Conteúdo

Lc.1 Definição de limite

- Seja $A \subseteq \mathbb{R}$: $p \in \mathbb{R}$ é dito **ponto de acumulação de A** se

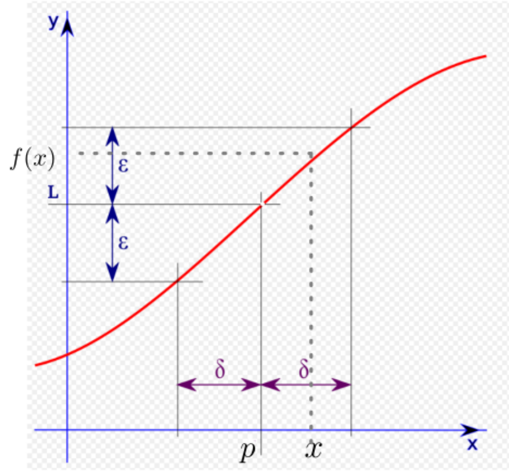
$$\forall\, \delta > 0\ \exists\, x \in A:\ 0 < |x - p| < \delta$$

Exemplo 1. Exercício 15 em Slides de Exercícios.

Nota. Um ponto de acumulação de um conjunto A pode ou não pertencer ao conjunto A.

Definição Lc.1.1.

Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D_f.



Fonte:Wikipedia

- $\lim_{x\to p} f(x) = L$ significa

  $$\forall \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists \delta > \mathbf{0} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \textbf{ e } \mathbf{0} < |\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \delta \text{ implica } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}| < \varepsilon$$

- se a afirmação acima é falsa para todo $L \in \mathbb{R}$, isto é,

  $$\forall \mathbf{L} \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > \mathbf{0} \text{ tal que } \forall \delta > \mathbf{0}\ \exists \mathbf{x} \in \mathbf{D_f};\ \mathbf{0} < |\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \delta \text{ e } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}| \geq \varepsilon,$$

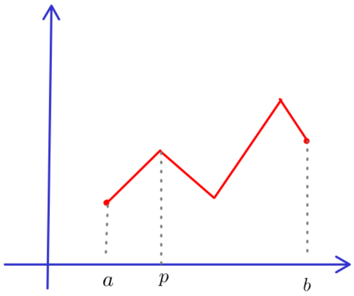
  dizemos que $\lim_{x\to p} f(x)$ **não existe**

Exemplo 2. Exercício 16 em Slides de Exercícios.

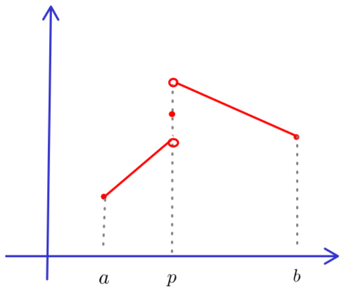
Lc.2 Definição de continuidade

Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$.

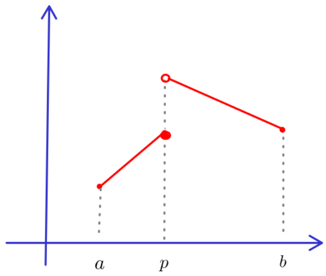
Quais dos seguintes desenhos podemos dizer que representam gráfico de função contínua ?



(I)

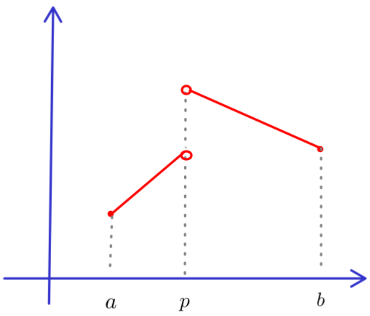


(II)



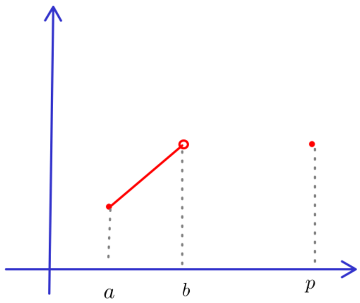
(III)

$D_f = [a, b]$



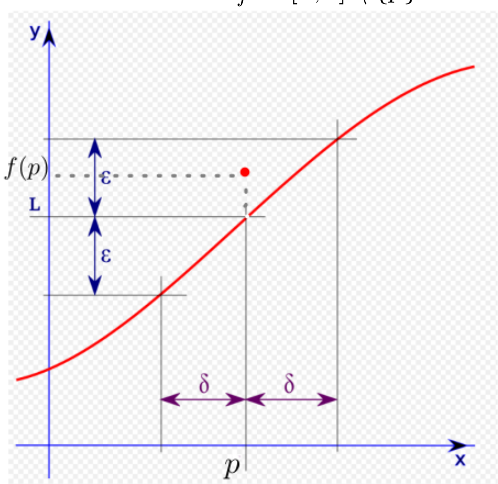
(IV)

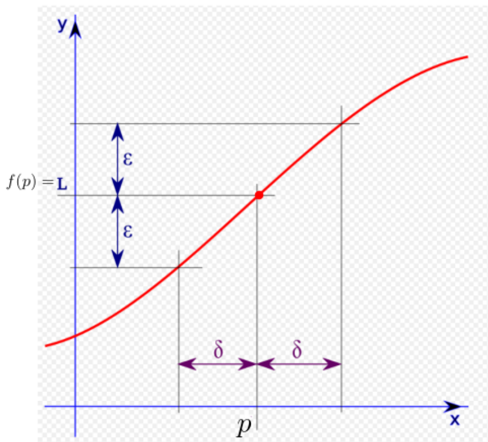
$D_f = [a, b] \setminus \{p\}$



(V)

$D_f = [a, b) \cup \{p\}$





Definição Lc.2.1.
Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$

- dizemos que f **é contínua em** p, se

$$\forall \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists \delta > \mathbf{0} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \textbf{ e } |\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \delta \text{ implica } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{p})| < \varepsilon \qquad (*)$$

- dizemos que f **é descontínua em** p, se a propriedade $(*)$ é falsa

---

- se f é contínua em p para todo $p \in A \subset D_f$ dizemos f **é contínua em** A

- se f é contínua em p para todo $p \in D_f$ dizemos f **é contínua**

Nota.

1. Se f é contínua em $p \in D_f$, temos duas possibilidades:
   - se p é ponto de acumulação de D_f, então
   $$f \text{ é contínua em } p \iff \lim_{x \to p} f(x) = f(p)$$
   - se p não é ponto de acumulação de D_f, então f é contínua em p

2. Se $p \notin D_f$, NÃO SE FALA SOBRE CONTINUIDADE OU DESCONTINUIDADE EM p!!!

Nota. As figuras (I), (IV) e (V) da página Lc.3 representam gráficos de funções contínuas e (II) e (III) não representam gráficos de funções contínuas!

Exemplo 3. Exercício 17 em Slides de Exercícios.

Lc.3 Propriedades

Lc.3.1 Limite por vizinhanças

Dados $p \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, definimos:

- **vizinhança de p**: um qualquer intervalo aberto que contém p
- **vizinhança de p de raio r**: o intervalo $V_r(p) := (p-r, p+r)$

Seja $A \subseteq \mathbb{R}$:

- p é **ponto de acumulação de A** se

$$\forall\, \delta > 0\ \exists\, x \in A:\ 0 < |x-p| < \delta$$

$$\forall\, \delta > 0\ \exists\, x \in A,\ x \neq p:\ x \in (p-\delta, p+\delta)$$

$$\forall\, \delta > 0\ \exists\, x \in A \cap V_\delta(p) \setminus \{p\}$$

$$\forall\, X \text{ vizinhança de } p\ \ \exists\, x \in A \cap X \setminus \{p\}$$

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ e p um ponto de acumulação de D_f

- $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$ significa

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } x \in D_f\ e\ 0 < |x-p| < \delta \text{ implica } |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } x \in D_f \cap V_\delta(p) \setminus \{p\} \quad \text{implica } f(x) \in V_\varepsilon(L)$$

$$\forall\, Y \text{ vizinhança de } L\ \exists\, X \text{ vizinhança de } p \text{ tal que}$$
$$x \in D_f \cap X \setminus \{p\} \quad \text{implica } f(x) \in Y$$

Lc.3.2 Teoremas sobre operações com limites

Teorema (Operações com limites).
Sejam

$$f : D_f \to \mathbb{R}\,, \quad g : D_g \to \mathbb{R}\,, \quad p \text{ ponto de acumulação de } D_f \cap D_g\,,$$
$$\lim_{x\to p} f(x) = L_f\,, \qquad \lim_{x\to p} g(x) = L_g\,.$$

Então

$$\begin{cases} \lim_{x\to p} f(x) \pm g(x) = L_f \pm L_g\,, \\ \\ \lim_{x\to p} f(x)g(x) = L_f L_g\,, \\ \\ \lim_{x\to p} f(x)/g(x) = L_f/L_g \qquad \textbf{desde que } L_g \neq 0\,. \end{cases}$$

Corolário (Operações com funções contínuas).
Sejam

$$f : D_f \to \mathbb{R}\,, \quad g : D_g \to \mathbb{R}\,, \quad p \text{ ponto de acumulação de } D_f \cap D_g\,.$$

Além disso, se $p \in D_f \cap D_g$, f e g são contínuas em p, **então**

$$\begin{cases} f \pm g \textbf{ é contínua em } p\,, \\ \\ fg \textbf{ é contínua em } p\,, \\ \\ f/g \textbf{ é contínua em } p\,, \qquad \textbf{desde que } g(p) \neq 0\,. \end{cases}$$

Exemplo 4. Exercícios 18 e 19 em Slides de Exercícios.

Teorema (Limite da composta).
Sejam

$$f : D_f \to \mathbb{R}\,, \quad g : D_g \to \mathbb{R} \text{ tais que } \quad Im(f) \subseteq D_g,$$

$$p \text{ ponto de acumulação de } D_f\,, \quad a \text{ ponto de acumulação de } D_g \text{ tais que}$$

$$\lim_{x\to p} f(x) = a \qquad \lim_{y\to a} g(y) = L\,.$$

Além disso, valha pelo menos UMA entre

(a) $a \in D_g$ e g contínua em a.

(b) $\exists\, r > 0 :\ x \in D_f\ e\ 0 < |x-p| < r \Rightarrow f(x) \neq a\,.$

Então

$$\lim_{x\to p}(g\circ f)(x) = L$$

[TESE:]

- $\lim_{x\to p}(g\circ f)(x) = L = g(a)$:

  Dado $\varepsilon > 0$, $\overset{?}{\exists}\,\delta = \ldots > 0$ tal que $x \in D_{g\circ f} = D_f$ e

  $$0 < |x-p| < \ldots \Rightarrow |g(f(x)) - g(a)| < \varepsilon$$

[HIPÓTESES:]

- g contínua em $a \iff L = \lim_{y\to a} g(y) = g(a)$: Dado $\varepsilon > 0$,

  $$\exists\,\delta_1 > 0; y \in D_g,\ 0 < |y-a| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - g(a)| < \varepsilon$$

- $\lim_{x\to p} f(x) = a$: Dado $\varepsilon = \ldots > 0$,

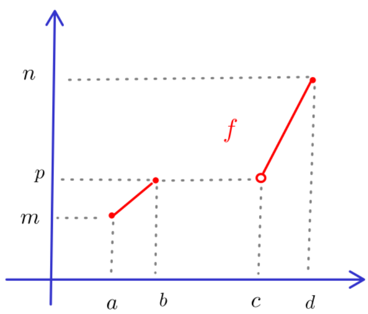
  $$\exists\,\delta_2 > 0; x \in D_f,\ 0 < |x-p| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - a| < \ldots$$

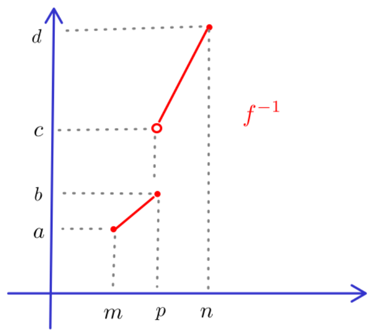
Corolário (Continuidade da composta).
Sejam

$$f : D_f \to \mathbb{R}\,, \quad g : D_g \to \mathbb{R}\,, \quad Im(f) \subseteq D_g,$$
$$p \in D_f \quad (\Rightarrow f(p) \in D_g) \text{ tais que}$$
$$p \text{ ponto de acumulação de } D_f\,, \quad f(p) \text{ ponto de acumulação de } D_g\,,$$
$$f \text{ contínua em } p \quad e \quad g \text{ contínua em } f(p).$$

Então $g \circ f$ é contínua em p.

Teorema (Continuidade da inversa).
Seja $f : A \to B$ uma função bijetora. Se f é contínua e A é um intervalo **então f^{-1} é contínua**.





f é contínua e bijetora mas f^{-1} não é contínua!

Corolário (Continuidade das composições de contínuas).
Qualquer função obtida via soma, diferença, produto, divisão, composição ou inversão(se o domínio é um intervalo) de funções contínuas, **é contínua no seu domínio natural**.

Exemplo 5. São funções contínuas (**contínuas em seus domínios naturais**):

1. **função constante**;
2. **função módulo** $|x|$;
3. **função potência** x^n, com $n \in \mathbb{N}$: produto de funções contínuas;
4. **funções polinomiais**: soma e produto de funções contínuas;
5. **funções racionais**: quociente de funções contínuas;
6. **função raiz n-ésima**: inversa de função contínua definida em intervalo;
7. $\sin x$ e $\cos x$: usaremos o "primeiro limite fundamental";
8. as demais **funções trigonométricas** $\tan, \sec, \csc, \cot$: quociente de funções contínuas;
9. **funções trigonométricas inversas**: inversas de funções contínuas definidas em intervalos;
10. **função exponencial** e^x: usaremos o "segundo limite fundamental";
11. $\ln x$: inversa de função contínua definida em intervalo;
12. **funções hiperbólicas**: soma e produto de funções contínuas;
13. **funções hiperbólicas inversas**: composta de funções contínuas;
14. **função potência** x^a com $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$: composta de contínuas $x^a = e^{a \ln x}$;
15. **função logarítmica** $\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x$, com $a > 0$, $a \neq 1$: produto de funções contínuas;
16. **função exponencial a^x, com $a > 0$, $a \neq 1$**: inversa de contínua $\log_a x$.

Exemplo 6. Exercícios 20 e 21 em Slides de Exercícios.

Lc.4 Limites laterais: definição

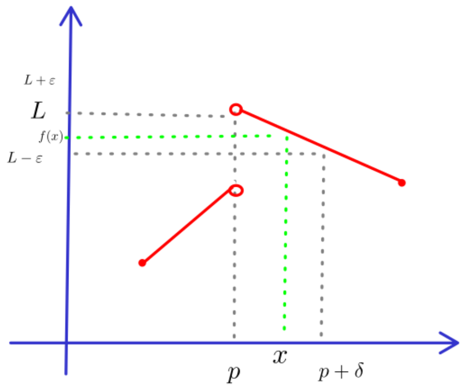
Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$

- se p é ponto de acumulação de D_f, $\lim_{x\to p} f(x) = L$ significa

$$\forall \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists \delta > \mathbf{0} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } \mathbf{0} < |\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \delta \text{ implica } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}| < \varepsilon$$

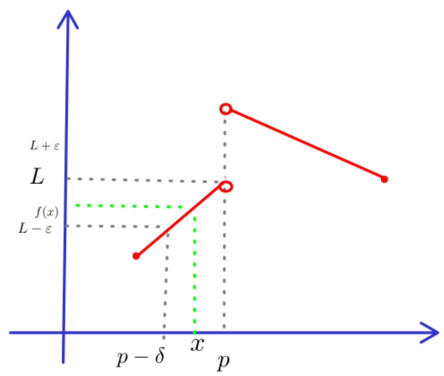
- se p é ponto de acumulação de $D_f \cap (p, \infty)$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}^+} f(x) = L$ significa

$$\forall \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists \delta > \mathbf{0} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } \mathbf{p} < \mathbf{x} < \mathbf{p} + \delta \text{ implica } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}| < \varepsilon$$



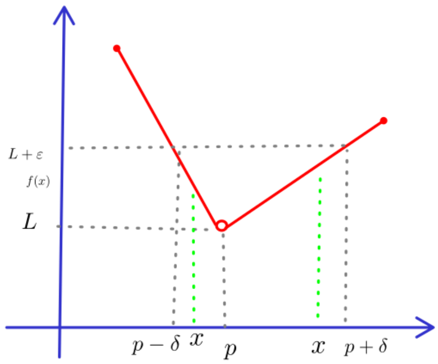
- se p é ponto de acumulação de $D_f \cap (-\infty, p)$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}^-} f(x) = L$ significa

$$\forall \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists \delta > \mathbf{0} \text{ tal que } \mathbf{x} \in \mathbf{D_f} \text{ e } \mathbf{p} - \delta < \mathbf{x} < \mathbf{p} \text{ implica } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}| < \varepsilon$$



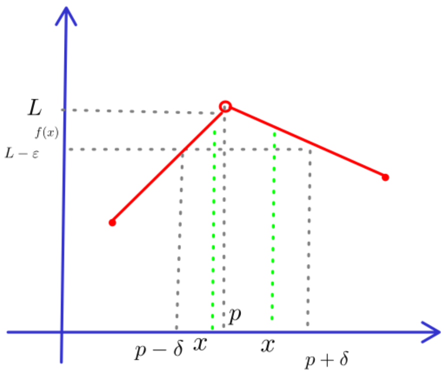
- se p é ponto de acumulação de D_f, $\lim_{x\to p} f(x) = \mathbf{L}^{+}$ significa

  $\forall\,\varepsilon > \mathbf{0}\ \exists\,\delta > \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{x} \in \mathbf{D_f}$ **e** $\mathbf{0} < |\mathbf{x}-\mathbf{p}| < \delta$ implica $\mathbf{L} \leq \mathbf{f(x)} < \mathbf{L} + \varepsilon$



- se p é ponto de acumulação de D_f, $\lim_{x\to p} f(x) = \mathbf{L}^{-}$ significa

  $\forall\,\varepsilon > \mathbf{0}\ \exists\,\delta > \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{x} \in \mathbf{D_f}$ **e** $\mathbf{0} < |\mathbf{x}-\mathbf{p}| < \delta$ implica $\mathbf{L} - \varepsilon < \mathbf{f(x)} \leq \mathbf{L}$



- .....
- .....

Teorema.
Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ e seja p ponto de acumulação de $D_f \cap (p,\infty)$ e de $D_f \cap (-\infty, p)$. Então vale a seguinte equivalência:

$$\exists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \mathbf{f(x)} = \mathbf{L} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}^{+}} \mathbf{f(x)} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}^{-}} \mathbf{f(x)} = \mathbf{L}$$

Também valem análogos dos teoremas sobre operações com limites e limite da composta:

- substituindo $x \to p$ por $x \to p^+$ e $0 < |x - p| < r$ por $p < x < p + r$
- substituindo $x \to p$ por $x \to p^-$ e $0 < |x - p| < r$ por $p - r < x < p$
- substituindo $y \to a$ por $y \to a^+$ e a por a^+
- substituindo $y \to a$ por $y \to a^-$ e a por a^-

Exemplo:

Teorema.
Sejam

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \quad g : D_g \to \mathbb{R}, \quad Im(f) \subseteq D_g,$$

p ponto de acumulação de $D_f \cap (p, \infty)$, a ponto de acumulação de $D_g \cap (-\infty, a)$,

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = a^-, \qquad \lim_{y \to a^-} g(y) = L.$$

Além disso, valha pelo menos UMA entre

(a) $a \in D_g$ e g contínua em a,

(b) $\exists r > 0 : \ x \in D_f \ e \ p < x < p + r \Rightarrow f(x) \neq a$.

Então

$$\lim_{x \to p^+} g \circ f(x) = L.$$

Exemplo 7. Exercícios 22 e 23 em Slides de Exercícios.

Lc.5 Outros teoremas sobre limites

Considere funções $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ e seja p ponto de acumulação de D.

Lc.5.1 Unicidade, conservação de sinal e comparação

Teorema (Unicidade do limite).
Se

$$\exists \lim_{x \to p} f(x) = L_1 \qquad e \quad \exists \lim_{x \to p} f(x) = L_2$$

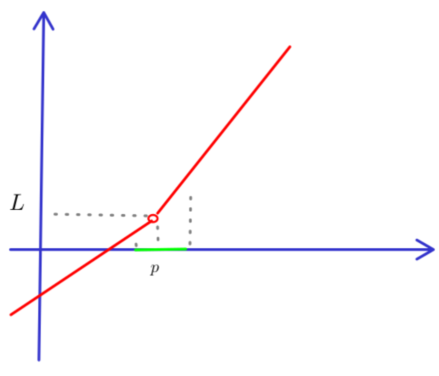
então $L_1 = L_2$

Teorema (de conservação do sinal).
Se

$$\exists \lim_{x \to p} f(x) = L > 0 \ \ (resp.\ L < 0)$$

então

$$\exists r > 0 : \ x \in D \ e \ 0 < |x - p| < r \ \Rightarrow f(x) > 0 \ \ (resp.\ f(x) < 0)$$

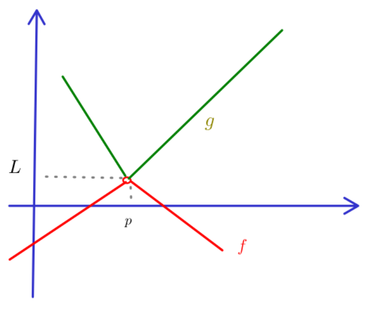


Teorema (de comparação).
Se

$$\exists\, r > 0 : \ x \in D \ e \ 0 < |x - p| < r \ \Rightarrow f(x) \leq g(x) \quad (\text{ou } f(x) < g(x))$$

$$\exists \lim_{x \to p} f(x) = L_f \qquad e \quad \exists \lim_{x \to p} g(x) = L_g$$

então $L_f \leq L_g$.



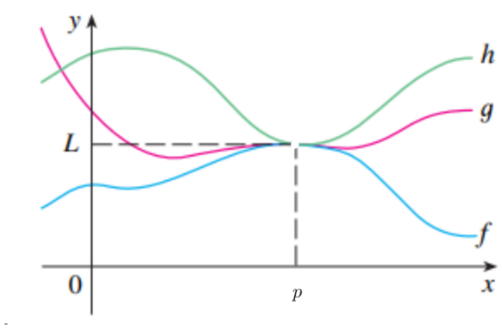
Lc.5.2 Confronto e Anulamento

Teorema (de confronto).
Se

$$\exists\, r > 0 : \ x \in D \ e \ 0 < |x - p| < r \ \Rightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad (\text{ou } f(x) < g(x) < h(x))$$

$$\exists \lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} h(x) = L$$

então $\exists \ \lim_{x \to p} g(x) = L$



Fonte: Stewart, Cálculo, vol. 1

Exemplo 8. Exercício 24 em Slides de Exercícios: Verifique que

$$\lim_{x \to p} f(x) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to p} |f(x)| = 0.$$

Teorema (do anulamento).
Se f é limitada numa vizinhança de p, ou seja,

$$\exists\, M > 0, \exists\, r > 0 : \; x \in D \; e \; 0 < |x - p| < r \; \Rightarrow |f(x)| \leq M$$

e

$$\lim_{x \to p} g(x) = 0$$

então $\lim_{x \to p} f(x)g(x) = 0$.

Todos os teoremas desta seção valem:

- substituindo $x \to p$ por $x \to p^+$ e $0 < |x - p| < r$ por $p < x < p + r$
- substituindo $x \to p$ por $x \to p^-$ e $0 < |x - p| < r$ por $p - r < x < p$

Exemplo 9. Exercício 25 em Slides de Exercícios.
