em compacto].
Seja $f : A \to B$ uma função bijetora. Se f é contínua e A é um compacto então f^{-1} é contínua. ◁

> Ex. 23, Lista 1: Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto e $\{x_n\}$ uma sequência em X. Prove que se toda subsequência convergente de $\{x_n\}$ convergir para L, então $\{x_n\}$ converge a L.

Exemplo Lc.3.12.

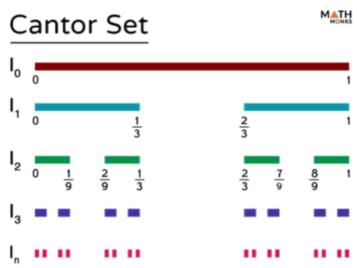
1. Retomando o exemplo anterior: se definir $f(c) = p$, então f é contínua no compacto $[a, b] \cup [c, d]$ mas não é injetora, não podendo falar de sua inversa

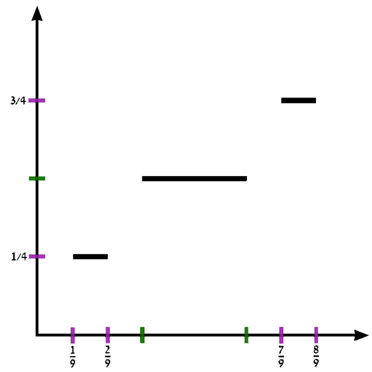




2. Intervalos fechados são compactos.

3. O conjunto de Cantor é compacto. [5]





A Função:

Seja $x \in C$. Então x pode ser escrito de forma única como:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, \quad a_k \in \{0, 2\}$$

Definimos a função $f\colon C \to [0, 1]$ como:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k/2}{2^k}$$

Propriedades:

- **Continuidade:** A função f é contínua, pois ela preserva a estrutura de vizinhança do Cantor.
- **Bijetora:** Mapeia cada ponto do conjunto de Cantor, base 3, a um ponto único do intervalo real $[0, 1]$ em base 2.

Figura 11: Acima, esquerda : Conjunto de Cantor (figura da internet)
Acima, direita: Função de Cantor (Wikipedia): cont. de $[0, 1]$ sobre $[0, 1]$, não inj.
Abaixo: $f : C \to [0, 1]$ contínua e bijetora.

★

[5] Ver p. 136 do livro do Elon. O gráfico da função de Cantor no Acrobat é animado!

Lc.3.3 Continuidade Uniforme

Definição de Continuidade

Dizemos que $f : D_f \to \mathbb{R}$ **é contínua** se é contínua para todo $p \in D_f$

- dizemos que **f é contínua em p**, se

$$\forall \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists \delta = \delta(\varepsilon, p) > \mathbf{0} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } |\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \delta \text{ implica } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{p})| < \varepsilon$$

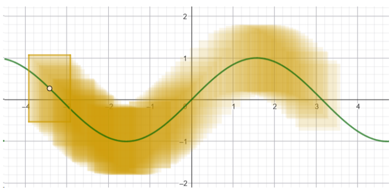
Definição Lc.3.13 (Continuidade uniforme)**.**
Dizemos que uma função $f : D_f \to \mathbb{R}$ é **uniformemente contínua**, se

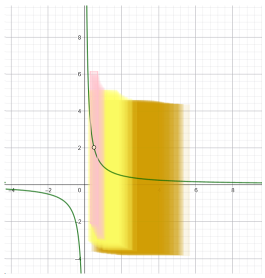
$$\forall \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > \mathbf{0} \text{ tal que } \mathbf{x}, \mathbf{p} \in \mathbf{D_f} \text{ e } |\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \delta \text{ implica } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{p})| < \varepsilon$$ ★

Observação Lc.3.14. f unif. cont. $\Longrightarrow$ f cont. ★

Interpretação geométrica - Geogebra:

- $f(x) = \sin(x)$ é uniformemente contínua: dado ε (altura do retângulo), para o mesmo δ (largura do retângulo), o gráfico "não fura nem o teto nem a base do retângulo"
- $f(x) = \frac{1}{x}$ não é uniformemente contínua: dado ε, para o mesmo δ, quando ficamos próximos da origem, gráfico "fura o teto do retângulo", precisando considerar δ menor para o gráfico "ficar dentro do retângulo".





Exemplo Lc.3.15.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \sin x$ é uniformemente contínua (Exercício 19, Lista 3)
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = ax + b$ é uniformemente contínua.
3. $f : (0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ não é uniformemente contínua.

★

Teorema Lc.3.16 [Condição necessária 1 para cont. unif.].
Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e $\{a_n\} \subset D_f$ uma sequência. Se f **é uniformemente contínua** *e $\{a_n\}$ é de Cauchy,* **então $\{f(a_n)\}$ é de Cauchy**. ◁

Corolário Lc.3.17 [Condição necessária 2 para cont. unif.].
Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e *p um ponto de acumulação de D_f*. Se f **é uniformemente contínua**, **então existe** $\lim_{x \to p} f(x)$. ◁

se a *condição rosa* **está satisfeita** e a **condição azul não**, então f **não é unif. cont.**

Exemplo Lc.3.18.

1. $f : (0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ não é uniformemente contínua.

★

Teorema Lc.3.19 [Condição suficiente para cont. unif.].
Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e D_f compacto. Se f é contínua, então f é uniformemente contínua. ◁

Exemplo Lc.3.20.

1. $f : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ $(a > 0)$ é uniformemente contínua. ★

Lista dos teoremas