

Conteúdo

B1	cont. Aula 4	Funcionais lineares	B2
B2	O Teorema de Hahn Banach		B3
B2.1	Prova H-B-real		B4
B2.2	Aula 5 Prova H-B-complexo		B6
B2.3	Algumas consequências do T. de Hahn-Banach		B7
B3	Versões geométricas de H-B (aqui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)		B9
B3.1	Hiperplanos		B9
B3.2	Aula 6 Funcional de Minkowski		B10
B4	Aula 7 Consequências do Teorema de Baire		B16
B4.1	Princípio da Limitação Uniforme		B16
B4.2	Teorema da Aplicação Aberta		B19
B4.2.1	Demonstração do TAA		B20
B4.2.2	Aula 8 Demonstrações Lemas técnicos		B21
B4.3	Teorema do Gráfico Fechado		B23
B5	Mais alguns resultados		B25
B5.1	Espaço quociente		B25
B6	Soma de subespaços		B25
B7	Outros exercícios		B26

B1 Funcionais lineares

cont. Aula 4

- X e.v.: os elementos de $\mathcal{L}_?(X, \mathbb{K})$ são ditos **funcionais lineares**
- X e.v.n.: os elementos de $L(X, \mathbb{K})$ são ditos **funcionais lineares contínuos** (limitados).
- $X^* := L(X, \mathbb{K})$ é dito **dual de X** e é sempre Banach.

Teorema de Hahn Banach: forma analítica

- resolve “problema de extensão”: estende funcionais lineares definidos em subespaços ao e.v.n. conservando determinada propriedade do funcional;
- mostra a existência de funcionais lineares limitados: X^* é rico!

Teorema de Hahn Banach: forma geométrica

- mostra que dois conjuntos convexos (satisfazendo determinadas condições) podem ser “separados” por um hiperplano

B2 O Teorema de Hahn Banach

Um **funcional sublinear** num e.v.n X , é uma função $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{e} \quad p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall x, y \in X, \forall \lambda \geq 0.$$

Exemplos:

- todo funcional linear é um funcional sublinear
- toda norma é um funcional sublinear
- toda seminorma¹ é um funcional sublinear

Teorema B2.1 [Hahn-Banach real]. *Sejam*

- X um espaço vetorial real,
- p um funcional sublinear em X ,
- M um subespaço vet. de X
- f um funcional linear em M tal que $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in M$.

Então existe um funcional linear $\tilde{f}$ em X tal que $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$ e $\tilde{f}|_M = f$.^[Fol99, prova:p.158] ◁

Teorema B2.2 [Hahn-Banach complexo]. *Sejam*

- X um espaço vetorial ~~real~~ **complexo**,
- p ~~um funcional sublinear~~ **uma seminorma** em X ,
- M um subespaço vet. de X
- f um funcional linear em M tal que ~~$f(x) \leq p(x)$~~ **$|f(x)| \leq p(x)$** para todo $x \in M$.

Então existe um funcional linear $\tilde{f}$ em X tal que ~~$\tilde{f}(x) \leq p(x)$~~ **$|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$** para todo $x \in X$ e $\tilde{f}|_M = f$. ◁

¹uma **seminorma** deve satisfazer as propriedades de norma exceto a condição $\|x\| = 0 \implies x = 0$

B2.1 Prova H-B-real

Prova Teorema H-B-real:

Lema de Zorn Se X é um conjunto parcialmente ordenado e todo subconjunto totalmente ordenado de X tem um limitante superior então X tem um elemento maximal.

Conjunto parcialmente ordenado: com uma **relação de ordem** " $\preceq$ " (reflexiva, antisimétrica e transitiva)

(reflexiva $x \preceq x$)

antisimétrica $x \preceq y$ e $y \preceq x \implies x = y$

transitiva $x \preceq y$ e $y \preceq z \implies x \preceq z$)

Conjunto totalmente ordenado: com uma relação de ordem " $\preceq$ " tal que dados x, y quaisquer $x \preceq y$ ou $y \preceq x$

Limitante superior de $Y \subseteq X$: $l \in X$ t.q. $y \preceq l$ para todo $y \in Y$.
 $m \in X$ é **elemento maximal** de X : $x \in X$ e $m \preceq x \implies m = x$.

1. $\mathcal{E} = \{(M_\lambda, g_\lambda) : M \subset M_\lambda \stackrel{s.e.v.}{\subseteq} X \text{ e } g_\lambda \in \mathcal{L}_?(M_\lambda, \mathbb{R}); g_\lambda \leq p_{\text{em}} M_\lambda, g_\lambda|_M = f\}$
2. $\mathcal{E} \neq \emptyset$
3. " $\preceq$ " definida abaixo é uma relação de ordem em $\mathcal{E}$:

$$(M_\lambda, g_\lambda) \preceq (M_\beta, g_\beta) \iff \begin{cases} M_\lambda \subset M_\beta \\ g_\beta|_{M_\lambda} = g_\lambda \end{cases}$$

4. $(\mathcal{E}, \preceq)$ é um conjunto parcialmente ordenado
5. Seja $\mathcal{B} = \{(M_\beta, g_\beta)\}_{\beta \in B} \subset \mathcal{E}$ totalmente ordenado

Af.1. $\mathcal{B}$ tem um limitante superior $(\tilde{M}, \tilde{g}) \in \mathcal{E}$

$$\tilde{M} := \cup_{\beta \in B} M_\beta \text{ e } \tilde{g} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R} : x \in M_\beta \mapsto \tilde{g}(x) = g_\beta(x)$$

6. Pelo Lema de Zorn, $\mathcal{E}$ tem um elemento maximal $(M_0, g_0) \in \mathcal{E}$

Af.2. $M_0 = X$

7. Portanto, o T. H-B-real segue tomando $\tilde{f} := g_0$

□

Prova de Af.2.: Supor $M_0 \neq X$

1. M_0 é subesp. próprio de X e tome $x \in X \setminus M$

Lema [Extensão em uma dimensão] Sejam

- X um espaço vetorial real,
- p um funcional sublinear em X ,
- M_0 um subespaço vet. próprio de X
- g_0 um funcional linear em M_0 t.q. $g_0(m) \leq p(m)$, $\forall m \in M_0$
- $x \in X \setminus M_0$

Então, existe $g_1 : M_1 = M_0 + \mathbb{R}x \stackrel{s.e.v.}{\subseteq} X \rightarrow \mathbb{R}$ linear tal que $g_1(m) \leq p(m)$ para todo $m \in M_1$ e $g_1|_{M_0} = g_0$.

2. existe g_1 como no lema acima

3. $(M_1, g_1) \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} M \subset M_0 \subset M_1 &\stackrel{s.e.v.}{\subseteq} X \\ (g_1|_{M_0} = g_0, g_0|_M = f) &\implies g_1|_M = f \end{aligned}$$

4. $(M_0, g_0) \preceq (M_1, g_1)$

pelo Lema: $M_0 \subset M_1 \quad g_1|_{M_0} = g_0$

5. como (M_0, g_0) maximal, então $(M_1, g_1) = (M_0, g_0) \rightsquigarrow \leftarrow$

6. portanto $M_0 = X$

□

B2.2 Prova H-B-complexo

Aula 5

Relação espaço real / espaço complexo

- Seja X um e.v. sobre $\mathbb{C}$, definimos $X_{\mathbb{R}}$ o e.v. sobre $\mathbb{R}$ obtido de X limitando a multiplicação aos escalares reais.

Se X for normado, sua norma também induz uma norma em $X_{\mathbb{R}}$.

- Dado $f \in \mathcal{L}_?(X, \mathbb{C})$, vale:

$$\phi := \Re e(f) \in \mathcal{L}_?(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$$

e

$$f(x) = \phi(x) - i\phi(ix)$$

- Dado $\phi \in \mathcal{L}_?(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$, vale:

$$f(x) := \phi(x) - i\phi(ix) \in \mathcal{L}_?(X, \mathbb{C})$$

- Além disso $\|f\|_{X^*} = \|\phi\|_{X_{\mathbb{R}}^*}$

Teorema. [Hahn-Banach complexo] Sejam

- X um espaço vetorial real **complexo**,
- p um funcional sublinear **uma seminorma** em X ,
- M um subespaço vet. de X
- f um funcional linear em M tal que $f(x) \leq p(x)$ **$|f(x)| \leq p(x)$** para todo $x \in M$.

Então existe um funcional linear $\tilde{f}$ em X tal que $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ **$|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$** para todo $x \in X$ e $\tilde{f}|_M = f$.

Prova Teorema H-B-complexo:

1. $\phi = \Re e(f)$ satisfaz as hipóteses do Teorema H-B-real
2. existe $\tilde{\phi} : X_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ linear tal que $\tilde{\phi}|_{M_{\mathbb{R}}} = \phi$ e $\tilde{\phi}(x) \leq p(x)$, $x \in X_{\mathbb{R}}$
3. $\tilde{f}(x) := \tilde{\phi}(x) - i\tilde{\phi}(ix)$, $x \in X$ é uma extensão de f , ou seja, $\tilde{f}|_M = f$

Af.1. $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{C}$ é linear

Af.2. $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$

□

B2.3 Algumas consequências do T. de Hahn-Banach

Corolário B2.3 [Extensão de funcional mantendo a norma].²

Sejam X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$, M um subespaço e $f \in M^*$. Então existe um funcional $\tilde{f} \in X^*$ tal que

$$\tilde{f}|_M = f \quad e \quad \|\tilde{f}\|_{X^*} = \|f\|_{M^*}.$$

◁

Demonstração.

1. $f \in M^* \implies |f(x)| \leq \|f\|_{M^*} \|x\|$ para todo $x \in M$
2. $p(x) := \|f\|_{M^*} \|x\|$, $x \in M$, é uma seminorma
3. (H-B-C) $\exists \tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{K}$ linear; $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$ e $\tilde{f}|_M = f$
4. (2)+(3) $\implies \|\tilde{f}\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\tilde{f}(x)| \leq \|f\|_{M^*}$
5. portanto $\tilde{f}$ é limitada ($\tilde{f} \in X^*$)
6. $\|\tilde{f}\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\tilde{f}(x)| \geq \sup_{\substack{x \in M \\ \|x\|=1}} |\tilde{f}(x)| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |f(x)| = \|f\|_{M^*}$
7. (4)+(6) $\implies \|\tilde{f}\|_{X^*} = \|f\|_{M^*}$

□

Teorema B2.4 [Existem muitos funcionais]. Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$.

- a. Se M é um subespaço fechado de X e $x_0 \in X \setminus M$, então existe $f \in X^*$ tal que

$$f|_M = 0, \quad \|f\|_{X^*} = 1 \quad e \quad f(x_0) = d(x_0, M) = \inf_{m \in M} \|x_0 - m\| > 0.$$

²Teorema de Hahn-Banach para e.v.n.

- b. Se X é não trivial, X^* é não trivial: Se $x_0 \neq 0$, existe $f \in X^*$ tal que $\|f\|_{X^*} = 1$ e $f(x_0) = \|x_0\|$.
- c. Os funcionais lineares limitados em X separam pontos: Se $x \neq y$, existe $f \in X^*$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

<

Exercícios

Exercício B2.5. Se X é um e.v.n. não trivial, vale

$$\|x\|_X = \max_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|_{X^*}=1}} |f(x)|$$

(mostre que a norma é igual ao sup e que o sup é atingido).

Mostre que ao contrário, na formula já vista $\|f\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |f(x)|$, o sup

pode não ser atingido (pense no espaço das funções contínuas em $[0, 1]$ com $f(0) = 0$. Veja também o ex 1.4 (p. 21) do [Bre11]) ★

Exercício B2.6. Mostre que um subespaço M de em e.v.n. X é denso se e só se vale que

$$\forall \phi \in X^* \text{ t.q. } \phi|_M = 0, \text{ vale } \phi \equiv 0$$

★

Exercício B2.7 (EB1). Sejam $e_i = (\delta_{i,j})_{j \in \mathbb{N}}$, $i \in \mathbb{N}$, $h = (1/j)_{j \in \mathbb{N}}$ e $\mathbf{1} = (1, 1, 1, 1, \dots)$, onde $\delta_{i,j}$ é o delta de Kronecker.

Mostre que existe $\phi \in (\ell_\infty)^*$ tal que $\phi(e_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ mas $\phi(\mathbf{1}) \neq 0$,

Mostre que não existe $\phi \in (\ell_\infty)^*$ tal que $\phi(e_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $\phi(h) \neq 0$. ★

B3 Versões geométricas de H-B (aqui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

B3.1 Hiperplanos

Um **hiperplano** (afim) é um conjunto da forma

$$H = [f = \alpha] := \{x \in X : f(x) = \alpha\}.$$

onde $f \in \mathcal{L}_?(X, \mathbb{R})$, $f \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. $f = \alpha$ é chamada de **equação do hiperplano**.

Proposição B3.1.

$[f = \alpha]$ é fechado se e somente se f é contínua ($f \in X^*$).

◁

Exercícios

Exercício B3.2.

- $[f = \alpha] \neq \emptyset$ para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $[f = 0]$ é o único subespaço próprio de X que contém $[f = 0]$.
- $[f = \alpha]$ é fechado ou é denso em X



Demonstração. Se f contínua, é imediato que $[f = \alpha] = f^{-1}(\{\alpha\})$ é fechado.

Supor $H = [f = \alpha]$ fechado:

Queremos: $\|f\|_{X^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| < \infty \iff |f(x)| \leq c$, para todo $x : \|x\| \leq 1$

1. $X \setminus H \neq \emptyset$ e é aberto
2. $\exists x_0 \in X \setminus H$ e portanto $f(x_0) \neq \alpha$: $f(x_0) < \alpha$
3. $\exists r > 0$; $\bar{B}_{x_0}(r) \subset X \setminus H$

Af.1 $f(x) < \alpha$ para todo $x \in \bar{B}_{x_0}(r)$

Af.2 $f(x) < \frac{\alpha - f(x_0)}{r}$ para todo $x \in X : \|x\| \leq 1$

4. $|f(x)| < \frac{\alpha - f(x_0)}{r}$ para todo $x \in X : \|x\| \leq 1$

5. se $f(x_0) > \alpha$, análogo (verifique!)

□

B3.2 Funcional de Minkowski

Aula 6

Definição B3.3. Se $A, B \subseteq X$ dizemos que $[f = \alpha]$ separa A e B

- no sentido fraco, se

$$f(x) \leq \alpha \quad \forall x \in A \quad \text{e} \quad f(x) \geq \alpha \quad \forall x \in B.$$

- no sentido forte, se existe $\epsilon > 0$ tal que

$$f(x) \leq \alpha - \epsilon \quad \forall x \in A \quad \text{e} \quad f(x) \geq \alpha + \epsilon \quad \forall x \in B. \quad \star$$



Teorema B3.4 [Hahn-Banach - Formas Geométricas]. *Seja X um espaço vetorial normado real e sejam $A, B \subseteq X$ dois conjuntos convexos³, não vazios e disjuntos.*

FG1 Se A é aberto então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido fraco.

FG2 Se A é fechado e B é compacto, então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido forte.

◁

Aplicações

- na prova do Teorema de Krein-Milman (sobre conjuntos compacto convexos) que por sua vez é usado para provar, p.e., os Teoremas de Bochner e de [Berstein](#).
- em EDP: existência de uma *solução fundamental* para um operador diferencial geral com coeficientes constantes (Teorema de Malgrange-Ehrenpreis).

Demonstração. Precisaremos dos dois lemas a seguir.

□

³Ver página A16: $C \subset X$ é um conjunto **convexo** se

$$\overline{xy} : tx + (1-t)y \in C \quad \text{para todo } x, y \in C \text{ e } t \in [0, 1]$$

Dado um aberto convexo C em X com $0 \in C$, definimos o **Funcional de Minkowski de C** :

$$p_C(x) = p(x) := \inf\{\beta^{-1} > 0 ; \beta x \in C\}, \quad x \in X.$$

Observação.

1. p está bem definida: para cada $x \in X$, $\{\beta^{-1} > 0 ; \beta x \in C\} \neq \emptyset$.
2. $p(0) = 0$



Lema B3.5 [Propriedades do funcional de Minkowski].

p é um funcional sub-linear, $C = \{x \in X : p(x) < 1\}$ e existe $M > 0$ tal que

$$0 \leq p(x) \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X.$$



Demonstração.

1. Seja $x \in X$

- por definição: $0 \leq p(x)$
- $0 \in C$ aberto: $\exists r > 0; \bar{B}_r(0) \subset C \implies \frac{r}{\|x\|}x \in C$
- $p(x) = \inf\{\beta^{-1} > 0 ; \beta x \in C\} \leq \frac{\|x\|}{r} = \underbrace{\frac{1}{r}}_M \|x\|$

2. $x \in X : p(x) < 1 \implies \exists 0 < \beta^{-1} < 1; \beta x \in C$

- $0 \in C$ convexo: $\overline{\beta x 0} \in C \implies x = \beta^{-1}(\beta x) + (1 - \beta^{-1})0 \in C$, i.e., $\{x \in X : p(x) < 1\} \subset C$

- C aberto: $x \in C \setminus \{0\} \implies \exists r > 0; \bar{B}_r(x) \subset C$

- $(1 + \varepsilon)x \in C$ para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno

- $p(x) \leq \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1 \implies C \subset \{x \in X : p(x) < 1\}$

3. Sejam $x, y \in X$ e $\varepsilon > 0$

- propriedade direta de ínfimo: $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\lambda \geq 0$
- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ é construtivo:

$$\frac{x}{p(x) + \varepsilon}, \frac{y}{p(y) + \varepsilon} \in C \text{ pois: } p\left(\frac{\cdot}{p(\cdot) + \varepsilon}\right) = \frac{1}{p(\cdot) + \varepsilon} p(\cdot) < 1$$

$$\frac{x}{p(x) + \varepsilon}t + \frac{y}{p(y) + \varepsilon}(1 - t) \in C, \quad t \in [0, 1]$$

$$\exists t \in [0, 1]; \frac{x}{p(x) + \varepsilon}t + \frac{y}{p(y) + \varepsilon}(1 - t) = \frac{x + y}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} ??$$

$$\text{Sim: } t = \frac{p(x) + p(y)}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} \in [0, 1]$$

$$\frac{x + y}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} \in C \implies p\left(\frac{x + y}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon}\right) < 1 \quad \forall \varepsilon$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

□

Observação. Se $0 \notin C$ e $y_0 \in C$, o Lema B3.5 continua válido após redefinir o funcional de Minkowski como a seguir:

$$p(x) = \inf\{\beta^{-1} > 0 ; \beta(x - y_0) + y_0 \in C\}, \quad x \in X.$$

★

Lema B3.6. *Seja $C \subset X$ um aberto convexo não vazio e $x_0 \in X \setminus C$. Então existe $f \in X^*$ não nulo tal que $f(x) < f(x_0)$ para todo $x \in C$.*

Em particular o hiperplano fechado de equação $[f = f(x_0)]$ separa C de $\{x_0\}$ no sentido fraco. $\triangleleft$

Demonstração. Podemos assumir $0 \in C$.

Teorema Hahn-Banach real Sejam

- X um espaço vetorial real,
- $p = ??$ um funcional sublinear em X ,
- $M = ??$ um subespaço vet. de X
- $g = ??$ um funcional linear em M tal que $g(x) \leq p(x)$ para todo $x \in M$.

Então existe um funcional linear f em X tal que $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$ e $f|_M = g$.

- $p :=$ funcional de Minkowski de C que é sublinear
- $M := \mathbb{R}x_0$ que é subespaço vet. de X $(x_0 \in X \setminus C)$
- $g : M \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = g(tx_0) = t, t \in \mathbb{R}$ ⁴

1. g é linear

Af. $g(x) \leq p(x)$ para todo $x \in M$

- (T. H-B-real) $\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$ **linear**; $f(x) \leq p(x), x \in X$ e $f|_M = g$. ⁵
- $f(x) \leq p(x) \stackrel{LB3.5}{<} 1 = g(x_0) = f(x_0)$ para todo $x \in C$.

Af.1. f é **limitado** i.e., $\exists M > 0; |f(x)| \leq M \|x\|$ para todo $x \in X$

□

PRONTOS PARA DEMONSTRAR H-B-GEOMÉTRICO

⁴de fato queremos $g(tx_0) = tg(x_0)$ onde $g(x_0) =: c$. Mas para Af. valer precisa $0 < c \leq 1$ e para a penúltima conclusão valer precisa $c \geq 1$

⁵Note que $f(x_0) = g(x_0) = 1$ implicando o funcional não nulo.

Teorema Hahn-Banach - Formas Geométricas Seja X um espaço vetorial normado real e sejam $A, B \subseteq X$ dois conjuntos **convexos, não vazios e disjuntos**.

FG1 Se A é aberto então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido fraco.

FG2 Se A é fechado e B é compacto, então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido forte.

Prova do Teorema H-B -FG1.

Queremos: $f \in X^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$; $f(x) \leq \alpha, x \in A$ e $f(x) \geq \alpha, x \in B$

Lemma Seja $C = ?? \subset X$ um aberto convexo não vazio e $x_0 = ?? \in X \setminus C$. Então existe $f \in X^*$ tal que $f(x) < f(x_0)$ para todo $x \in C$.

- $C := A - B = \{x - y : x \in A, y \in B\} \neq \emptyset$ (pois $A, B \neq \emptyset$)

Af1. C é aberto (pois A é aberto)

Af2. C é convexo (pois A, B são convexos)

Af3. $x_0 = 0 \notin C$ (pois $A \cap B = \emptyset$)

- $\exists f \in X^*$ tal que $f(x - y) < f(0) = 0$ para todo $x \in A, y \in B$
- $f(x) < f(y)$ para todo $x \in A, y \in B \implies \sup_{x \in A} f(x) \leq \inf_{y \in B} f(y)$
- tome $\alpha \in \mathbb{R} : \sup_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} f(y)$

□

Prova do Teorema H-B -FG2.

Queremos: $f \in X^*, \alpha \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$; $f(x) \leq \alpha - \varepsilon, x \in A$ e $f(x) \geq \alpha + \varepsilon, x \in B$

Usaremos o T. H-B-1FG aplicado ao conjunto $C = A - B$ e um **adequado conj. aberto** (convexo, não vazio) que não intercepte C . Depois trabalhar para encontrar α e ε .

- $0 \notin C := A - B \neq \emptyset$ e é convexo

Af1. C é fechado (pois A é fechado e B compacto)

- $0 \in X \setminus C$ é aberto $\implies \exists r > 0; \mathbf{B}_r(\mathbf{0}) \cap C = \emptyset$

- (T.H-B-1FG) $\exists f \in X^*, c \in \mathbb{R}; f(x - y) \leq c \leq f(rz), x \in A, y \in B, z \in B_1(0)$
- $f(x) - f(y) \leq f(rz), x \in A, y \in B, z \in B_1(0)$

Af2. $f(x) - f(y) \leq -\frac{r}{R} \|f\|_{X^*}, x \in A, y \in B$, para algum $R > 1$

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} f(x) \implies$$

$$\exists \{z_n\} \subset S_1(0); f(z_n) \rightarrow \|f\|_{X^*}, n \rightarrow \infty$$

$$\text{tome } R > 1 \implies -\frac{z_n}{R} \in B_1(0), \forall n$$

$$f(x) - f(y) \leq f\left(-\frac{r}{R} z_n\right) = -\frac{r}{R} f(z_n), \quad x \in A, y \in B$$

- tome $\varepsilon = \frac{r \|f\|_{X^*}}{2R}$
- $f(x) + \varepsilon \leq f(y) - \varepsilon, x \in A, y \in B \implies \sup_{x \in A} f(x) + \varepsilon \leq \inf_{y \in B} f(y) - \varepsilon$
- tome $\alpha \in \mathbb{R} : \sup_{x \in A} f(x) + \varepsilon \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} f(y) - \varepsilon$

□

Exercícios

Exercício B3.7. Mostre que se C também é equilibrado (i.e. $\lambda x \in C \forall x \in C, \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| = 1$) então p é uma seminorma.

Se além disso C é limitado então p é uma norma. ★

Exercício B3.8. Faça o exercício 1.14 (p. 23-24) do [Bre11] (soma de subespaços fechados e separação).^a ★

^apara convexas quaisquer disjuntos pode não existir hiperplano fechado que os separem, enquanto que em dimensão finita sim.

B4 Consequências do Teorema de Baire

Aula 7

B4.1 Princípio da Limitação Uniforme

Teorema B4.1 [da Limitação Uniforme - Banach-Steinhaus].

Sejam X espaço de Banach^a, Y e.v.n e $A \subseteq L(X, Y)$. Se $\sup_{T \in A} \|Tx\| < \infty$ para todo $x \in X$, então $\sup_{T \in A} \|T\| < \infty$. $\triangleleft$

^aÉ suficiente assumir que X, Y sejam e.v.n e que $\sup_{T \in A} \|Tx\| < \infty$ valha para x em subconjunto de segunda categoria

Demonstração.

Teorema de Baire. Todo espaço métrico completo é de 2a. categoria nele mesmo.
 X é de 2a. categoria nele mesmo se e só se $(X = \cup_{\mathbb{N}} F_i, F_i \text{ fechados} \implies \exists i; F'_i \neq \emptyset)$

Queremos: $\sup_{T \in A} \|T\| < \infty \Leftrightarrow \|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| < \infty, \forall T \in A \Leftrightarrow \|Tx\| \leq c, \|x\| \leq 1, \forall T \in A$

- $X = \{x \in X : \sup_{T \in A} \|Tx\| < \infty\}$ é de 2a. categoria nele mesmo (Banach)

Af.1. $F_n := \{x \in X : \|Tx\| \leq n, \forall T \in A\}, n \in \mathbb{N}$, é fechado

Af.2. $X = \cup_{\mathbb{N}} F_n$

- $\exists n_0; F'_{n_0} \neq \emptyset$, i.e., existe x_0 ponto interior de F_{n_0}
- $\exists r > 0; \bar{B}_r(x_0) \subset F_{n_0}$

Sejam $x \in X : \|x\| \leq 1$ e $T \in A$

- $T(x) = \frac{1}{r}T(x_0 + rx - x_0)$ com $x_0 + rx \in \bar{B}_r(x_0) \subset F_{n_0}$ e $x_0 \in F_{n_0}$

Af.3. $\|T(x)\| \leq \frac{2n_0}{r}$

□

Corolário B4.2. *Sejam X, Y como no Teorema e $\{T_n\} \subset L(X, Y)$ tal que $\{T_n x\}$ converge para cada $x \in X$. Se $T : X \rightarrow Y$ é definida por*

$$Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x,$$

então $T \in L(X, Y)$ e $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$.

◁

Observação.

- T_n convergir pontualmente a T não implica $\|T_n\| \rightarrow \|T\|$.

$$T_n : \underbrace{\ell_p}_{\text{Banach}} \rightarrow \mathbb{R} : x = (x_1, x_2, \dots) \mapsto T_n x = x_n$$

T_n é linear e limitada

$$T_n x \rightarrow 0 = Tx, \forall x \in \ell_p; \quad \|T_n\| = 1, \forall n \quad \text{e} \quad \|T\| = 0$$

- O Princípio da limitação uniforme pode não valer se X não for Banach.

$$T_n : \underbrace{(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)}_{\text{não Banach}} \rightarrow (\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty) : x \mapsto T_n x = (0, \dots, 0, nx_n, 0, \dots)$$

T_n é linear e limitada

$$\sup_n \|T_n x\|_\infty < \infty, \forall x \in X \quad \text{e} \quad \sup_n \|T_n\| = \infty.$$



Corolário B4.3. Se X é um e.v.n. sobre $\mathbb{K}$ e $B \subset X$, suponha que $\phi(B) = \{\phi(x), x \in B\}$ seja limitado $\forall \phi \in X^*$. Então B é limitado. $\triangleleft$

Demonstração.

Temos: $\phi(B)$ é limitado para cada $\phi \in X^* \iff |\phi(x)| \leq k_\phi, \forall x \in B$

Queremos: B é limitado $\iff \|b\|_X \leq c, \forall b \in B$

$$\|b\|_X = \max_{\substack{\phi \in X^* \\ \|\phi\|_{X^*}=1}} |\phi(b)|$$

Teorema da Limitação Uniforme Sejam $\tilde{X}$ = ?? espaço de Banach, Y = ?? e.v.n e $A = ?? \subseteq L(\tilde{X}, Y)$; $\sup_{T \in A} \|Tx\| < \infty$ para todo $x \in \tilde{X}$, então $\sup_{T \in A} \|T\| < \infty$.

- $\tilde{X} = X^*$ é Banach
- $Y = \mathbb{K}$
- $A = \{T_b : X^* \rightarrow \mathbb{K} : \phi \mapsto T_b(\phi) = \phi(b)\}_{b \in B}$ é subconj. de $L(X^*, \mathbb{K})$:
pois: Af.1. para cada $b \in B$, T_b é limitada

Af.2 $\sup_{b \in B} \|T_b\phi\| < \infty$ para todo $\phi \in X^*$ ($\phi(B)$ é limitado)

- $\sup_{b \in B} \|T_b\| < \infty$ (T. Limit. Unif.)

Af.3 B é limitado

□

Corolário B4.4. Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{B} \subset X^*$, suponha que $\{\phi(x), \phi \in \mathcal{B}\}$ seja limitado $\forall x \in X$. Então $\mathcal{B}$ é limitado. $\triangleleft$

Demonstração. Exercício. □

Exercícios

Exercício B4.5. Faça o exercício 2.4 (p. 49) do [Bre11] (Forma bilinear). ★

B4.2 Teorema da Aplicação Aberta

- X, Y e.m.: uma função $T : X \rightarrow Y$ é contínua $\iff T^{-1}(O)$ é aberto em X para todo aberto O de Y
- se ainda T possui inversa $T^{-1} : Y \rightarrow X$ contínua, então $(T^{-1})^{-1}(O) = T(O)$ é aberto em Y para todo aberto O de X
- T linear bijetora $\implies \exists T^{-1}$ linear mas não necessariamente contínua, ou ainda, nem sempre imagem de aberto em X é aberto em Y

Definição B4.6. Uma **aplicação aberta** é uma aplicação $T : X \rightarrow Y$ tal que se $A \subseteq X$ é aberto então $T(A) \subseteq Y$ é aberto. ★

Teorema B4.7 [da aplicação aberta]. *Sejam X e Y espaços de Banach. Se $T \in L(X, Y)$ é sobrejetora, então T é aberta.* ◁

Demonstração. Segue da Proposição [3]: ◻

Lema [1]. *Sejam X e.v.n. e Y espaço de Banach. Se $T \in \mathcal{L}_?(X, Y)$ é sobrejetora, então existe $r > 0$ tal que*

$$B_{2r}^Y(0) \subset \overline{T(B_1^X(0))}. \quad (\text{B4.1})$$

◁

Lema [2]. *Sejam X espaço de Banach e Y e.v.n.. Se $T \in L(X, Y)$ e existe $r > 0$ tal que (B4.1) vale, então*

$$B_r^Y(0) \subset T(B_1^X(0)). \quad (\text{B4.2})$$

◁

Proposição [3]. *Sejam X e Y espaços de Banach. Se $T \in L(X, Y)$ é sobrejetora, então existe $r > 0$ tal que $B_r^Y(0) \subset T(B_1^X(0))$ ((B4.2) vale).* ◁

Demonstração. Segue diretamente dos Lemas [1] e [2]. ◻

B4.2.1 Demonstração do TAA

Demonstração do Teorema da Aplicação Aberta: X, Y Banach, $T \in L(X, Y)$ sobrejetora $\implies T$ é aberta

- Pela Prop. 3, existe $r > 0$ tal que $B_r^Y(0) \subset T(B_1^X(0))$
- $O \subset X$ aberto e $y \in T(O)$

Queremos: y ponto interior de $T(O)$: $B_\gamma(y) \subset T(O)$

- $y = Tx$ para algum $x = x_y \in O$
- O aberto: $\exists r_y > 0$; $B_{r_y}^X(x) \subset O$
- $x + B_{r_y}^X(0) = B_{r_y}^X(x) \subset O$
- T linear: $T(x) + T(B_{r_y}^X(0)) = T(x + B_{r_y}^X(0)) \subset T(O)$
- $T(O) \supset T(x) + T(B_{r_y}^X(0)) = y + T(B_{r_y}^X(0)) \stackrel{T \text{ lin.}}{=} y + r_y T(B_1^X(0))$
 $\supset y + r_y B_r^Y(0) = y + r_y r B_1^Y(0) = B_{r_y r}^Y(y)$

De fato a prova acima nos fornece: $T \in \mathcal{L}_?(X, Y)$ e existe $r > 0$ tal que $B_r^Y(0) \subset T(B_1^X(0)) \implies T$ aberta

□

Exercícios

Exercício B4.8. Mostre que $T \in \mathcal{L}_?(X, Y)$ é aberta se e só se existe $r > 0$ tal que $B_r^Y(0) \subseteq T(B_1^X(0))$ ★

B4.2.2 Demonstrações Lemas técnicos

Aula 8

Demonstração do Lema [1].

X e.v.n., Y Banach, $T \in \mathcal{L}_?(X, Y)$ sobrejetora $\implies \exists r > 0; \overline{B_{2r}^Y(0)} \subset \overline{T(B_1^X(0))}$.

Teorema de Baire. Todo espaço métrico completo é de 2a. categoria nele mesmo.
 X é de 2a. categoria nele mesmo se e só se $(X = \cup_{\mathbb{N}} F_i, F_i \text{ fechados} \implies \exists i; F'_i \neq \emptyset)$

- $(x \in X \implies x \in B_n(0), n \geq \|x\|) \implies X = \cup_{\mathbb{N}} B_n^X(0)$
- $Y \stackrel{T \text{ sobrej.}}{=} T(X) = T(\cup_{\mathbb{N}} B_n^X(0)) = \cup_{\mathbb{N}} T(B_n^X(0)) = \cup_{\mathbb{N}} \overline{T(B_n^X(0))}$
- Y é de 2a. categoria nele mesmo (Y Banach)
- $\exists m \geq 1; \overline{T(B_m^X(0))}' \neq \emptyset \implies \exists z \in \overline{T(B_m^X(0))}'$ e
 $\exists R > 0; \overline{B_R^Y(z)} \subset \overline{T(B_m^X(0))}$
- $B_R^Y(0) = -z + B_R^Y(z) \subset -z + \overline{T(B_m^X(0))}$

Af.1. $-z \in \overline{T(B_m^X(0))}$

- $B_R^Y(0) \subset \overline{T(B_m^X(0))} + \overline{T(B_m^X(0))}$

Af.2. $\overline{T(B_m^X(0))}$ é convexo

(T linear)

Af.3. $\overline{T(B_m^X(0))} + \overline{T(B_m^X(0))} = 2 \overline{T(B_m^X(0))}$

- $B_R^Y(0) \subset 2 \overline{T(B_m^X(0))} \stackrel{T \text{ linear}}{=} 2m \overline{T(B_1^X(0))}$
- $\overline{B_{R/2m}^Y(0)} \subset \overline{T(B_1^X(0))} \quad (2r = R/2m)$

□

Demonstração do Lema [2].

X espaço de Banach, Y e.v.n., $T \in L(X, Y), \exists r > 0; \boxed{B_{2r}^Y(0) \subset \overline{T(B_1^X(0))}} \implies \boxed{B_r^Y(0) \subset T(B_1^X(0))}.$

- $y \in B_r^Y(0)$

Queremos: $x \in B_1^X(0); Tx = y$

- $\boxed{B_{2r}^Y(0) \subset \overline{T(B_1^X(0))}} \xrightarrow{T \text{ linear}} B_{r/2^n}^Y(0) \subset \overline{T(B_{1/2^{n+1}}^X(0))}, \forall n \geq 0$

- $y \in \overline{T(B_{1/2}^X(0))}$, i.e., ($n = 0$)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in B_{1/2}^X(0); \|y - Tx\| < \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{r}{2}: \exists x_1 \in B_{1/2}^X(0); \|y - Tx_1\| < \frac{r}{2} \implies$$

$$y - Tx_1 \in B_{r/2}^Y(0) \stackrel{(n=1)}{\subset} \overline{T(B_{1/2^2}^X(0))}$$

$$\varepsilon = \frac{r}{2^2}: \exists x_2 \in B_{1/2^2}^X(0); \|y - Tx_1 - Tx_2\| < \frac{r}{2^2}$$

$\vdots$

- $\exists \{x_n\}_{n \geq 1} \subset X; \|x_n\| < \frac{1}{2^n}$ e $\|y - T(x_1 + \dots + x_n)\| < \frac{r}{2^n}$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \xrightarrow[X \text{ Banach}]{T.A3.12} \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente em X

- $z_n := \sum_{j=1}^n x_j, x := \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é tal que $\boxed{x \in B_1^X(0)}$ e

$$\|y - Tz_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies y = \lim_{n \rightarrow \infty} Tz_n \xrightarrow[z_n \rightarrow x]{T \text{ contínua}} \boxed{y = Tx}$$

□

Corolário B4.9 [Teorema da Aplicação Inversa].

Sejam X e Y são espaços de Banach. Se $T \in L(X, Y)$ é bijetora, então $T^{-1} \in L(Y, X)$; isto é, T é um isomorfismo .

◁

Demonstração. Ver p. B19.

□

Exercícios

Exercício B4.10. Sejam X e.v. munido de duas normas $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$. Se $(X, \|\cdot\|_1)$ e $(X, \|\cdot\|_2)$ são Banach e existe C : $\|x\|_2 \leq C \|x\|_1$ em X , então as normas são equivalentes. ^a ★

Exercício B4.11. Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in L(X, Y)$ sobrejetora. Mostre que existe $C > 0$ tal que para cada $y \in Y$ pode-se encontrar $x \in X$ tal que

$$\|x\| \leq C\|y\| \quad \text{e} \quad y = Tx. \quad \star$$

^aconsidere $T : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2) : x \mapsto x$ e use T.A.I B4.9

B4.3 Teorema do Gráfico Fechado

Definição B4.12. Uma **aplicação fechada** é uma aplicação $T : X \rightarrow Y$ tal que o seu gráfico $G_T = \{(x, y) \in X \times Y : y = Tx\}$ é um conjunto fechado em $X \times Y$.

A condição pode ser escrita como

$$\text{se } (x_n, T(x_n)) \rightarrow (x, y) \in X \times Y \text{ então } y = T(x) \quad (\text{B4.3})$$

★

Observação B4.13. Sejam X e Y são espaços métricos e $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação. Se T é contínua, então T é fechada.

Exemplo. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ é fechada e não contínua ★

Para “a recíproca”: ★

Teorema B4.14 [do gráfico fechado]. Se X e Y são espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}_?(X, Y)$ é fechada então T é contínua. $\triangleleft$

Demonstração.

Queremos: T contínua, i.e., T limitada, i.e., $\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X$ ($c > 0$)

$(X, \|\cdot\|_1)$ e $(X, \|\cdot\|_2)$ Banach, $\exists C: \|x\|_1 \leq C\|x\|_2$ em $X \implies$ normas são equivalentes.

Considere em X as normas:

- $\|x\|_1 := \|x\|_X$ e $\|x\|_2 := \|x\|_X + \|Tx\|_Y$
- $(X, \|\cdot\|_1)$ é Banach
- $\|x\|_1 \leq \|x\|_2$

Af.1. $(X, \|\cdot\|_2)$ é Banach

$(G(T)$ fechado, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach)

- $\exists c > 0: \|x\|_2 \leq c\|x\|_1, \forall x \in X$
- $\|Tx\|_Y \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X$

□

Exercícios

Exercício B4.15. Mostre que se T é linear então (B4.3) é equivalente a: se $(x_n, T(x_n)) \rightarrow (0, y) \in X \times Y$ então $y = 0$ ★

Exercícios

Exercício B4.16 (EB3). Denote por X o espaço $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ munido da norma $\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|dt$, e por Y o mesmo espaço com a norma uniforme. Mostre que a aplicação identidade $x \in X \mapsto x \in Y$ tem gráfico fechado, mas não é contínua. ★

Exercício B4.17 (EB4). Sejam X e Y espaços de Banach. Seja $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação tal que $\varphi \circ T \in X^*$ para todo $\varphi \in Y^*$. Prove que $T \in L(X, Y)$. ★

B5 Mais alguns resultados

B5.1 Espaço quociente

Seja X um e.v. e M um subespaço. [Muj, p.26]

- $x \sim y : x - y \in M$ é uma relação de equivalência em X ;
- o **espaço quociente** X/M das classes de equivalência é um e.v. definindo

$$[x] + [y] = [x + y], \quad \lambda[x] = [\lambda x]$$

- $\pi : X \rightarrow X/M : x \mapsto [x]$ é dita **mapa quociente**, é linear e sobrejetora

Se X é normado definimos $\|[x]\|_q := \inf_{x \in [x]} \|x\|_X$

Proposição B5.1. [TL80, p. 71] se X é e.v.n. e M é subespaço fechado então

- $[x] = x + M$ e $\|[x]\|_q = d(x, M)$
- $\|\cdot\|_q$ é uma norma em X/M
- Se X é completo, então X/M é completo também.
- π é **contínua** e (pelo TAA-B4.7) **aberta**. (em particular $\pi(B_X) = B_{X/M}$).

◁

B6 Soma de subespaços

Proposição B6.1. Seja X um espaço de Banach e M e N subespaços fechados de X tais que $M + N$ é fechado. Então existe $C > 0$ tal que: para todo $z \in M + N$, existem $x \in M$, $y \in N$ tais que

$$z = x + y, \quad e \quad \|x\|, \|y\| \leq C \|z\|.$$

Se $M \cap N = \{0\}$ então x, y são únicos e $z \mapsto (x, y)$ é linear e contínua. ▷

Definição B6.2. Seja X um espaço de Banach e M um subespaço fechado. Um subespaço N é dito **complemento topológico de M** se N é fechado, $M \cap N = \{0\}$ e $M + N = X$. ★

- Subespaços de dimensão finita (ou fechados e de codimensão finita) sempre possuem complemento topológico. [Bre11, prova:p.38]

B7 Outros exercícios

Exercícios

Exercício (EB5). Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear. Prove a equivalência dos três resultados [B4.14](#), [B4.7](#) e [B4.9](#). (Sugestão: passe pelo quociente X/N onde $N = \{x \in X : Tx = 0\}$.)



Notação. Uma notação frequentemente usada para funcionais é $\langle \phi, x \rangle := \phi(x)$ onde $\phi \in X^*$ e $x \in X$. Para maior clareza às vezes usa $\langle \phi, x \rangle_{X^*, X}$



Exercícios

Exercício. Seja X um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $T : X \rightarrow X^*$ um operador linear tal que $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in X$. Mostre que T é contínuo.

Dica: mostre que o gráfico é fechado. Suponha $x_n \rightarrow 0$ e $Tx_n \rightarrow \phi$. Mostre que $\phi(y) = 0$ para todo $y \in X$ avaliando $\langle T(x_n - \lambda y), (x_n - \lambda y) \rangle$ com $\lambda > 0$

Mostre agora o caso em que $\langle Tx, y \rangle = \langle Ty, x \rangle$ para todo $x, y \in X$



Referências

- [Bre11] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011, pp. xiv+599. ISBN: 978-0-387-70913-0.
- [Fol99] G. B. Folland. *Real analysis*. Second. Pure and Applied Mathematics (New York). Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, pp. xvi+386. ISBN: 0-471-31716-0.
- [Muj] J. Mujica. “Notas de análise funcional”. Em: *Notas de aula - IMECC - UNICAMP* ().
- [TL80] A. E. Taylor e D. C. Lay. *Introduction to functional analysis*. Second. John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane, 1980, pp. xi+467. ISBN: 0-471-84646-5.

Lista dos teoremas

B2.1	Teorema (Hahn-Banach real)	B3
B2.2	Teorema (Hahn-Banach complexo)	B3
B2.3	Corolário (Extensão de funcional mantendo a norma)	B7
B2.4	Teorema (Existem muitos funcionais)	B7
B3.4	Teorema (Hahn-Banach - Formas Geométricas)	B10
B3.5	Lema (Propriedades do funcional de Minkowski)	B11
B3.6	Lema	B13
B4.1	Teorema (da Limitação Uniforme - Banach-Steinhaus)	B16
B4.2	Corolário	B17
B4.3	Corolário	B18
B4.4	Corolário	B18
B4.7	Teorema (da aplicação aberta)	B19
	Lema (1)	B19
	Lema (2)	B19
B4.9	Corolário (Teorema da Aplicação Inversa)	B22
B4.14	Teorema (do gráfico fechado)	B24

Lista dos exercícios

B2.5	Exercício	B8
B2.6	Exercício	B8
B2.7	Exercício (EB1)	B8
B3.2	Exercício	B9

B3.7	Exercício	B15
B3.8	Exercício	B15
B4.5	Exercício	B18
B4.8	Exercício	B20
B4.10	Exercício	B23
B4.11	Exercício	B23
B4.15	Exercício	B24
B4.16	Exercício (EB3)	B24
B4.17	Exercício (EB4)	B24
	Exercício (EB5)	B26
	Exercício	B26