1 Lembrando definição de integral em uma variável

Definição: uma **Partição de** $[a, b]$ é um conjunto finito de pontos da forma

$$P = \{x_0, ..., x_n : \ a = x_0 < x_1 < x_2 < .. < x_{n-1} < x_n = b\} \ ;$$

também denotamos por $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ e $\|P\| = max\,\{\Delta_i x,\, i = 1, .., n\}$ e $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$.

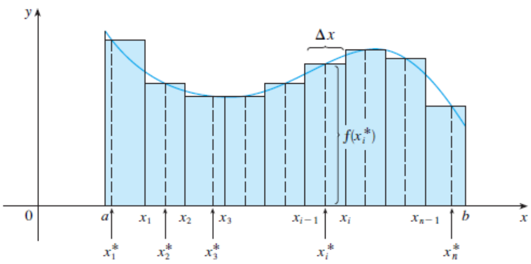


Figura 1: Imagem do livro: Cálculo, vol. 2, James Stewart

Dadas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **limitada (com** $[a, b]$ **limitado)** e partição P, definimos a Soma de Riemann (irregular) (regular) (Wikipédia):

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_i x,$$

Considere o limite

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_i x$$

- quando o limite acima existe e é um número real $L \in \mathbb{R}$ independente da escolha dos pontos x_i^* em $[x_{i-1}, x_i]$, isto é:

  $$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0;\ \forall P, \|P\| < \delta, \forall x_i^* \in [x_{i-1}, x_i], \text{ temos} \left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_i x - L\right| < \varepsilon$$

  dizemos que

  - f é **Riemann integrável (no sentido próprio) em** $[a, b]$,
  - L é a **integral definida (de Riemann) de f em** $[a, b]$: $\quad L = \int_a^b f$;

- se tal L não existir (ou depender da escolha dos $x^{*\prime}s$), dizemos que

  - f **não é Riemann integrável em** $[a, b]$.

2 Integral dupla em retângulos

2.1 Definição de Integral Dupla em Retângulos

Sejam $R = [a, b] \times [c, d]$ e $f : R \to \mathbb{R}$ **uma função limitada**:

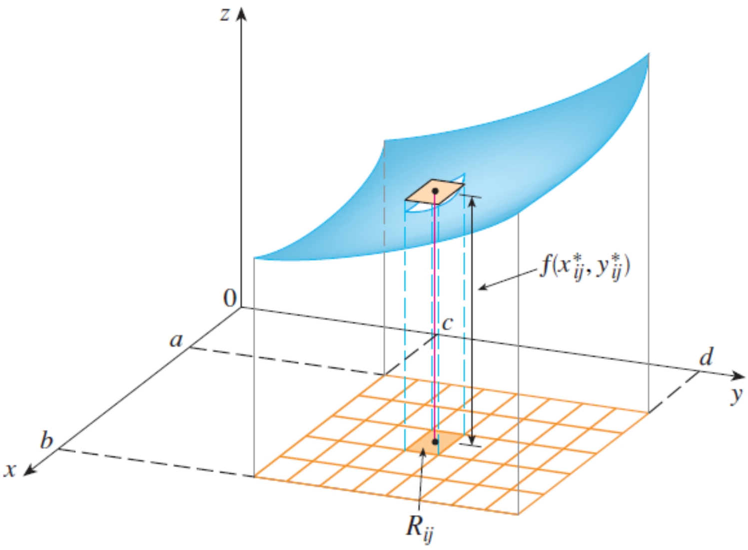


Figura 2: Imagem do livro: Cálculo, vol. 2, James Stewart

- $P = \{R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ partição de R:
  $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$
  $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d, \quad \|P\| = max\,\{\Delta_i x\,, \Delta_j y\;: i = 1, .., n, j = 1, ...m\}$
- $(x^*_{ij}, y^*_{ij}) \in R_{ij}$; uma **soma de Riemann**: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x^*_{ij}, y^*_{ij})\Delta_i x \Delta_j y$
- $L := \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x^*_{ij}, y^*_{ij})\Delta_i x \Delta_j y = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x^*_{ij}, y^*_{ij})\text{area}(R_{ij})$
- se o limite acima existe, L é finito e independente da escolha dos pontos (x^*_{ij}, y^*_{ij}) dizemos que
  - f é **Riemann integrável (no sentido próprio) em R**,
  - L é a **integral definida (de Riemann) de f em R**: $\quad L = \iint_R f$;
- se tal L não existir ou depender da escolha dos $x^{*\prime}s$, dizemos que
  - f **não é Riemann integrável em R.**

Outras notações: $\iint_R f = \int_R f = \iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint_R f(\mathbf{x})\, dR = \iint_R f(\mathbf{x})\, \mathbf{dA}$

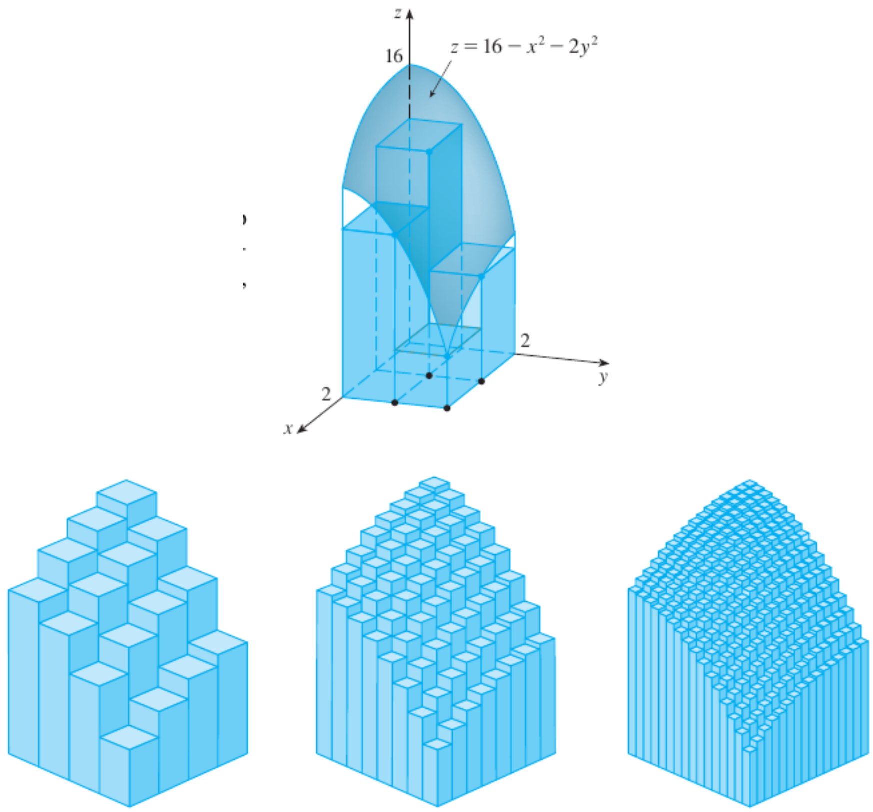
Aplicação:

Se $f \geq 0$ (integrável), então

$$\iint_R f$$

é o volume do sólido

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in R, \ 0 \leq z \leq f(x, y)\right\}.$$



(a) $m = n = 4$, $V \approx 41{,}5$ (b) $m = n = 8$, $V \approx 44{,}875$ (c) $m = n = 16$, $V \approx 46{,}46875$

Figura 3: Stewart, Cálculo, vol.2: aproximações para a Soma de Riemann quando $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$, $R = [0, 2] \times [0, 2]$. Geogebra

---

Questão 1: Quando $f : R = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ limitada é integrável em R?

Questão 2: Como resolver a integral dupla $\displaystyle\iint_R f$?

2.2 Integrabilidade e Teorema de Fubini em retângulos

Seja $R = [a, b] \times [c, d]$ um retângulo em $\mathbb{R}^2$.

Teorema 2.1. *Se $f : R \to \mathbb{R}$* **é contínua então é integrável**.

Motivação:

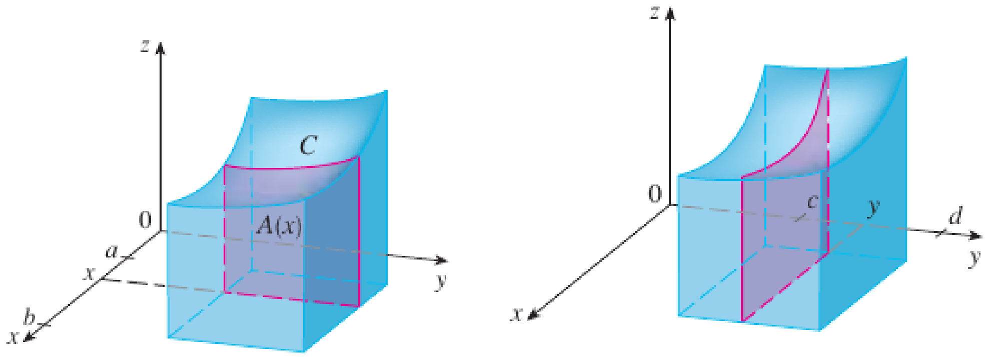


Figura 4: Stewart, Cálculo, vol. 2: *volume é a integral da área da seção transversal, ou seja,* $V = \int_a^b A(x)dx$ *onde* $A(x) = \int_c^d f(x, y)dy$ *ou* $V = \int_c^d A(y)dy$ *onde* $A(y) = \int_a^b f(x, y)dx$

Teorema 2.2 (Teorema de Fubini em retângulos)**.** *Seja $f : R \to \mathbb{R}$ limitada e integrável em R.*

- *se $\forall x \in [a, b]$ $\exists H(x) := \int_c^d f(x, y)\, dy$ então H é integrável em $[a, b]$ e*

$$\iint_R f = \int_a^b H(x)\, dx \;= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx.$$

- *se $\forall y \in [c, d]$ $\exists G(y) := \int_a^b f(x, y)\, dx$ então G é integrável em $[c, d]$ e*

$$\iint_R f = \int_c^d G(y)\, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy$$

Corolário 2.3. *Se $f : R \to \mathbb{R}$* **é contínua ambas as fórmulas valem:**

$$\iint_R f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy\,.$$

3 Integrais múltiplas

3.1 Definição de Integrais múltiplas

Podemos fazer o mesmo em $\mathbb{R}^n$:

Seja $f : R \to \mathbb{R}$ **limitada, onde** $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times .. \times [a_n, b_n]$**: multi-retângulo (em** $\mathbb{R}^n$**) limitado.**

Sejam

$P_1, .., P_n$ partições de $[a_1, b_1], .., [a_n, b_n]$ contendo $k_1 + 1, .., k_n + 1$ pontos

$P = P_1 \times \ldots \times P_n$
$\|P\|$ o tamanho do maior intervalinho entre todas as $P_1, .., P_n$

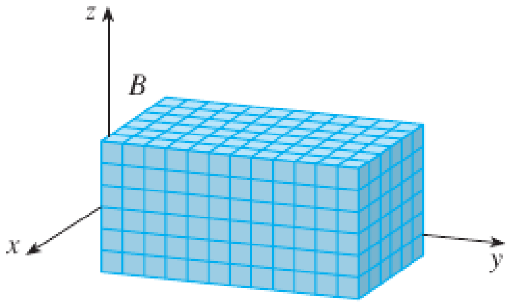
$x^*_{i_1,..,i_n} \in R_{i_1,...,i_n} = [x_{i_1-1}, x_{i_1}] \times ... \times [x_{i_n-1}, x_{i_n}]$

uma **soma de Riemann associada a** f **e** $P_1, .., P_n$:

$$\mathcal{S}_{\mathbf{x^*}}(\mathbf{f}, \mathbf{P}) = \sum_{\mathbf{i_1=1}}^{\mathbf{k_1}} ... \sum_{\mathbf{i_n=1}}^{\mathbf{k_n}} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*_{\mathbf{i_1,..,i_n}}) \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{i_1}}\mathbf{x} ... \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{i_n}}\mathbf{x}$$

- se existe $L := \lim_{\|P\| \to 0} \mathcal{S}_{x^*}(f, P)$ (independente da escolha dos pontos x^*) dizemos que
  - f **é Riemann integrável em** R**,**
  - L é a **integral definida (de Riemann) de** f **em** R: $L = \int_R f$ ($n = 3$ **usa** $\iiint_R f$);
- se $\nexists \lim_{\Delta P \to 0} \mathcal{S}_{x^*}(f, P)$ (ou depende da escolha dos pontos x^*) dizemos que
  - f **não é Riemann integrável em** R**.**

Caso $n = 3$: $\displaystyle\iiint_R 1 = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \Delta_i x \Delta_j y \Delta_k z = V(R)$



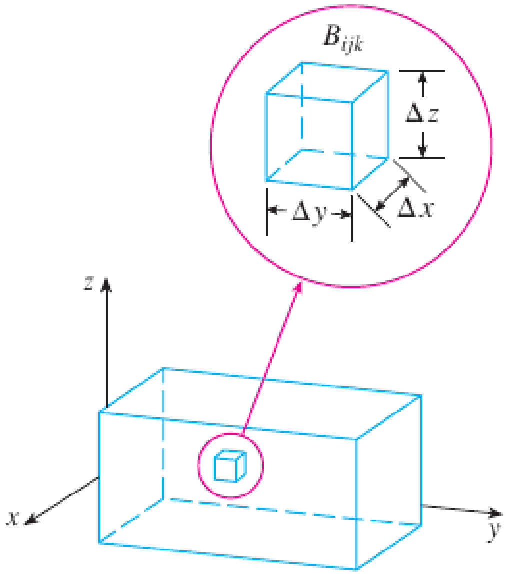


Figura 5: Stewart, Cálculo, vol. 2: $B = [a,b] \times [c,d] \times [r,s] = R$

Outras notações:

(n=3)

$$\int_R f = \iiint_R f = \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_R f(\mathbf{x})\,dR = \iiint_R f(\mathbf{x})\,\mathbf{dV}$$

(geral)
$\int_R f = \int\!\cdots\!\int_R f = \int\!\cdots\!\int_R f(x_1,..,x_n)\,dx_1\,..\,dx_n = \int_R f(\mathbf{x})\,dR = \int_R f(\mathbf{x})\,dV = \ldots =$
$\int_R f(\mathbf{x})\,dV_n = \int_R f(\mathbf{x})\,dx^n$

3.2 Integrabilidade e Teorema de Fubini em multi-retângulo

Seja $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times .. \times [a_n, b_n]$ um multi-retângulo em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.1. *Se $f : R \to \mathbb{R}$* **é contínua então é integrável**.

Teorema 3.2 (Teorema de Fubini)**.** *Seja $f : R \to \mathbb{R}$ limitada e integrável em R.*

- *Se a formula abaixo faz sentido, então é verdadeira:*

$$\int_R f = \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, .., x_n) dx_n \right) \ ... \ dx_2 \right] \ dx_1$$

- *O mesmo vale mudando a ordem das integrais à direita (sempre que tudo faça sentido!)*

Corolário 3.3. *Se $f : R \to \mathbb{R}$* **é contínua então a fórmula acima vale (com qualquer ordem das integrais à direita).**

Por exemplo em $\mathbb{R}^3$, se $R = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, temos 6 integrais iteradas:

$$\begin{aligned}
\iiint_R f dV &= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_r^s f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx \\
&= \int_a^b \left(\int_r^s \left(\int_c^d f(x, y, z)\, dy \right) dz \right) dx \\
&= \int_r^s \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y, z)\, dx \right) dy \right) dz \\
&= \int_r^s \left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y, z)\, dy \right) dx \right) dz \\
&= \int_c^d \left(\int_r^s \left(\int_a^b f(x, y, z)\, dx \right) dz \right) dy \\
&= \int_c^d \left(\int_a^b \left(\int_r^s f(x, y, z)\, dz \right) dx \right) dy\,.
\end{aligned}$$

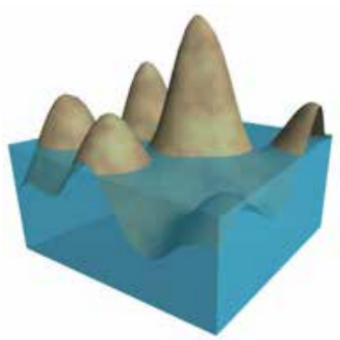
4 Propriedades da integral múltipla

Valem a maioria das propriedades da integral em uma variável:
Sejam $f, g : R \to \mathbb{R}$ limitadas e integráveis em R, com $R \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, um multi-retângulo. Então

- $\alpha f + \beta g$ **é integrável em** R e $\int_R (\alpha f + \beta g) = \alpha \left(\int_R f\right) + \beta \left(\int_R g\right)$, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $|f|$ **é integrável em** R e $\left|\int_R f\right| \leq \int_R |f|$,
- fg **é integrável em** R
- $f \geq 0$ **em** R **implica** $\int_R f \geq 0$.
- $f \geq g$ **em** R **implica** $\int_R f \geq \int_R g$.
- $f = 0$ **em** R **implica** $\int_R f = 0$.
- (Teorema Valor Médio) Se f **é contínua então existe** $\mathbf{x} \in R$ **tal que**

$$f_{\mathbf{med}} = f(\mathbf{x}) = \frac{\int_R f}{(b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)} \qquad \textbf{(valor médio)}$$

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) f_{\text{med}} = \iint_R f$$



[Se $z = f(x, y)$ descreve uma região montanhosa e você corta os topos dos morros na altura f_{med}, então pode usá-los para encher os vales de forma a tornar a região completamente plana.

Figura 6: Stewart, Cálculo, vol. 2. ($n = 2$ e $f \geq 0$)

Sugestão de Exercícios:

- Lista 2 do prof. Eugenio Massa: 1, 8, 12-a) e 12-c).
- Listas no e-disciplinas: Integral dupla parte 1 (exercício 1).