

Conteúdo

B.1	Base	B.1
B.1.1	Interpretação das propriedades de vetores usando coordenadas	B.2
B.1.2	Mudança de base	B.7

Objetivo

Apresentar o conceito de **base** e **coordenadas de um vetor** em relação a uma base para auxiliarem no cálculo entre vetores. Aula 4

B.1 Base

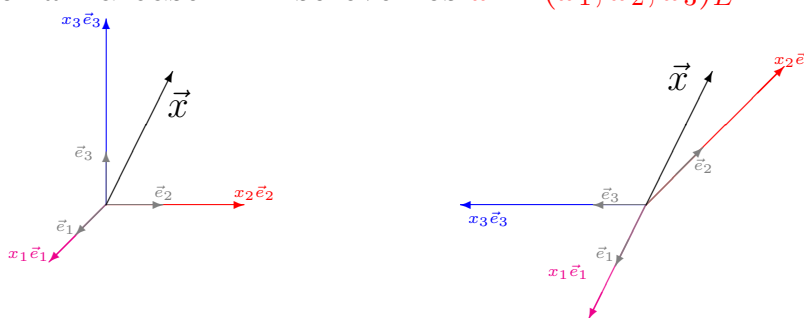
Definição B.1.1. Uma n -upla ordenada $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ de n vetores LI de V^n chama-se **base** de V^n .

Vimos que (Proposição [D.2.8 - Slide 2](#)) um qualquer $\vec{x} \in V^3$ é combinação linear única dos elementos $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ de uma base E , ou seja:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3, \tag{B.1.1}$$

onde os escalares x_1, x_2, x_3 são únicos para cada vetor \vec{x} .

Definição B.1.2. Chamamos a terna (x_1, x_2, x_3) de números reais em (B.1.1) de **coordenadas** do vetor \vec{x} na base E . Escrevemos $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)_E$.¹



Exemplo B.1.3.

- (a) $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E = \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_E \iff u_1 = v_1, u_2 = v_2$ e $u_3 = v_3$.
- (b) $\vec{0} = (0, 0, 0)_E$.

¹Mais adiante introduziremos "sistema de coordenadas" (ver [Slide 6](#))

B.1.1 Interpretação das propriedades de vetores usando coordenadas

Propriedades:

Se $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$(a) \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)_E$$

$$(b) \lambda \vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)_E.$$

Dependência linear de dois vetores:

Queremos obter um critério para analisar quando os vetores \vec{u} e \vec{v} em V^3 são LD/LI através de suas coordenadas

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E, \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_E :$$

$$\vec{u}, \vec{v} \text{ LD} \iff \exists \alpha, \beta \text{ não ambos nulos tais que } \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0}$$

$$\iff \exists \alpha, \beta \text{ não ambos nulos; } (\alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2, \alpha u_3 + \beta v_3)_E = (0, 0, 0)_E$$

$$\iff \begin{cases} \alpha u_1 + \beta v_1 = 0 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 = 0 \\ \alpha u_3 + \beta v_3 = 0 \end{cases} \text{ tem mais de uma solução (nula e não nula, SPI}^2)$$

Proposição B.1.4. *Dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_E$ são LD se e somente se*

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \quad e \quad \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Corolário. *Se um dos determinantes acima é não nulo, então os vetores \vec{u}, \vec{v} são LI.*

¹Sistema Possível e Indeterminado

Exemplo B.1.5. Ver Exercícios 12 e 13 em [Slide de Exercícios](#).

Dependência linear de três vetores:

Queremos obter um critério para analisar quando os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} em V^3 são LD/LI através de suas coordenadas

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E, \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_E, \quad \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)_E :$$

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ LD} \iff \exists \alpha, \beta, \gamma \text{ não todos nulos tais que } \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 = 0 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2 = 0 \\ \alpha u_3 + \beta v_3 + \gamma w_3 = 0 \end{cases} \text{ tem mais de uma solução (nula e não nula)}$$

Proposição B.1.6. Três vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_E$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)_E$ são LD se e somente se

$$\begin{array}{l} \begin{matrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{matrix} (\text{coordenadas de } \vec{u} \rightarrow) \\ (\text{coordenadas de } \vec{v} \rightarrow) \\ (\text{coordenadas de } \vec{w} \rightarrow) \end{matrix} \end{array} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Corolário. Os vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_E$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)_E$ são LI o determinante acima é não nulo.

Exemplo B.1.7. Ver Exercícios 14 a 16 em [Slide de Exercícios](#).

Nota:

- Em V^3 , uma base é formada por 3 vetores LI. As bases não são únicas!!
- Conhecendo-se uma base, um qualquer vetor pode ser representado de de maneira única por uma tripla ordenada de números reais, ou seja, podemos identificar V^3 com \mathbb{R}^3 .
- Todas as propriedades de vetores podem ser reescritas usando coordenadas.
- Computacionalmente é mais fácil e prático realizar as operações sobre vetores usando as coordenadas.

B.1.2 Mudança de base

Aula 5

Já sabemos que V^3 não possui uma única base.

DADO UM VETOR \vec{u} EM V^3 E DUAS BASES E E F DE V^3 , QUAL A RELAÇÃO ENTRE AS COORDENADAS DE \vec{u} NA BASE E COM AS COORDENADAS DE \vec{u} NA BASE F ?

Motivação:

- Reescreva o sistema da resolução do Exercício 16-(b) em forma matricial.

$$\vec{f}_1 = (2, -1, 0)_E, \vec{f}_2 = (1, -1, 2)_E, \vec{f}_3 = (1, 0, 1)_E, \vec{u} = (1, 1, 1)_E, \vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)_F$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma & = 1 \\ -\alpha - \beta & = 1 \\ 2\beta + \gamma & = 1 \end{cases}$$

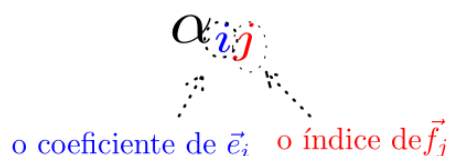
Mudança de base:

- $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ bases de V^3
- Dado um $\vec{u} \in V^3$ com coordenadas $(x_1, x_2, x_3)_E$ e $(y_1, y_2, y_3)_F$, temos

$$\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \quad \text{e} \quad \vec{u} = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3.$$

- Cada vetor de F pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores da base E , ou seja, existem escalares α_{ij} tais que

$$\begin{aligned}\vec{f}_1 &= \alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{21}\vec{e}_2 + \alpha_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 &= \alpha_{12}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2 + \alpha_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 &= \alpha_{13}\vec{e}_1 + \alpha_{23}\vec{e}_2 + \alpha_{33}\vec{e}_3.\end{aligned}$$



- Logo,

$$\begin{aligned}\vec{u} &= y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3 \\ &= y_1(\alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{21}\vec{e}_2 + \alpha_{31}\vec{e}_3) + y_2(\alpha_{12}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2 + \alpha_{32}\vec{e}_3) \\ &\quad + y_3(\alpha_{13}\vec{e}_1 + \alpha_{23}\vec{e}_2 + \alpha_{33}\vec{e}_3) \\ &= (\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3)\vec{e}_1 + (\alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3)\vec{e}_2 \\ &\quad + (\alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3)\vec{e}_3.\end{aligned}$$

- Pela unicidade das coordenadas,

$$\begin{aligned}x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3 \\ x_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3 \\ x_3 &= \alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3.\end{aligned}$$

Escrevendo as equações acima na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{(\vec{u})_E} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}}_{M_{EF}} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{(\vec{u})_F}, \quad (\text{B.1.2})$$

- $(\vec{u})_E$: é a matriz coluna $n \times 1$ formada pelas coordenadas de u na base E ;
- $(\vec{u})_F$: é a matriz coluna $n \times 1$ formada pelas coordenadas de u na base F ;
- M_{EF} : é a matriz quadrada $n \times n$ na qual a coluna 1 é formada pelas coordenadas de \vec{f}_1 na base E ; a coluna 2 é formada pelas coordenadas de \vec{f}_2 na base E e a coluna 3 é formada pelas coordenadas de \vec{f}_3 na base E .

Definição B.1.8. A matriz M_{EF} é chamada **matriz de mudança da base E para a base F** .

Notações:

$$(\vec{u})_E = M_{EF}(\vec{u})_F; \quad ()_E = M_{EF}()_F. \quad (\text{B.1.3})$$

Nota: Como $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ são LI (pois F é uma base), temos que o determinante de M_{EF} é não nulo. Portanto, a matriz mudança de base possui matriz inversa $(M_{EF})^{-1}$ e vale

$$M_{EF}(M_{EF})^{-1} = (M_{EF})^{-1}M_{EF} = Id,$$

onde Id é a matriz identidade:

$$Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo B.1.9. Ver Exercícios 17 a 19 em [Slide de Exercícios](#).

Existe alguma relação entre M_{EF} e M_{FE} ??

Proposição B.1.10. *Sejam E, F, G três bases de V^3 . Então,*

$$M_{EF}M_{FG} = M_{EG}.$$

Corolário B.1.11. *Sejam E e F bases de V^3 . Então,*

$$M_{FE} = (M_{EF})^{-1}.$$

Exemplo B.1.12. Ver Exercício 20 em [Slide de Exercícios](#).