1 Integral múltipla em conjuntos limitados

1.1 Definição de integral múltipla em conjuntos limitados

Dado $D \subseteq \mathbb{R}^n$ limitado e $f : D \to \mathbb{R}$ limitada, definimos a **integral de f em D** como

$$\int_D f := \int_R F$$

onde:

R **é um (multi-)retângulo em** $\mathbb{R}^n$ **tal que** $D \subseteq R$

e

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & se\ \mathbf{x} \in D \\ 0 & se\ \mathbf{x} \notin D \end{cases}$$

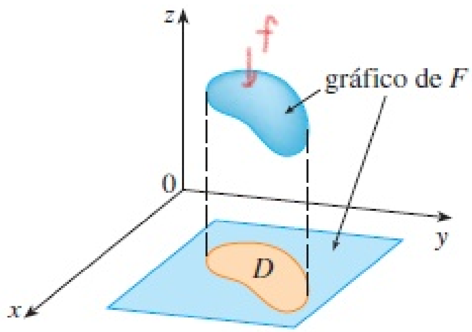


Figura 1: Imagem do Livro Cálculo, vol. 2, James Stewart ($n = 2$), Geogebra

Quando f é integrável em D e como integrar?

1.2 Medida de Peano-Jordan

Definição: Dado $\mathbf{D} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ limitado,

- dizemos que D **é mensurável*** **(segundo Peano-Jordan)** se

$$\int_{\mathbf{D}} \mathbf{1} \qquad \text{existe.}$$

- chamamos **medida*** **(de Peano-Jordan) de** D (notação $|D|_n$),

$$|\mathbf{D}|_{\mathbf{n}} := \int_{\mathbf{D}} \mathbf{1}$$

$$|D|_n = \begin{cases} \textbf{comprimento} & n = 1 \\ \textbf{área} & n = 2 \\ \textbf{volume} & n = 3 \\ \textbf{medida } n\textbf{-dimensional} & n \geq 4 \end{cases}$$

- *se* $R = [a, b] \times [c, d]$ *é um retângulo (em* $\mathbb{R}^2$*) então* $|R|_2 = (b - a)(d - c)$:

$$|R|_2 = \iint_R 1 = \int_a^b \int_c^d 1 dy dx = (b - a)(d - c) = A(R).$$

- *se* $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times .. \times [a_n, b_n]$ *é um multi-retângulo (em* $\mathbb{R}^n$*) então* $|R|_n = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)...(b_n - a_n)$, no caso $n = 3$:

$$|R|_3 = \iiint_R 1 = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} 1 dz dy dx = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3) = V(R).$$

- *se* $R = [a, b]$ *é um* $1-$*retângulo (em* $\mathbb{R}$*) então* $|R|_1 = (b - a)$:

$$|R|_1 = \int_R 1 = \int_a^b 1 dx = (b - a) = C(R).$$

Existem conjuntos que não tem medida* (conjunto não mensurável):

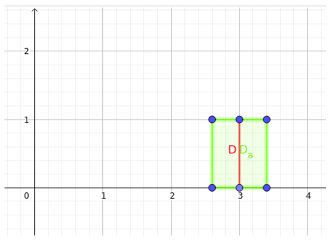
Exemplo: $D = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : x, y \in \mathbb{Q}\}$ "não tem área":

Para qualquer partição de $[0,1] \times [0,1] \supset D$, é possível escolher pontos (x_i^*, y_j^*) de forma que:
- $(x_i^*, y_j^*) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e portanto $F(x_i^*, y_j^*) = 1$, o que implica que o limite da soma de Riemann será 1.
- $(x_i^*, y_j^*) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e portanto $F(x_i^*, y_j^*) = 0$, o que implica que o limite da soma de Riemann será 0.

Existem conjuntos de medida* zero:

- Dado $D \subseteq \mathbb{R}^n$ limitado, $|D|_n = 0$ é equivalente a
  $\forall \varepsilon > 0$ existe um número finito de (multi-)retângulos $R_1, .., R_k$ em $\mathbb{R}^n$ tais que
$$D \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} R_i \quad e \quad \sum_{i=1}^{k} |R_i|_n < \varepsilon.$$

Exemplo: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x = 3, 0 \leq y \leq 1\}$ tem medida* nula:



Tome $\delta > 0$ e $D_\delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 3 - \delta < x < 3 + \delta, 0 \leq y \leq 1\}$.
Claro que $D \subset D_\delta$. Além disso,
$$|D_\delta|_2 = ((3+\delta) - (3-\delta))(1-0) = 2\delta \longrightarrow 0, \quad \text{quando } \delta \to 0.$$
Portanto, $|D|_2 = 0$.

Teorema 1.1. *Seja* $\mathbf{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ *um conjunto limitado e* $\partial\mathbf{D}$ *sua fronteira. Então:*
D é mensurável $(\exists \int_D 1)$ *se, e só se,* $|\partial \mathbf{D}|_\mathbf{n} = \mathbf{0}$ $(\int_{\partial D} 1 = 0)$.

- **A reunião de um número finito de conjuntos (limitados) de medida* zero, tem medida* zero.**

Exemplos:

- **Estes conjuntos (limitados) em $\mathbb{R}^2$ têm área zero:**
  - gráfico de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ com f integrável.
  - traço de curva regular $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$

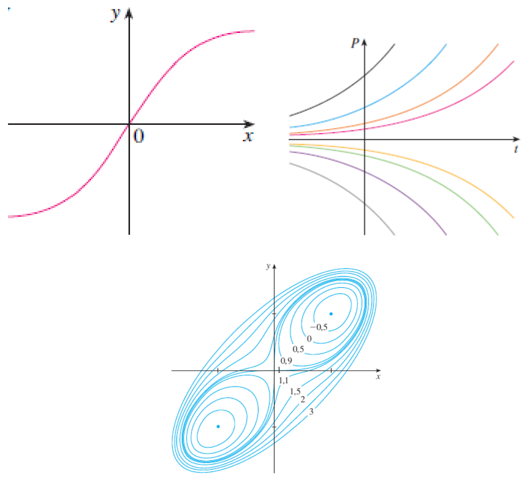


Figura 2: Stewart, Cálculo, vol.2

- **Estes conjuntos (limitados) em $\mathbb{R}^3$ têm volume zero:**
  - gráfico de $f : C \to \mathbb{R}$ com f integrável e $C \subseteq \mathbb{R}^2$ limitado e mensurável.
  - imagem de $\sigma : D \to \mathbb{R}^3$ com σ "regular" e $D \subseteq \mathbb{R}^{1\,ou\,2}$ limitado fechado e mensurável (**curvas e superfícies**).

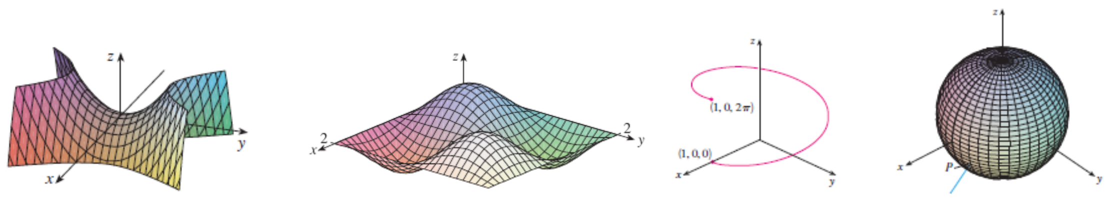


Figura 3: Stewart, Cálculo, vol.2

- **Estes conjuntos (limitados) em $\mathbb{R}^n$ têm medida zero:**
  - gráfico de $f : C \to \mathbb{R}$ com f integrável e $C \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ limitado e mensurável.
  - imagem de $\sigma : D \to \mathbb{R}^n$ com σ "regular" e $D \subseteq \mathbb{R}^{k\ (k<n)}$ limitado fechado e mensurável.

1.3 Integrabilidade e Teorema de Fubini

Teorema 1.2. *Sejam* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ **limitado**, $f : D \to \mathbb{R}$ **limitada** *Se* D *é mensurável* $(|\partial D|_n = 0)$ *e* f **é contínua exceto possivelmente em um conjunto de medida* nula**, *então* f **é integrável em** D.

Teorema 1.3 (Teorema de Fubini em $\mathbb{R}^2$)**.**

- *Seja* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b, \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ **onde** $g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ **são limitadas e integráveis.**

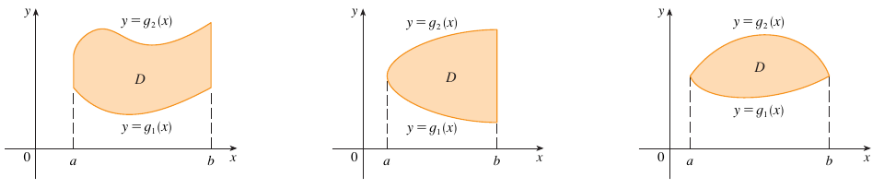


Figura 4: Stewart, Cálculo, vol. 2: Região Tipo 1

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ **limitada e contínua**.

Então f **é integrável em** D **e vale**

$$\iint_D f = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

- *Seja* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ c \leq y \leq d, \ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ **onde** $h_{1,2} : [c, d] \to \mathbb{R}$ **saõ limitadas e integráveis.**

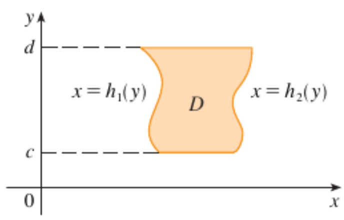


Figura 5: Stewart, Cálculo, vol. 2: Região Tipo 2

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ **limitada e contínua**.

então f **é integrável em** D **e vale**

$$\iint_D f = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx \right) dy$$

Teorema 1.4 (Teorema de Fubini em $\mathbb{R}^3$)**.**

- *Seja* $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in D, \ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\right\}$ **onde** $u_1, u_2 : D \to \mathbb{R}$ **são limitadas e integráveis e** $D \subseteq \mathbb{R}^2$ **é limitado e mensurável.**

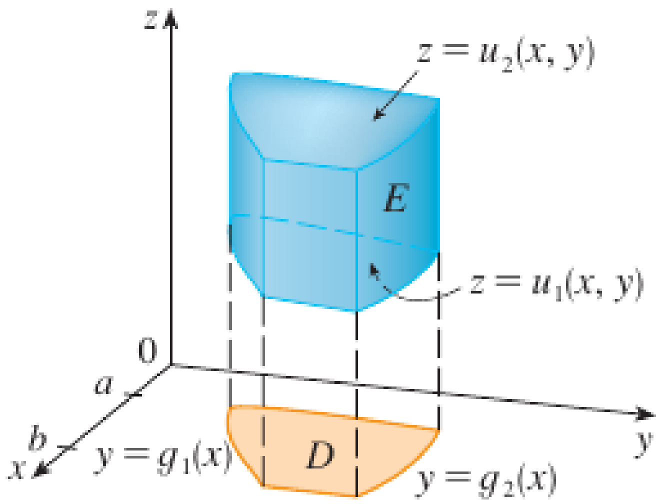


Figura 6: Stewart, Cálculo, vol.2: Região Tipo 1

Seja $f : E \to \mathbb{R}$ **limitada e contínua**.

então f **é integrável em** E **e vale**

$$\iiint_E f = \iint_D \left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dxdy$$

- *Analogamente trocando o papel das variáveis:*

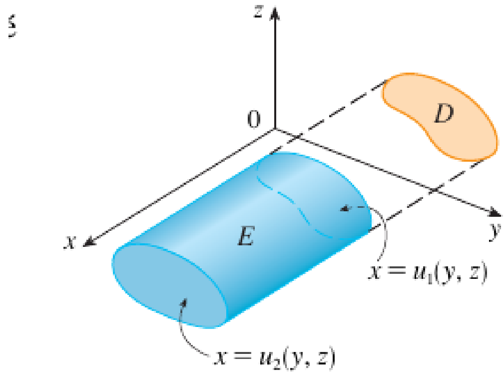


Figura 7: Stewart, Cálculo, vol.2: Região Tipo 2

$$\iiint_E f = \iint_D \left(\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx \right) dydz$$

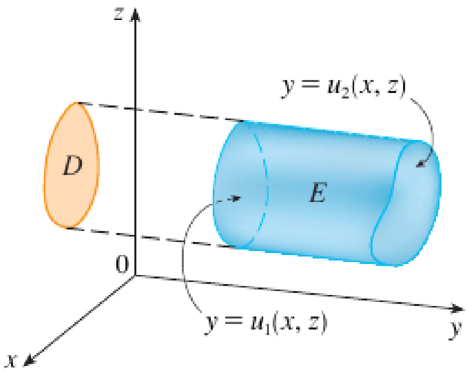


Figura 8: Stewart, Cálculo, vol.2: Região Tipo 3

$$\iiint_E f = \iint_D \left(\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy \right) dxdz$$

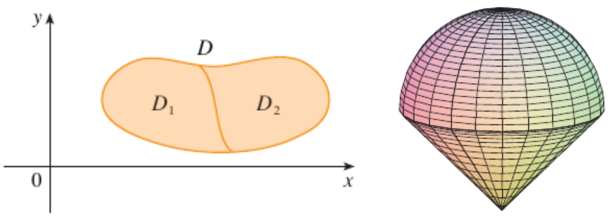
1.4 Propriedades da integral múltipla

Valem a maioria das propriedades da integral em uma variável:
Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ limitadas e integráveis em D, com $D \subseteq \mathbb{R}^n$ limitado e mensurável. Então

- $(\inf_D f)\ |D|_n \leq \int_D f \leq (\sup_D f)\ |D|_n$
- $\alpha f + \beta g$ **é integrável em** D e $\int_D (\alpha f + \beta g) = \alpha \left(\int_D f\right) + \beta \left(\int_D g\right)$, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $|f|$ **é integrável** e $\left|\int_D f\right| \leq \int_D |f|$,
- fg **é integrável**
- $f \geq 0$ **em** D **implica** $\int_D f \geq 0$.
- $f \geq g$ **em** D **implica** $\int_D f \geq \int_D g$.
- $f = 0$ **em** D **implica** $\int_D f = 0$.
- **se** $|D|_n = 0$ **então** $\int_D f = 0$.
- Se D **conexo por caminhos e** f **contínua então existe** $\mathbf{x} \in D$ **tal que**

$$f_{\text{med}} = f(\mathbf{x}) = \frac{\int_D f}{|D|_n} \qquad \textbf{(Valor médio)}$$

Sejam $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ **limitados e mensuráveis com** $|D_1 \cap D_2|_n = 0$



- Se f é limitada e integrável em D_1 e em D_2 então é integrável em $D_1 \cup D_2$ e

$$\int_{D_1 \cup D_2} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f \tag{1.1}$$

- Se f é limitada e integrável em $D_1 \cup D_2$ então é integrável em D_1 e em D_2 e vale (1.1)

Sugestão de Exercícios:

- Lista 2 do prof. Eugenio Massa: 2, 3(*), 12-b), 12-d), 13, 15, 16, 17.
- Listas no e-disciplinas: Integral dupla parte 1 (exercício 2), Integral dupla parte 2 (exercícios: 1 e 2) e Integral tripla parte 1 (exercícios: 1 e 2) .

(*) Para o exercício 3: quando f é contínua e D é compacto, então:

$$\inf_D f = \text{mínimo absoluto de } f \text{ em } D$$

e

$$\sup_D f = \text{máximo absoluto de } f \text{ em } D.$$