

Conteúdo

B1	Séries numéricas	B2
B1.1	Propriedades: elementares, Critério de Cauchy para séries e uma condição necessária para convergência	B4
B2	Séries a termos positivos	B6
B2.1	Critérios da razão e da raiz	B7
B2.2	Critério do confronto integral	B9
B3	Séries a termos gerais	B11
B3.1	Convergência absoluta	B11
B3.2	Critérios de Leibnitz e Dirichlet	B12
B3.3	Comutação dos termos de uma série	B15
B4	Algo sobre complexos	B16

B1 Séries numéricas

Dada uma sequência $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$, a **série** associada à $\{a_n\}$ é a soma dos termos da sequência: *soma infinita*, a saber,

- $S_k = \sum_{n=n_0}^k a_n$ é dita **soma parcial** (ou **reduzida**) da série
- $\{S_k\}_{n=n_0}^{\infty}$ é dita **seqüências das somas parciais** da série
- a_n é dito **termo geral** (ou **n -ésimo termo**) da série
- $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n := \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$ é dita **Série** associada à $\{a_n\}$

Classificamos o **caráter** da série em:

- **convergente**: se $\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k = S$ existe e é finito. Neste caso, S é a **soma** da série
- **divergente**: se $\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k$ é infinito ($= +\infty$ ou $-\infty$)
- **oscilante**: se $\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k$ não existe nem é infinito
- **não convergente**: se $\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k$ não existe ou é infinito (oscilante ou divergente)

Exemplo B1.1.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} 1$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (telescópica)

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} n$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (série harmônica)

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 



Atenção: Wolfram ou Symbolab podem dizer que uma série *oscilante* é “divergente”.

Exemplo B1.2 (Série geométrica).

1.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} q^n} = \begin{cases} 1 & \text{se } q = 0, \\ \frac{1}{1-q} & \text{se } q \in (-1, 1), \\ +\infty & \text{se } q = 1 \text{ ou } q > 1, \\ \text{oscila} & \text{se } q = -1 \text{ ou } q < -1, \end{cases}$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$$

3. Represente em forma de fração o número $0,2345656\dots = 0,234\overline{56}$.

¹Por comodidade, usaremos sempre a definição $0^0 := 1$.

B1.1 Propriedades: elementares, Critério de Cauchy para séries e uma condição necessária para convergência

Usando propriedades de limites, quando não for uma indeterminação, vale:

- $\sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \right)$
- $\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n + b_n) = \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \right) + \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \right)$

$\sum a_n$	$\sum b_n$	λ	$\sum \lambda a_n$	$\sum (a_n + b_n)$
CONV S	CONV T	$\forall \lambda \in \mathbb{R}$	CONV λS	CONV $S + T$
CONV S	DIV $\pm \infty$			DIV $\pm \infty$
DIV $\pm \infty$	CONV T	$\lambda > 0$	DIV $\pm \infty$	DIV $\pm \infty$
DIV $\pm \infty$	CONV T	$\lambda < 0$	DIV $\mp \infty$	DIV $\pm \infty$
DIV $\pm \infty$	DIV $\pm \infty$	$\lambda = 0$	?	DIV $\pm \infty$
DIV $\pm \infty$	DIV $\mp \infty$			?
OSCILA		$\lambda \neq 0$	OSCILA	?

Atenção: os sinais $\pm$ e/ou $\mp$ estão escritos de forma respectiva! não é qualquer combinação!

- CUIDADO^(ver p. 121, Elon, 7ª Edição): não vale $\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n b_n) = \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \right)$

Exemplo B1.3. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - 1 \right)$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ ★

O caráter da série não muda:

(a soma da série muda!)

- multiplicando por $\lambda \neq 0$

- modificando um número FINITO de termos²

Teorema B1.4 [Condição necessária para convergência].

(i) $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge se e só se

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ existe } H > 0: p > q > H \implies \left| \sum_{n=q+1}^p a_n \right| < \varepsilon$$

(ii) em particular, se $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge então $a_n \rightarrow 0$

(se $a_n \not\rightarrow 0$ então $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ não converge: diverge ou oscila)

◁

Exemplo B1.5.

- $a_n \rightarrow 0$:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ 🧐

- $a_n \not\rightarrow 0$:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} 1$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} n$

-

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan\left(\frac{1}{n}\right)$

★

Observação B1.6. Se $a_n \geq 0$ (definitivamente), então $\{S_k\} = \{\sum_{n=n_0}^k a_n\}$ é crescente. Logo, $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge ou diverge a $+\infty$ (não pode oscilar).

★

²A princípio os primeiros termos, para caso mais geral ver comutatividade dos termos da série na Seção B3.3

B2 Séries a termos positivos

Nesta seção consideraremos sempre **séries a termos positivos**, ou seja, $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ com $a_n \in \mathbb{R}$ e $a_n \geq 0$.

Teorema B2.1 [Confronto]. Se $0 \leq a_n \leq b_n$ para $n \geq n_0$, vale:

- se $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge então $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge e

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$$

- se $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge então $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ diverge. ◁

Exemplo B2.2.

- Série α -harmônica: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, 

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 2$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha < 1$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, 
 $\alpha \in (1, 2)$

•

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

•

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10 + 3 \cos n}{15} \right)^n$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10 + 3 \cos n}{5} \right)^n$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10 + 3 \cos n}{12} \right)^n$

★

Corolário B2.3 [Confronto assintótico]. *Sejam $a_n, b_n \geq 0$.*

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ então $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ têm o mesmo caráter.

Além disso:

- se $L = 0$ então $a_n \leq b_n$ definitivamente, podendo usar o Teorema B2.1;
- se $L = \infty$ então $a_n \geq b_n$ definitivamente, podendo usar o Teorema B2.1. $\triangleleft$

Exemplo. Retomando:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$$



B2.1 Critérios da razão e da raiz

Critérios da razão e raiz para sequências

- (i) Se $a_n \neq 0$ e $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1$ (def.) ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q < 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- (ii) Se $a_n \neq 0$ e $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq Q > 1$ (def.) ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = Q > 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$
- (iii) Se $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ (def.) ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- (iv) Se $\sqrt[n]{|a_n|} \geq Q > 1$ (def.) ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = Q > 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$.
- (v) $Q = q = 1$ teste inconclusivo.

Teorema B2.4 [Critério da razão].

- Se $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ (definitivamente) então $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge.
- Se $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq Q > 1$ (definitivamente) então $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge. $\triangleleft$

Teorema B2.5 [Critério da raiz].

- Se $a_n \geq 0$ e $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ (definitivamente) então $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge
- Se $a_n \geq 0$ e $\sqrt[n]{a_n} \geq Q > 1$ (definitivamente) então $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge $\triangleleft$

CUIDADO: nos casos $Q = q = 1$ não temos conclusão

Corolário B2.6.

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$ então $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = Q > 1$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = Q > 1$ então $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge $\triangleleft$

Exercício B2.7. Discuta a convergência das séries

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!},$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n^p},$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^p r^n,$

onde $r > 0$ e $p > 0$.

**Exercício B2.8.** Discuta a convergência das séries

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 e^n}{(2n)!}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10 + 3 \cos(n)}{n}\right)^n$

(e) Calcular quantos termos de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ deve-se somar para obter resultado com erro $< 10^{-3}$.



B2.2 Critério do confronto integral

Observação B2.9 (confronto integral). Dada uma sequência $\{a_n\}$, $a_n \geq 0$, seja

$$f : [n_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto a_{[[x]]}. \quad ^3$$

Então $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$

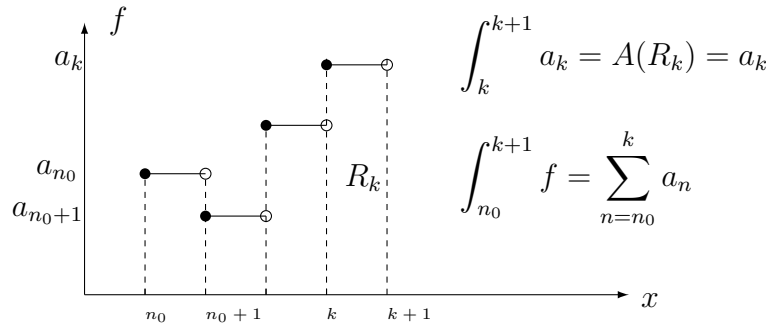


Figura 1: Interpretação geométrica da série como área sob uma função em degraus

Isso permite discutir o caráter de $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ usando os critérios para integrais impróprias.

Teste convergência para integral imprópria

- (i) $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \geq n_0$ e $\int_{n_0}^{\infty} g$ converge $\implies \int_{n_0}^{\infty} f$ converge e $\int_{n_0}^{\infty} f \leq \int_{n_0}^{\infty} g$
- (ii) $f(x) \geq g(x) \geq 0$, $\forall x \geq n_0$ e $\int_{n_0}^{\infty} g$ diverge $\implies \int_{n_0}^{\infty} f$ diverge

Logo, se existe $g : [n_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g \geq 0$ tal que

- (i) $a_{[[x]]} \leq g(x)$ e $\int_{n_0}^{\infty} g$ converge $\implies \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \int_{n_0}^{\infty} g$
- (ii) $a_{[[x]]} \geq g(x)$ e $\int_{n_0}^{\infty} g$ diverge $\implies \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge ★

³Denotamos por $[[x]]$ a parte inteira de x .

Corolário B2.10. Seja $g : [n_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g \geq 0$, g é *contínua*⁴ e decrescente.

Se $a_n := g(n)$, então $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ tem o mesmo caráter de $\int_{n_0}^{\infty} g(x) dx$

Ainda, se $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ é convergente, então

$$\int_{n_0}^{\infty} g(x) dx \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq a_{n_0} + \int_{n_0}^{\infty} g(x) dx, \quad n_0 \geq 1$$

◁

Exemplo B2.11.

1. Sabendo⁵ que $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge quando $\alpha \in (1, 2)$, deduzimos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge para $\alpha \in (1, 2)$. 🧐

Portanto, a série α -harmônica converge a $s \in [\frac{1}{\alpha-1}, \frac{\alpha}{\alpha-1}]$ para $\alpha > 1$ e diverge a $+\infty$ para $0 < \alpha \leq 1$.

2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}, \beta > 0$

3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

★

Exercício B2.12. O que podemos dizer sobre a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$$

com $\alpha, \beta > 0$?

★

⁴Ver Elon, 7ª Edição, p. 267-273, T. 20: função limitada em $[a, b]$ é integrável se e somente se o conjunto dos seus pontos de descontinuidade tem medida nula.

⁵Ver [Material de Cálculo 1](#), p.120

B3 Séries a termos gerais

Nesta seção consideraremos séries mais gerais, tendo os elementos $a_n \in \mathbb{R}$.⁶

Definição B3.1. Dado um real x definimos

$$x^+ = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad x^- = \begin{cases} 0 & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Assim $x^+, x^- \geq 0$ e vale

$$x = x^+ - x^-, \quad |x| = x^+ + x^-. \quad \star$$

B3.1 Convergência absoluta

Teorema B3.2 [Convergência absoluta].

Se $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ converge então $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ também converge. Além disso vale

$$\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| \quad \triangleleft$$

Dizemos que a série $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ é

- **absolutamente convergente** quando (ela converge e) $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ converge
(neste caso $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^-$ convergem)
- **condicionalmente convergente** quando ela converge mas $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ diverge
(neste caso $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^-$ divergem)

Exemplo B3.3. Analise as séries abaixo nos casos indicados.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n} \quad \text{👁️👁️}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n$$

(1) $s_n = (-1)^n$, (2) $s_n = \cos(2\pi n/30)$, (3) $s_n = \cos(n)$, (4) $\{s_n\}$ limitada. $\star$

⁶De fato, ou até em $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^k$,

B3.2 Critérios de Leibnitz e Dirichlet

Teorema B3.4 [Critério de Leibnitz]. Seja $a_n = (-1)^n b_n$ onde

$$b_n \geq 0, \quad \{b_n\} \text{ decrescente}, \quad b_n \rightarrow 0. \quad ^a$$

Então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Além disso, a sequência das somas parciais $S_k = \sum_{n=1}^k a_n$ e a soma S da série satisfazem

$$S - S_k \begin{cases} \geq 0 & \text{se } k \text{ é ímpar} \\ \leq 0 & \text{se } k \text{ é par} \end{cases}, \quad |S - S_k| \leq b_{k+1}. \quad \triangleleft$$

^ase $\{b_n\}$ é definitivamente decrescente, então conclui-se que $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge, para algum n_0

Exemplo B3.5.

1. Reveja as séries do Exemplo B3.3, em particular: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n}$ nos casos:

$$s_n = (-1)^n, \quad s_n = \cos(2\pi n/30), \quad s_n = \cos(n).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ convergente} \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ convergente}$$

2. Encontre um valor aproximado para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ cujo erro seja $< \frac{1}{2}$. Quantos termos precisamos somar para ter erro $< 10^{-3}$?
3. Discuta a convergência das séries:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}, \alpha > 0$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n}, s_{3k} = 1, s_n = -1 \text{ c.c.} \quad \star$

Teorema B3.6 [Critério de Dirichlet]. Seja $a_n = s_n b_n$ onde

$$b_n \geq 0, \quad \{b_n\} \text{ decrescente}, \quad b_n \rightarrow 0,$$

$$\text{existe } M > 0: \quad \left| \sum_{n=1}^k s_n \right| \leq M \text{ para todo } k \geq n_0.$$

Então $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge.

Além disso, a sequência das somas parciais $T_k = \sum_{n=n_0}^k a_n$ e a soma T da série satisfazem

$$|T - T_k| \leq 2M b_{k+1}.$$

◁

Exemplo B3.7.

1. Reveja as séries do exemplo B3.3, em particular: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n}$ nos casos:

$$s_n = (-1)^n, \quad s_n = \cos(2\pi n/30), \quad s_n = \cos(n).$$

• Note que como $\cos(2\pi n/30) = -\cos(2\pi(n+15)/30)$, temos que

$$\sum_{n=1}^{30} \cos(2\pi n/30) = 0 \text{ e logo } \left| \sum_{n=1}^k \cos(2\pi n/30) \right| \leq 30, \quad \forall k \geq 1$$

• Note que $\cos(n) = \operatorname{Re}(e^{in})$ e $\left| \sum_{n=0}^k e^{in} \right| = \left| \frac{1 - e^{i(k+1)}}{1 - e^i} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^i|}$

2. Analise a conversa abaixo com o GPT sobre a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n}, \quad s_{3k} = 1, \quad s_n = -1 \text{ c.c.}$$

Se quiser, também posso mostrar uma prova rápida usando o critério de Dirichlet (ou somas parciais de s_n), que é um método bem comum em cursos de análise para séries desse tipo.

🔍 📄 🗑️ ↶️ ↷️ ...

Vamos usar o critério de Dirichlet.

Considere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n}, \quad s_n = \begin{cases} 1 & \text{se } 3 \mid n, \\ -1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

1. Critério de Dirichlet

Uma série $\sum a_n b_n$ converge se:

1. as somas parciais de a_n são limitadas;
2. b_n é monótona e $b_n \rightarrow 0$.

Aqui tomamos

$$a_n = s_n, \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

Sabemos que b_n é decrescente e $b_n \rightarrow 0$.

Então precisamos estudar as somas parciais de s_n .

2. Somas parciais de s_n

Os valores de s_n seguem o padrão

$$-1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, \dots$$

As somas parciais são

$$S_1 = -1, \quad S_2 = -2, \quad S_3 = -1, \quad S_4 = -2, \quad S_5 = -3, \quad S_6 = -2, \dots$$

Observe que a cada bloco de três termos

$$(-1) + (-1) + 1 = -1.$$

Logo

$$S_{3k} = -k.$$

Portanto

$$S_{3k} \rightarrow -\infty.$$

Ou seja, as somas parciais de s_n não são limitadas.

3. Consequência

Como a hipótese principal do critério de Dirichlet falha (as somas parciais de s_n não são limitadas), a série não pode convergir por esse mecanismo.

Mais precisamente, agrupando em blocos de três:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k-1} + \frac{1}{3k} \right)$$

e

$$-\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k-1} + \frac{1}{3k} \sim -\frac{1}{3k}.$$

!!

Assim a série se comporta como

$$-\frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

que diverge.

✓ Conclusão

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n}$$

diverge (na verdade para $+\infty$).

Se quiser, também posso mostrar uma prova muito elegante usando o teste de Abel, que aparece bastante em cursos de Análise Real para séries com sinais periódicos.

🔍 📄 🗑️ ↶️ ↷️ ...

se a hipótese não vale não quer dizer que a tese não vale também!

Você está absolutamente certo! — o fato de a hipótese do critério de Dirichlet falhar não implica que a série diverge. O critério é apenas suficiente, não necessário. Portanto, o argumento anterior não é válido como prova de divergência.

Vamos fazer uma prova correta.

★

Exercício B3.8. Discuta a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n}, \quad s_{3k} = 2, \quad s_n = -1 \text{ c.c.}$$

★

B3.3 Comutação dos termos de uma série

Reordenação dos termos de uma série

$\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ duas sequências que têm os mesmos termos mas em ordem diferentes

O que podemos dizer sobre o carácter e soma das séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$?

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k b_n ??$$

Fixado k , $\{a_1, \dots, a_k\} = \{b_1, \dots, b_k\} ??$

Teorema B3.9.

Toda série a termos positivos ou absolutamente convergente mantém o carácter e a soma mesmo reordenando seus termos.

Reordenando os termos de uma série condicionalmente convergente podemos obter qualquer soma, e qualquer carácter.



Exemplo B3.10. Podemos definir a soma dos conjuntos de reais a seguir (sem que seja definida uma ordem para somar)?

- | | | |
|---|--|--|
| (a) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ | (c) $\left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ | (e) $\left\{\pm\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ |
| (b) $\left\{\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$ | (d) $\left\{\frac{(-1)^n}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$ | (f) $\left\{\pm\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$ |



B4 Algo sobre complexos

Um **número complexo** pode ser associado a uma dupla de reais, usaremos a seguinte notação:

$$z \in \mathbb{C} : \quad z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Definimos:

$$\textbf{soma} : \quad (x + iy) +_{\mathbb{C}} (X + iY) := (x + X) + i(y + Y)$$

$$\textbf{produto} : \quad (x + iy) \cdot_{\mathbb{C}} (X + iY) := (xX - yY) + i(Xy + xY)$$

Desta forma o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é um **corpo**.

Podemos **identificar os complexos $x + i0$ com os reais**.

Os complexos **$\pm i$ são raízes do real -1** .

Frequentemente é útil representar um complexo na forma polar:

$$z = x + iy = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

onde $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\theta = \textbf{arg}(z) = (2k\pi +) \begin{cases} \arctg(y/x) & \text{para } x > 0 \\ \arctg(y/x) + \pi & \text{para } x < 0 \\ \pi/2 & \text{para } x = 0, y > 0 \\ 3\pi/2 & \text{para } x = 0, y < 0 \\ q.q. & \text{para } x = 0, y = 0 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Produto na forma polar:

$$[\rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))] \cdot [\sigma(\cos(\phi) + i \sin(\phi))] = [\rho\sigma(\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi))]$$

Potência na forma polar

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

Também podemos definir $e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i \sin(y))$: esta função exponencial possui as mesmas propriedades da sua versão real!

desta forma $z = \rho e^{i\theta}$ e $z^n = \rho^n e^{in\theta}$

Lista dos teoremas

B1.1	Exemplo	B2
B1.2	Exemplo (Série geométrica)	B3
B1.3	Exemplo	B4
B1.4	Teorema (Condição necessária para convergência)	B5
B1.5	Exemplo	B5
B1.6	Observação	B5
B2.1	Teorema (Confronto)	B6
B2.2	Exemplo (Série α -harmônica)	B6
B2.3	Corolário (Confronto assintótico)	B7
	Exemplo	B7
B2.4	Teorema (Critério da razão)	B7
B2.5	Teorema (Critério da raiz)	B8
B2.6	Corolário (Razão/raiz para série com limite)	B8
B2.7	Exercício	B8
B2.8	Exercício	B8
B2.9	Observação (confronto integral)	B9
B2.10	Corolário	B10
B2.11	Exemplo	B10
B2.12	Exercício	B10
B3.1	Definição	B11
B3.2	Teorema (Convergência absoluta)	B11
B3.3	Exemplo	B11
B3.4	Teorema (Critério de Leibnitz)	B12
B3.5	Exemplo	B12
B3.6	Teorema (Critério de Dirichlet)	B13
B3.7	Exemplo	B13
B3.8	Teorema (Comutação)	B15
B3.9	Exemplo	B15