Conteúdo

F.1 Algumas definições sobre funções

- Dados dois conjuntos A, B é dito **produto cartesiano de A com B** o conjunto
$$A \times B = \{(a,b) : \ a \in A\,, \ b \in B\}\,.$$

- Dados dois conjuntos A, B, uma **função f de A em B** é uma *lei que associa a cada elemento de A um elemento de B.*
Usaremos a notação
$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & B \\ & a & \mapsto & f(a) \end{array} \qquad \text{ou} \qquad f: A \to B : a \mapsto f(a).$$

- A é dito **domínio (D_f)** da função, B é dito **contradomínio** da função.
a: variável independente $\qquad$ $b = f(a)$: variável dependente
$f(a)$: valor da função em a f em a $\qquad$ f: função

Dada uma função
$$f : A \to B$$

- **Imagem de f** é o conjunto
$$Im(f) := \{b \in B : \ \exists\, a \in A : \ f(a) = b\}$$

- **Gráfico de f** é o conjunto
$$G(f) = \{(a, b) \in A \times B : \ b = f(a)\}$$

- Dado $C \subseteq A$ é dita **restrição de f a C** a função
$$f|_C : C \to B : x \mapsto f(x)$$

No curso de Cálculo 1:

- A sempre será um subconjunto de $\mathbb{R}$

- $B = \mathbb{R}$

Consequentemente,
$$D_f, Im(f) \subseteq \mathbb{R}$$
e
$$G(f) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2.$$

Exemplo: Exercício 7 em Slides de Exercícios.

- **Composição de funções**:

  Dadas $f : D_f \to B$ e $g : D_g \to C$ funções, **se** $Im(f) \subseteq D_g$, definimos "**g composto f**" como sendo a função:

$$g \circ f : D_f \to C : x \mapsto g(f(x)) \, .$$

....

$$D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \text{ e } f(x) \in D_g\} \overset{Im(f)\subseteq D_g}{=} D_f$$

Exemplo: Exercício 8 em Slides de Exercícios.

- $f : A \to B$ é dita **invertível** se existir $g : B \to A$ tal que

$$g \circ f = id_A \qquad \text{e} \qquad f \circ g = id_B,$$

isto é,

$$\begin{cases} g(f(a)) = a, & \forall\, a \in A \\ \\ f(g(b)) = b, & \forall\, b \in B. \end{cases}$$

Quando uma função é invertível?

Dada
$$f : A \to B$$

- f é dita **sobrejetora** se $Im(f) = B$. Isto é,
$$\forall\, b \in B \;\exists\, a \in A : \;\; f(a) = b.$$
- f é dita **injetora** se
$$a_1, a_2 \in A \text{ com } a_1 \neq a_2 \text{ implica } f(a_1) \neq f(a_2)$$
equivalentemente,
$$f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2.$$
ou também
$$\text{dado } b \in B, \text{ se existir } a \in A : \;\; f(a) = b, \text{ é único.}$$
- f é dita **bijetora** se é sobrejetora e injetora. Isto é,
$$\forall\, b \in B \;\exists!\, a \in A : \;\; f(a) = b.$$

Proposição. *Se $f : A \to B$ é bijetora, então a função $f^{-1} : B \to A$ definida por*
$$f^{-1}(b) = a \Longleftrightarrow f(a) = b$$
é a função inversa de f.

- $G(f^{-1})$ é obtido pela reflexão de $G(f)$ em torno da reta $y = x$:
$$(b, a) \in G(f^{-1}) \Longleftrightarrow (a, b) \in G(f)$$

Exemplo: Exercício 9 em Slides de Exercícios.

F.2 Propriedades de funções reais

Dada $f : D \to C$ com $D, C \subseteq \mathbb{R}$.

- f é dita **limitada superiormente** se

$$\text{existe } L \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) < L \text{ para todo } x \in D.$$

- f é dita **limitada inferiormente** se

$$\text{existe } L \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) > L \text{ para todo } x \in D.$$

- f é dita **limitada** se

$$\text{existe } L \in \mathbb{R} \text{ tal que } |f(x)| < L \text{ para todo } x \in D.$$

Definimos também

- **supremo de f**: $\sup(f) = \sup(Im(f))$
- se existir

$$x_0 \in D \text{ tal que } f(x_0) = \sup(f)$$

  então chamamos:
  – x_0 de "**ponto de máximo (absoluto) de f**"
  – $f(x_0)$ de "**(valor) máximo (absoluto) de f**".

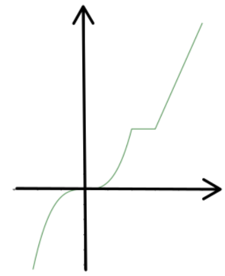
- **ínfimo de f**: $\inf(f) = \inf(Im(f))$
- se existir

$$x_0 \in D \text{ tal que } f(x_0) = \inf(f)$$

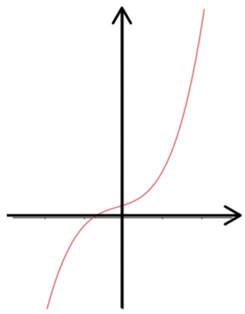
  então chamamos:
  – x_0 de "**ponto de mínimo (absoluto) de f**"
  – $f(x_0)$ de "**(valor) mínimo (absoluto) de f**".

Exemplo: Exercício 10 em Slides de Exercícios.

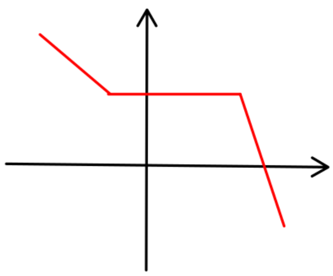
- f é dita **crescente** se: $x, y \in D$ e $x < y$ implica $f(x) \leq f(y)$.



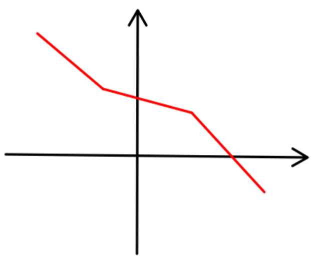
- f é dita **estritamente crescente** se: $x, y \in D$ e $x < y$ implica $f(x) < f(y)$.



- f é dita **decrescente** se: $x, y \in D$ e $x < y$ implica $f(x) \geq f(y)$.



- f é dita **estritamente decrescente** se: $x, y \in D$ e $x < y$ implica $f(x) > f(y)$.



- f é dita **monótona** se vale uma das anteriores.

Exemplo: Exercício 11 em Slides de Exercícios.

F.3 Simetrias de funções

Dada $f : D \to C$ com $D, C \subseteq \mathbb{R}$.

- Suponha que D seja *simétrico com respeito à origem*, isto é,

$$\text{se } x \in D \text{ então } -x \in D.$$

  - f é dita **par** se $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in D$.
  - f é dita **ímpar** se $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in D$.

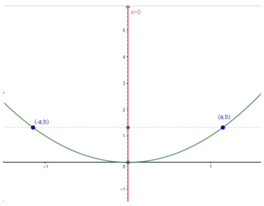
- Suponha que D tenha a propriedade que

$$\text{existe } T > 0 \text{ tal que se } x \in D \text{ então } x + T \in D.$$

  - f é dita **T-periódica** se $f(x) = f(x + T)$ para todo $x \in D$.

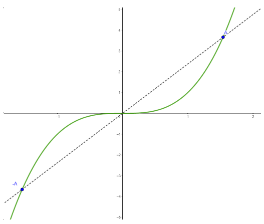
- gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo-y:

$$(a, b) \in G(f) \iff (-a, b) \in G(f)$$



- gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem:

$$(a, b) \in G(f) \iff (-a, -b) \in G(f)$$

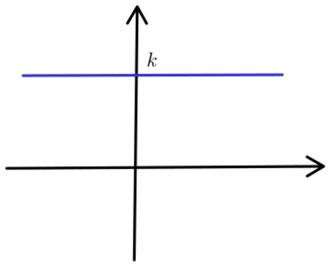


Geogebra

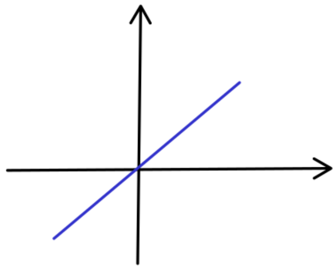
Exemplo: Exercício 12 em Slides de Exercícios.

F.4 Algumas funções típicas

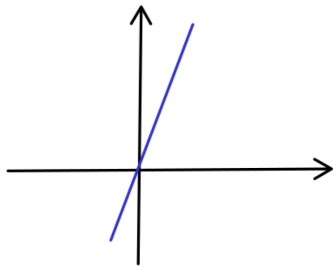
- **função constante**: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto k$ com k fixado.



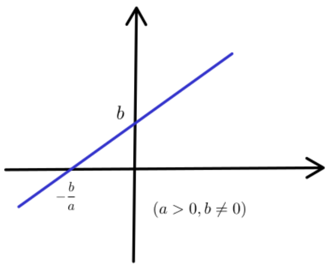
- **função identidade**: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$.

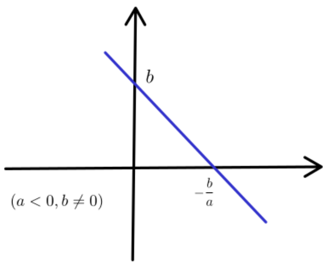


- **função linear**: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax$ com a fixado.



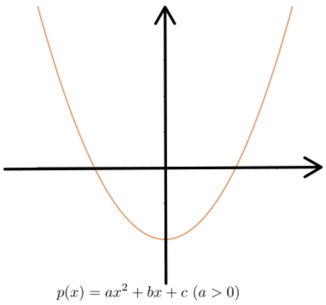
- **função afim**: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax + b$ com a, b fixados.

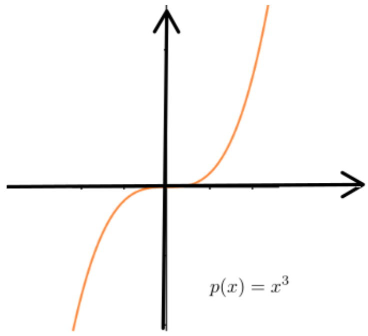




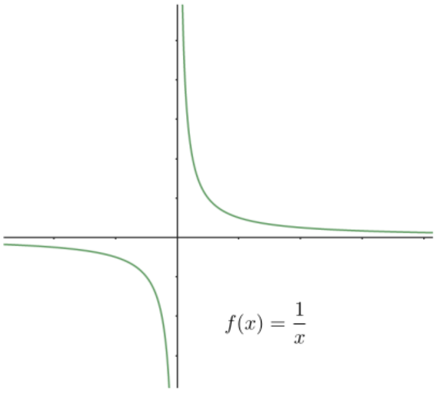
- **função polinomial**: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto p(x)$ com p polinômio:

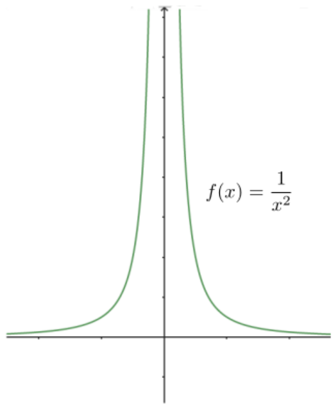
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$





- **função racional**: $f : D \to \mathbb{R} : x \mapsto p(x)/q(x)$ com p, q polinômios, $D = \{x \in \mathbb{R} : \ q(x) \neq 0\}$.



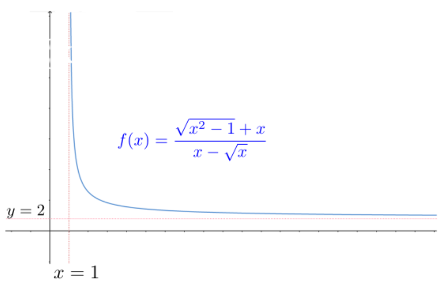


- **função algébrica**: $f : D \to \mathbb{R}$ definida compondo as 4 operações e radicais. Neste caso

  $D = \{x \in \mathbb{R}$: nunca divido por 0 nem pego raiz par de número negativo$\}$

  Exemplo:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{x - \sqrt{x}} \quad \text{com } D = (1, +\infty)\,.$$



F.4.1 Funções trigonométricas

- **função seno**: $f : \mathbb{R} \to [-1, 1] : x \mapsto \sin x$
- **função cosseno**: $f : \mathbb{R} \to [-1, 1] : x \mapsto \cos x$
- **função tangente**: $f : D_f \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$

⋮

-

$$\cos^{\mathbf{2}}(\mathbf{x}) + \sin^{\mathbf{2}}(\mathbf{x}) = \mathbf{1},$$

$$\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$$

$$\cos(x) = -\cos(x + \pi)\,, \qquad \sin(x) = -\sin(x + \pi)$$

$$\begin{aligned} \cos(x + \phi) &= \cos(x)\cos(\phi) - \sin(x)\sin(\phi) \\ \sin(x + \phi) &= \cos(x)\sin(\phi) + \sin(x)\cos(\phi) \\ \cos(x - \phi) &= \ldots.. \end{aligned}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

em particular

$$\cos(\mathbf{2x}) = \cos^{\mathbf{2}}(\mathbf{x}) - \sin^{\mathbf{2}}(\mathbf{x})\,, \qquad \sin(\mathbf{2x}) = \mathbf{2}\sin(\mathbf{x})\cos(\mathbf{x})$$

$$\cos^{\mathbf{2}}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1} + \cos(\mathbf{2x})}{\mathbf{2}}\,, \qquad \sin^{\mathbf{2}}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1} - \cos(\mathbf{2x})}{\mathbf{2}}\,,$$

$$\begin{aligned} 2\cos(x)\cos(\phi) &= \cos(x + \phi) + \cos(x - \phi) \\ 2\cos(x)\sin(\phi) &= \ldots.. \end{aligned}$$

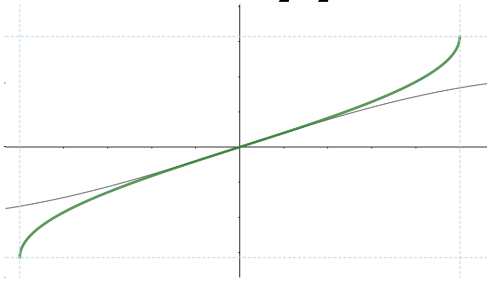
$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{aligned} \cos(x) + \cos(\phi) &= 2\cos\left(\frac{x + \phi}{2}\right)\cos\left(\frac{x - \phi}{2}\right) \\ \cos(x) + \sin(\phi) &= \ldots.. \end{aligned}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

F.4.2 Trigonométricas Inversas

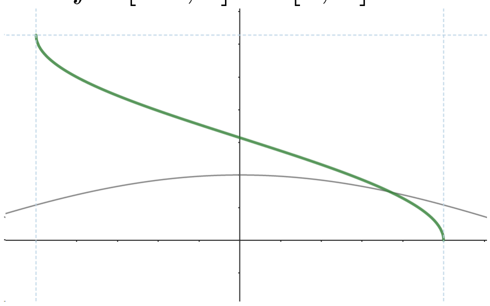
- **função arco-seno**: $f : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] : x \mapsto \arcsin x$



$$\arcsin(\sin(x)) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sin(\arcsin(x)) = x, \quad x \in [-1, 1].$$

- **função arco-cosseno**: $f : [-1, 1] \to [0, \pi] : x \mapsto \arccos x$



$$\arccos(\cos(x)) = x, \quad x \in [0, \pi]$$

$$\cos(\arccos(x)) = x, \quad x \in [-1, 1].$$

Exemplo: Exercício 13 em Slides de Exercícios.

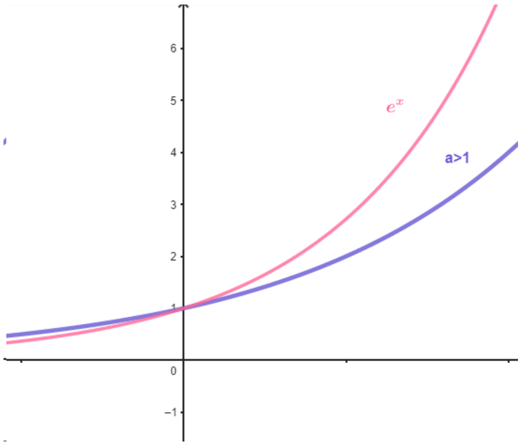
F.4.3 Função exponencial

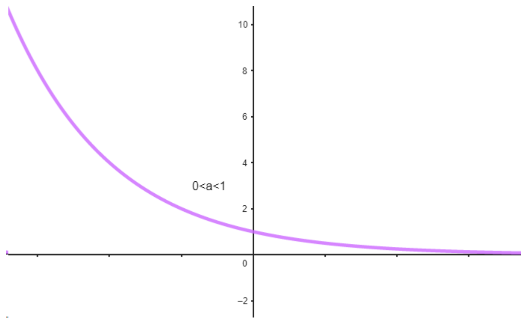
Seja $a > 0$ e $a \neq 1$. A **função exponencial de base a** é definida por

$$f : \mathbb{R} \to (0, \infty) : \ f(x) = a^x.$$

Propriedades:

- $a^{x+y} = a^x a^y$
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $(ab)^x = a^x b^x$



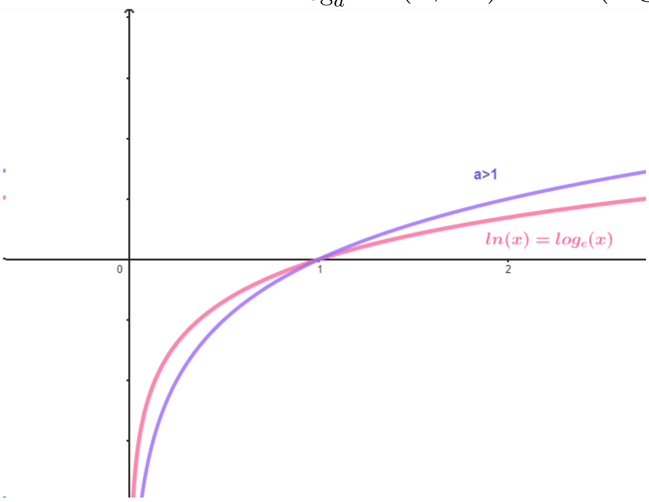


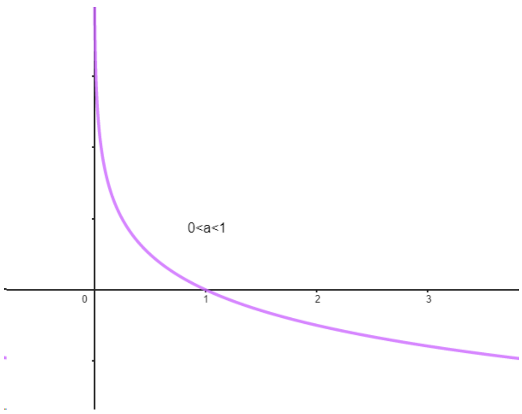
F.4.4 Função logarítmica

Seja $a > 0$ e $a \neq 1$. A **função logarítmica de base a** é a função inversa da função exponencial de base a:

$$\log_a(x) = y \iff a^y = x.$$

- $D_{\log_a} = (0, \infty)$ e $Im(\log_a) = \mathbb{R}$, $\quad$ $\ln = \log_e$





F.4.5 Função potência

Seja $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. A **função potência** é definida por

$$f : D_f \to (0, \infty) : \; f(x) = x^a.$$

- $a \in \mathbb{N}$: polinômio, $D_f = \mathbb{R}$
- $a = \frac{1}{p} \in \mathbb{Q}$: função raiz, $D_f = \mathbb{R}$ se p ímpar e $D_f = [0, \infty)$ se p par
- $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $D_f = (0, \infty)$

F.4.6 Funções hiperbólicas

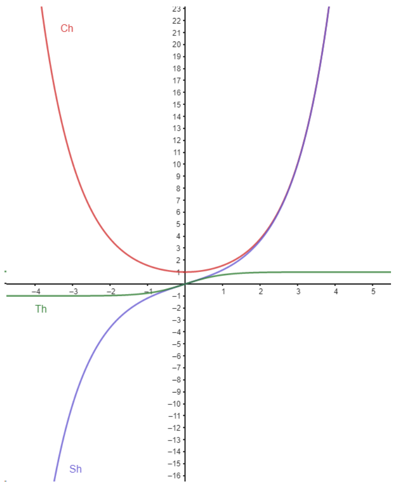
As funções **seno hiperbólico**, **cosseno hiperbólico** e **tangente hiperbólica** são definidas, resp., por:

$$\mathbf{Sh(x)} = \frac{\mathbf{e^x - e^{-x}}}{\mathbf{2}}, \qquad \mathbf{Ch(x)} = \frac{\mathbf{e^x + e^{-x}}}{\mathbf{2}}, \qquad \mathbf{Th(x)} = \frac{\mathbf{Sh(x)}}{\mathbf{Ch(x)}}$$

onde

$$D_{Sh} = D_{Ch} = D_{Th} = \mathbb{R}; \qquad Sh \text{ é ímpar e } Ch \text{ é par}$$

$$Im(Sh) = \mathbb{R}, \qquad Im(Ch) = [1, \infty),$$



$$\mathbf{Ch^2(x) - Sh^2(x) = 1},$$

$$\mathbf{Ch(2x) = Ch^2(x) + Sh^2(x)}, \qquad \mathbf{Sh(2x) = 2Sh(x)Ch(x)}$$

Inversas:

$$SettSh = Sh^{-1}$$

$$SettCh = (Ch^*)^{-1} \qquad \text{onde } Ch^* : [0, \infty) \to [1, \infty) : x \mapsto Ch(x)$$

$$SettTh = (Th^*)^{-1} \qquad \text{onde } Th^* : \mathbb{R} \to (-1, 1) : x \mapsto Th(x)$$

Fórmula explicita para as inversas:

$$SettSh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}$$

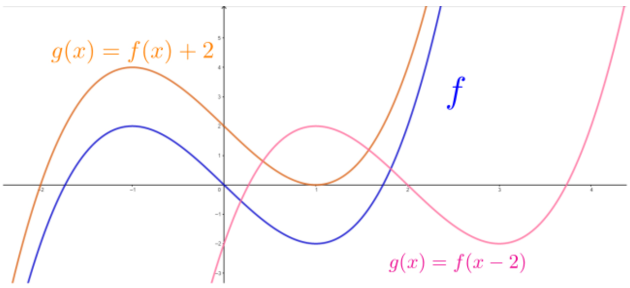
$$SettCh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \in [1, \infty)$$

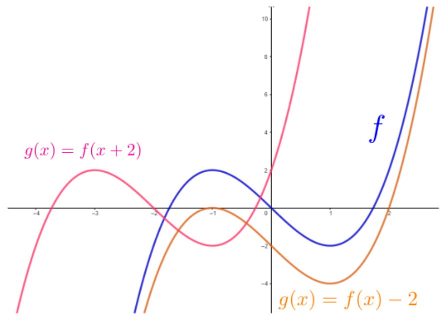
$$SettTh(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right), \quad x \in (-1, 1)$$

F.5 Translação de gráficos

Seja $c > 0$. O gráfico da função:

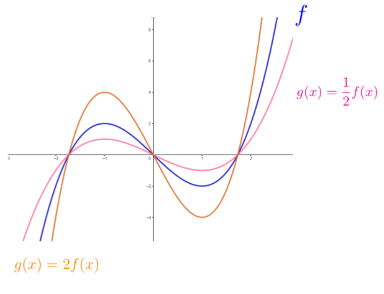
1. $g(x) = f(x) + c$: é o $G(f)$ transladado c unidades para cima;
2. $g(x) = f(x) - c$: é o $G(f)$ transladado c unidades para baixo;
3. $g(x) = f(x + c)$: é o $G(f)$ transladado c unidades para esquerda;
4. $g(x) = f(x - c)$: é o $G(f)$ transladado c unidades para direita.

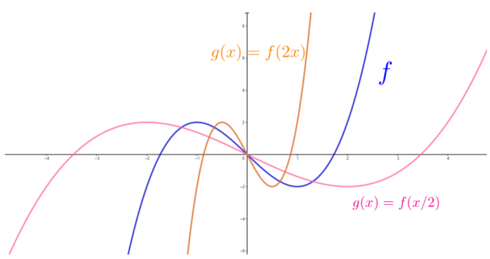


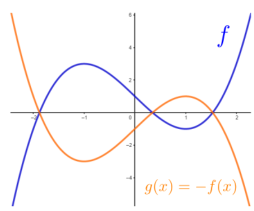


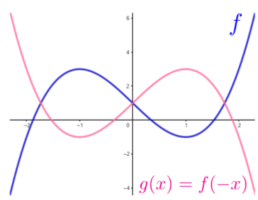
Seja $c > 1$. Para obter o gráfico da função:

1. $g(x) = cf(x)$: estique o $G(f)$ verticalmente c unidades;
2. $g(x) = \frac{1}{c}f(x)$: comprima o $G(f)$ verticalmente c unidades;
3. $g(x) = f(cx)$: comprima o $G(f)$ horizontalmente c unidades;
4. $g(x) = f\left(\dfrac{x}{c}\right)$: estique o $G(f)$ horizontalmente c unidades;
5. $g(x) = -f(x)$: reflita o $G(f)$ em torno do eixo-x;
6. $g(x) = f(-x)$: reflita o $G(f)$ em torno do eixo-y;









Exemplo: Exercício 14 em Slides de Exercícios.

F.6 Gráficos de funções trigonométricas

seno e cosseno
seno, cosseno e tangente
tangente e cotangente
cosecante e secante
arcoseno e arcocosseno
arcotangente
parametrização do circulo

F.7 Gráficos de potências

$x,\ x^2,\ x^3,\ x^4$
$x,\ \sqrt{x},\ \sqrt[3]{x},\ \sqrt[4]{x}$
$x,\ \sqrt{x},\ x^2$
$1/x,\ 1/x^2,\ 1/x^3,\ 1/\sqrt{x},\ 1/\sqrt[3]{x},\ 1/\sqrt[4]{x},$

F.8 Gráficos de funções exponenciais, logarítmicas e hiperbólicas

exponencial e logaritmo natural
2^x e 4^x
2^x e 4^x com inversas
seno hiperbólico
cosseno hiperbólico
as três hiperbólicas
as três hiperbólicas inversas
parametrização da hipérbole