Conteúdo

[0] A prof. Ana Peron agradece o prof. Eugenio Massa por ceder seus arquivos LaTeX

A1 Resumo: Espaços topológicos, métricos, normados

Espaço topológico: dupla (X, τ): X conjunto, τ **topologia**: uma família de subconjuntos de X, chamados de "**abertos**", tal que

- $X, \emptyset \in \tau$
- se $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$ então $\bigcup A_i \in \tau$ (reuniões quaisquer)
- se $\{A_i\}_{i=1,..,n} \subseteq \tau$ então $\bigcap A_i \in \tau$ (interseções finitas)

Espaço métrico: dupla (X, d): X conjunto, d **métrica**: uma função $d : X \times X \to [0, \infty)$ tal que

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall\, x, y \in X$,
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall\, x, y, z \in X$.

Podemos tomar em X a *topologia induzida* pela métrica: a gerada pelas bolas abertas $B_\delta(x) = \{y \in X : \ d(x, y) < \delta\}$, onde $A \subseteq X$ é aberto se para todo $x \in A$ existe $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) \subset A$.

Espaço vetorial normado: dupla $(X, \| \ \|)$: X espaço vetorial [1], $\| \ \|$ **norma**: uma função $\| \cdot \| : X \to [0, \infty)$ tal que

- $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in X$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall\, x, y \in X$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in X$.
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

Podemos tomar em X a *métrica induzida* pela norma $d(x, y) := \|x - y\|$, e a correspondente topologia.

Entre espaços topológicos podemos definir **continuidade** (de uma função), logo a mesma definição vale em e.m. e em e.v.n.

[1] Conjunto X com uma soma interna (comutativa, associativa, com neutro e inverso) e um produto externo com coeficientes num corpo $\mathbb{K}$ (associativo, distributivo e com identidade):

- $x + y = y + x, \quad (x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in X$
- $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x), \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \quad \forall x \in X, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
- $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \quad \forall x, y \in X, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$
- $1x = x, \quad \forall x \in X$.

A1.1 Algumas definições e propriedades em esp. top./mét.[Fol99, p.13]

Num espaço topológico (X, τ) definimos

- $H \subset X$ é **fechado** se H^c é aberto.
- A união de todos os abertos contidos em G é chamada **interior de G** e é denotado por $\boxed{G'}$.
- A interseção de todos os fechados contendo G é o **fecho de G** e é denotado por $\boxed{\overline{G}}$.
- $G \subset X$ é denso em X se $\overline{G} = X$ e nunca-denso em X se $\overline{G}' = \emptyset$.
- X é separável se tem um subconjunto enumerável e denso.
- $C \subseteq X$ é dito **compacto** se toda cobertura aberta de C possui uma subcobertura finita.

> se $C \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$ onde $\{A_i\} \subseteq \tau$ então existe un subconjunto finito de índices $I_0 \subseteq \mathcal{I}$ tal que $C \subseteq \bigcup_{i \in I_0} A_i$

- A função $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ é **contínua** se para todo $V \in \tau_Y$ vale que $f^{-1}(V) \in \tau_X$.

> Se τ_X, τ_Y são induzidas por uma métrica, as definições podem ser dadas usando as bolas abertas ou sequências.

Exercícios

Mostre as propriedades a seguir.

1. $(\overline{G})^c = (G^c)'$ e $\overline{G^c} = (G')^c$.
2. Se G é aberto e denso então G^c é nunca-denso.
   Se G é fechado e nunca-denso então G^c é denso.

A2 Espaços métricos

Espaço métrico é uma dupla (X, d) onde X é um conjunto e d é uma **métrica**: $d : X \times X \to [0, \infty)$ tal que

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall\, x, y \in X$,
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall\, x, y, z \in X$.

Exemplo A2.1. X conjunto não vazio e d a **métrica discreta:**

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

(X, d) é espaço métrico. ★

Seja $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Exemplo A2.2 (Espaço das funções limitadas).

$$B(X) := \{f : X \to \mathbb{K} : f \text{ é limitada}\}$$

e

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$$

$(B(X), d)$ é espaço métrico. ★

Exemplo A2.3 (Espaços de sequências [Muj, p.5]).

$$\boxed{\ell_\infty} = \left\{ x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K} : \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j| < \infty \right\} \tag{A2.1}$$

$$\boxed{d_\infty}(x, y) = \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j - y_j| \tag{A2.2}$$

$$\boxed{\ell_p} = \left\{ x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K} : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\}, \quad p \in [1, \infty) \tag{A2.3}$$

$$\boxed{d_p}(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^p \right)^{1/p} \tag{A2.4}$$

(ℓ_∞, d_∞) e (ℓ_p, d_p) são espaços métricos. ★

A2.1 Desigualdades de Hölder e Minkowski

Lema A2.4. *Sejam $a, b \geq 0$, $\lambda \in (0,1)$. Então:*

$$a^{\lambda} b^{(1-\lambda)} \leq \lambda a + (1-\lambda) b$$

com igualdade se e só se $a = b$. $\triangleleft$

Lema A2.5 [Hölder]. *Sejam $p, q > 1$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,* [2]

$$xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q \qquad \forall x, y \geq 0$$

$$\sum |\xi_j \eta_j| \leq \left(\sum |\xi_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum |\eta_j|^q\right)^{1/q}$$ $\triangleleft$

Lema A2.6 [Minkowski]. *Seja $p \geq 1$. Então*

$$\left(\sum |\xi_j + \eta_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum |\xi_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |\eta_j|^p\right)^{1/p}$$ $\triangleleft$

Num espaço métrico (X, d) temos:

- **bola aberta** $B_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$.
- **bola fechada** $\overline{B_r(x)} = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$.
- **esfera** $S_r(x) = \partial B_r(x) = \{y \in X : d(x,y) = r\}$.
- $G \subseteq X$ é **aberto** se para todo $x \in G$ existe $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) \subseteq G$.
- uma sequência $(x_n) \subset X$ é **convergente** com limite $x \in X$ se $d(x_n, x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. (Escrevemos $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ ou $\lim_{n\to\infty} x_n = x$) .
- $C \subseteq X$ é **compacto** se e só se toda sequência em C tem uma subsequência convergente a um ponto de C.

[2] Se a soma é finita, também vale para $p = 1$ considerando $q = \infty$ no seguinte sentido:

$$|\xi \cdot \eta| \leq \sum |\xi_j \eta_j| \leq \left(\sum |\xi_j|\right) (\max |\eta_j|) =: \|\xi\|_1 \|\eta\|_\infty$$

Exercícios

Num espaço métrico (X, d), mostre as propriedades a seguir.

Exercício A2.7. G é fechado se e só se para toda sequência $\{x_n\} \subseteq G$ que converge a algum $x \in X$, vale $x \in G$. ★

Exercício A2.8. $x \in G'$ se e só se existe $B_r(x) \subseteq G$. ★

Exercício A2.9. São equivalentes:
– $x \in \overline{G}$,
– $B_r(x) \cap G \neq \emptyset$, $\forall r > 0$,
– existe uma sequência $(x_n) \subseteq G$: $x_n \to x$. ★

A2.2 Completeza

Definição A2.10. Um esp. métrico (X, d) é **completo** se toda sequência $(x_n) \subseteq X$ de Cauchy converge a um ponto $x \in X$.

★

> Uma sequência (x_n) em um espaço métrico (X, d) é dita ser **de Cauchy** se $d(x_n, x_m) \to 0$ quando $\min\{n, m\} \to \infty$:
>
> $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ n, m > N \implies d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Exercícios

Exercício A2.11. Seja (X, d) um espaço métrico e $(x_n) \subset X$ uma sequência.

(a) se (x_n) é convergente então é de Cauchy.

(b) se (x_n) é de Cauchy e alguma sub-sequência dela é convergente, então a sequência inteira é convergente. ★

Seja (X, d) um esp. métrico. Um subconjunto Y de X é completo se o espaço métrico (Y, d) é completo.

Exercícios

Exercício A2.12.

- Um subconjunto fechado de um espaço métrico completo é completo.
- Um subconjunto completo de um espaço métrico qualquer é fechado.
- Em um esp. métrico: compacto $\Longrightarrow$ completo $\Longrightarrow$ fechado. ★

Exercício A2.13. Considere $X = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ e as métricas

$$d_I(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx, \qquad d_U(f,g) = \max_{x\in[0,1]} \{|f(x) - g(x)|\}.$$

Mostre que (X, d_I) não é completo e que (X, d_U) é completo. ★

Exercício A2.14.

- $(\mathbb{Q}^n, d)$ não é completo (d a distância Euclideana de $\mathbb{R}^n$)
- (ℓ_p, d_p) é completo para $p \in [1,\infty]$

★

A2.3 Contrações [Che01, p.176] [Car, p.17]

Teorema A2.15 [do Ponto Fixo de Banach]. *Seja (X,d) um espaço métrico completo e $f : X \to X$ uma contração. Então existe e é único um ponto fixo de f.* ◁

> – f é **contração** se $\exists\, L < 1$: $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x,y)\ \forall\ x,y \in X$ (em particular, f é Lipschitz de constante L e contínua).
> – $x \in X$ é **ponto fixo** de f se $f(x) = x$

Exemplo A2.16. Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável no intervalo I. Então, f é uma contração se e somente se existe $L < 1$ tal que [3]

$$|f'(x)| \leq L, \quad x \in I.$$

[3] Em particular, $f(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$, não é contração enquanto $f(x) = \frac{2025}{2026}\cos(x)$ é.

★

APLICAÇOES

É usado para provar o Teorema de Existência e Unicidade para Problemas de Cauchy em EDOs (Picard-Lindelöf) e também o Teorema da Função Implícita [Bry85, p.84], dentre outros.
É utilizado também em probabilidade estatística, compreensão de imagens, etc.

Exercícios

Exercício A2.17. Seja X espaço de Banach. Mostre que se $f : \overline{B_r(p)} \subset X \to X$ é uma contração de constante $L < 1$, e além disso, se $d(p, f(p)) < (1-L)r$ então f possui um único ponto fixo em $\overline{B_r(p)}$. ★

Exercício A2.18. Sejam $K : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ e $g : [0,1] \to \mathbb{K}$ funções contínuas dadas. Além disso, seja $K(s,t,w)$ Lipshitz contínua em w, uniformemente com respeito a s, t, ou seja, existe $L > 0$:

$$|K(s,t,w) - K(s,t,v)| \leq L|w-v|, \quad \forall s,t \in [0,1].$$

Encontre hipóteses sobre o parâmetro $\lambda \in \mathbb{K}$ para obter existência e unicidade da solução da equação integral.

$$f(t) - \lambda \int_0^1 K(s,t,f(s))ds = g(t), \quad t \in [0,1].$$

★

Exercício A2.19 (Teorema da função implícita)**.** Seja $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Se existem $m, M > 0$ tais que

$$0 < m \leq \frac{\partial F}{\partial x} \leq M, \quad (t,x) \in I \times \mathbb{R},$$

então existe um única função contínua $x : I \to \mathbb{R}$ tal que $F(t, x(t)) = 0$, para todo $t \in I$, ou seja, a equação $F(x,t) = 0$ define implicitamente uma única função contínua x em termos de t. ★

A2.4 Baire

Seja (X, d) um espaço métrico. Aula 2

Definição. Um conjunto $A \subset X$ é dito
de primeira Categoria em X (**magro em X**) se A é união enumerável de conjuntos nunca-densos,
de segunda Categoria em X (**não-magro em X**) em caso contrário. ★

> - $A \subset X$ é denso em X se $\overline{A} = X$
> - $A \subset X$ é nunca-denso em X se $\overline{A}' = \emptyset$.

Exemplo A2.20.

- X é sempre denso em X pois $\overline{X}' = X' = X$
- $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ e é nunca-denso em $\mathbb{R}^2$
- $\{p\}$ é nunca-denso em $\mathbb{R}$ ou em $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q}$ é de 1a categoria em $\mathbb{R}$ ou em $\mathbb{Q}$ (não é e.m. completo, Teorema A2.21)

★

Teorema A2.21 [das categorias de Baire]. *Todo espaço métrico completo é de segunda categoria nele mesmo.* [Car, prova:p.36] ◁

Proposição A2.22. *(X, d) é de segunda categoria nele mesmo é equivalente a*

- *em qualquer representação de X como união enumerável de conjuntos fechados, pelo menos um deles contém uma bola.*
- *toda interseção enumerável de abertos densos em X é não vazia*

Se (X, d) é esp. métrico completo, também vale que toda interseção enumerável de abertos densos em X é densa em X. ◁

Demonstração. **Exercício.** □

A3 Espaços Vetoriais Normados

A3.1 Preliminares

Precedente

Sempre é possível definir uma norma em um espaço vetorial?

Definição. Uma **base de Hamel** para um espaço vetorial X sobre o corpo $\mathbb{K}$, é um conjunto $B \subseteq X$ cujos elementos são linearmente independentes e tal que todo elemento de X é combinação linear (finita) de elementos de B:

> podemos escrever $B = \{x_i,\ i \in \mathcal{I}\}$: então cada $x \in X$ pode ser escrito (de modo único!), na forma
>
> $$x = \sum_{i \in \mathcal{J}_x} a_i x_i \qquad \textit{com} \ \{a_i\}_{i \in \mathcal{J}_x} \subseteq \mathbb{K}$$
>
> onde $\mathcal{J}_x$ é um subconjunto **finito** de $\mathcal{I}$.

★

Exemplo. Se X é o espaço de todos os polinômios definidos em $\mathbb{R}$, então $B = \{1, x, x^2, \ldots\}$ é uma base de Hamel de X. ★

Definição. X tem **dimensão** $n \in \mathbb{N}$ se a base de Hamel tem n elementos
X tem **dimensão infinita** se ela for infinita. ★

Exemplo. O espaço de todos os polinômios definidos em $\mathbb{R}$ tem dimensão infinita e o espaço dos polinômios de grau no máximo n tem dimensão finita n. ★

Teorema A3.1. *Todo espaço vetorial possui uma base de Hamel.* *[Fri70, prova:p.131..][Che01, p.32]* ◁

> **Lema de Zorn** *Se X é um conjunto parcialmente ordenado e todo subconjunto totalmente ordenado de X tem um limitante superior então X tem um elemento maximal.*
>
> > **Conjunto parcialmente ordenado**: com uma relação de ordem "$\preceq$"(reflexiva, antisimétrica e transitiva)
> > (reflexiva $x \preceq x$
> > antisimétrica $x \preceq y$ e $y \preceq x \Longrightarrow x = y$
> > transitiva $x \preceq y$ e $y \preceq z \Longrightarrow x \preceq z$)
> > **Conjunto totalmente ordenado**: com uma relação de ordem "$\preceq$" tal que dados x, y quaisquer $x \preceq y$ ou $y \preceq x$
> > **Limitante superior** de $Y \subseteq X$: $l \in X$ t.q. $y \preceq l$ para todo $y \in Y$.
> > $m \in X$ é **elemento maximal** de X: $x \in X$ e $m \preceq x \Longrightarrow m = x$.
>
> São afirmações equivalentes (Princípios da teoria dos conjuntos)
> **Lema de Zorn**,
> **Princípio da Boa Ordenação**,
> **Princípio Maximal de Hausdorff**,
> **Axioma da Escolha**

Definição. Uma **norma** em um e.v. X é uma função $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ tal que

- $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in X$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall\, x, y \in X$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in X.$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

★

Corolário A3.2. *Todo e.v. pode ser normado.* ◁

Demonstração. Fixada uma base de Hamel em um e.v. X, podemos definir a seguinte norma em X (verifique!): $|||\cdot|||_\infty : X \to \mathbb{R}$ por

$$|||x|||_\infty = \max_{i\in\mathcal{J}_x} |a_i| \qquad \text{quando } x = \textstyle\sum_{i\in\mathcal{J}_x} a_i x_i.$$

□

Exercícios

Exercício A3.3. Mostre que $|||x|||_p = \left(\sum_{i\in\mathcal{J}_x} |a_i|^p\right)^{1/p}$ também define uma norma em X. ★

Exercício A3.4 (EA2). Mostre que $(X, |||\cdot|||_\infty)$ não pode ser completo se X tem dimensão infinita (construa uma série absolutamente convergente que não convirja! (veja Teorema A3.12)) ★

A3.2 Definição e exemplos

Espaço vetorial normado é uma dupla $(X, \|\ \|)$ onde X é um espaço vetorial, e $\|\ \|$ é uma **norma**.

Sempre consideraremos esp. vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Proposição A3.5. *Todo espaço vetorial normado $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço métrico com a métrica induzida pela norma:* $d(x, y) := \|x - y\|$. ◁

Demonstração. **Exercício.** [Fri70, p.125] □

Exemplo A3.6 (Exemplos uteis - Espaços de sequências [Muj, p.5]).
Seja $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{K}$ e defina

$$\|x\|_\infty := \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j| \qquad \|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p}.$$

$$\boxed{\ell_\infty} = \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K} : \ \|x\|_\infty < \infty\} \tag{A3.1}$$
$$\boxed{c} = \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K} : \ x_j \text{ converge}\} \tag{A3.2}$$
$$\boxed{c_0} = \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K} : \ x_j \to 0\} \tag{A3.3}$$
$$\boxed{c_{00}} = \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K} : \ x_j \neq 0 \text{ para finitos índices}\} \tag{A3.4}$$

são espaços vetoriais e $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma neles.

$$\boxed{\ell_p} = \left\{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} : \ \|x\|_p < \infty\right\}, \ p \in [1, \infty) \tag{A3.5}$$

é espaço vetorial e $\|\cdot\|_p$ é uma norma nele. ★

$$c_{00} \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty$$

Observação A3.7. Com a mesma construção podemos considerar espaços de sequencias em X, sendo X um e.v.n: por exemplo

$$\boxed{\ell_p(X)} := \left\{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq X : \ \|x\|_p < \infty\right\} \tag{A3.6}$$

com a norma $\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|_X^p\right)^{1/p}$ (ou $\|x\|_\infty := \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\|_X$) ★

Também podemos considerar produto cartesiano de e.v.n: $\boxed{X_1 \times X_2 \times ... \times X_n}$ com a norma

$$\|x\|_{p, X_1\times\ldots\times X_n} := \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|_{X_j}^p\right)^{1/p}, \quad p \geq 1$$

ou

$$\|x\|_{\infty, X_1\times\ldots\times X_n} := \max_{j=1,..,n} \|x_j\|_{X_j}$$

Exemplo A3.8 (Espaço de funções). Dado espaço de medida (completa) (Ω, Σ, μ) definimos

$$\boxed{\mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu)} = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{K} \; mensuravel : \; \|f\|_p < \infty \right\} \tag{A3.7}$$

onde $\boxed{\|f\|_p} := \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{1/p} & se \; p \geq 1 \\ \underset{x \in \Omega}{supess} \, |f(x)| & se \; p = \infty \end{cases}$

Lema A3.9 [Hölder]. *Sejam $p, q > 1$: $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.*

Se $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ e $g \in \mathcal{L}_q(\Omega, \Sigma, \mu)$ então $fg \in \mathcal{L}_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ e

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$$ ◁

Lema A3.10 [Minkowski]. *Seja $p \geq 1$. Se $f, g \in \mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ então $f+g \in \mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ e*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$ ◁

Se

$$\boxed{L_p(\Omega, \Sigma, \mu)} := \{[f] : \; f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu)\} \tag{A3.8}$$

onde $[f]$ é a classe de equivalência de f com respeito à relação de equivalência "$f \sim g$ se $f = g$ q.t.p", então $\| \, \|_p$ é norma para L_p. ★

A3.3 de Banach

Definição. Um espaço vetorial normado que é completo com a métrica induzida pela norma é dito um **espaço de Banach**. ★

Teorema A3.11. *Todo espaço vetorial normado pode ser imerso (densamente) em um espaço de Banach (o seu completamento). O completamento é único a menos de isometrias.* [Car, prova:p.19..] [Muj, prova:p.23..] ◁

> **isometria**: $T : X \to Y$: linear tal que $\|Tx\|_Y = \|x\|_X, \quad \forall x \in X$

Esboço da prova: • Existência: X = **e.v.n**

1. $C :=$ conjunto das sequências de Cauchy em X é um e.v.
2. $\|x\|_C := \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$, onde $x = \{x_n\} \in C$ é uma semi-norma[4] em C
3. $x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in C$: $x \sim y \iff \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\|_C = 0$
4. $\tilde{X} := \{\tilde{x} = [x] : x \in C\}$ = conj. classes de equivalências e defina (espaço quociente)

$$\tilde{x} + \tilde{y} := [x + y], \quad \lambda \cdot \tilde{x} := [\lambda x], \qquad \|\tilde{x}\|_\sim := \|x\|_C, \text{para algum } x \in \tilde{x}$$

5. $(\tilde{X}, \|\cdot\|_\sim)$ é um e.v.n
6. $\sigma : X \to \tilde{X} : x \mapsto \sigma(x) = [\{x, x, \ldots\}]$, σ **é uma isometria**
7. $\sigma(X)$ **é denso em** $\tilde{X}$
8. $(\tilde{X}, \|\cdot\|_\sim)$ **é Banach**

- Unicidade:

Se $(\widehat{X}, \|\cdot\|_{\widehat{}})$ é um e.v.n completo tal que existe uma isometria $T : X \to \widehat{X}$ de modo que $T(X)$ é denso em $\widehat{X}$, então:

1. $\forall\, \hat{x} \in \widehat{X}$, $\exists\, x =: \{x_n\} \subset X$ tal que $T(x_n) \to \hat{x}$ e x é de Cauchy
2. $\tilde{x} := [x] \in \tilde{X}$
3. $\gamma : \hat{X} \to \tilde{X} : \hat{x} \mapsto \tilde{x}$ **é uma isometria**.

$\square$

Duas normas em X, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são **normas equivalentes** se existem $c, C > 0$ tais que

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \quad \forall \;\; x \in X.$$

Elas induzem a mesma topologia.

[4] uma **seminorma** deve satisfazer as propriedades de norma exceto a condição $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$

Teorema A3.12. *Um espaço vetorial normado é completo (de Banach) se e somente se toda série absolutamente convergente é convergente.* ◁

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é dita **convergente** em X se $s_N := \sum_{n=1}^{N} x_n \to x$ quando $N \to \infty$

e **absolutamente convergente** se $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ é convergente.

Em vista da estrutura de e.v.n. podemos definir

- $C \subset X$ é um conjunto **convexo**: se

$$tx + (1-t)y \in C \qquad \text{para todo } x, y \in C \text{ e } t \in [0,1]$$

- $S \subset X$ é um **subespaço**: se

$$0 \in S, \quad x, y \in S \Longrightarrow x + y \in S, \quad x \in S \Longrightarrow \lambda x \in S \;\; \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Exercícios

Exercício A3.13. Mostre que bolas abertas e fechadas e subespaços são conjuntos convexos. ★

Exercício A3.14. Mostre que

- Se S é um subespaço próprio de um e.v.n. X, então $S' = \emptyset$
- Se S é um subespaço fechado de um espaço de Banach então S é um espaço de Banach.

★

A3.3.1 Exemplos de Banach

Aula 3

Teorema A3.15. *(sendo $\mathbb{K}$ completo) ℓ_p é Banach para $p \in [1, \infty]$.* $\triangleleft$

Exemplo A3.16. Se $X, X_1, .., X_n$ são Banach então $\ell_p(X)$ e $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ são Banach, em particular $\mathbb{K}^n$ é Banach (com todas as normas vistas) ★

Exercícios

Exercício A3.17. Prove que

- para $p \in [1, \infty)$, o fecho[a] de c_{00} em ℓ_p é ℓ_p
- o fecho[a] de c_{00} em ℓ_∞ é c_0.
- c_0 e c são fechados em ℓ_∞, logo são espaços de Banach com a norma infinito (note que $c, c_0 \not\subseteq \ell_p$ se $p < \infty$).
- c_{00} não é completo com nenhuma das normas vistas (é um subespaço não fechado)
- mostre que se $1 \leq p < q \leq \infty$ e $x \in \ell_p \cap \ell_q$ então $\|x\|_q \leq \|x\|_p$. Conclua que $\ell_p \subset \ell_q$. ★

[a] É também o completamento

Exemplo A3.18 (Espaço das funções limitadas). Sejam X um conjunto não vazio e $B(X) = \{f : X \to \mathbb{K} : f \text{ é limitada}\}$

$$(B(X), \|\cdot\|), \qquad \text{onde } \|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|, \qquad \text{é Banach}$$

★

Exemplo A3.19 (Espaço das funções contínuas). Sejam X um espaço topológico compacto e $C(X) = \{f : X \to \mathbb{K} : f \text{ é contínua}\}$

$$(C(X), \|\cdot\|), \qquad \text{onde } \|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|, \qquad \text{é Banach}$$

★

Exemplo A3.20 (Espaço das funções contínuas e limitadas). Sejam X um espaço topológico e $C_B(X) = \{f : X \to \mathbb{K} : f \text{ é contínua e limitada}\}$

$$(C_B(X), \|\cdot\|), \quad \text{onde } \|f\| := \sup_{x\in X} |f(x)|, \quad \text{é Banach}$$

★

Exercícios

Exercício A3.21. Seja X um e.v.n. e suponha que existam F_n, $n \in \mathbb{N}$, subespaços fechados e próprios de X tais que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Use o Teorema das categorias de Baire para mostrar que X não é Banach.
Use este resultado para provar as afirmações

- o espaço vetorial real P de todos os polinômios (de uma variável real com coeficientes em $\mathbb{R}$) não é completo com qualquer que seja a norma.
- Se B é uma base de Hamel de um espaço de Banach de dimensão infinita, então B não é enumerável. ★

A4 Aplicações lineares

Sejam X, Y e.v.n. sobre $\mathbb{K}$.

Definição. Uma **aplicação (transformação/operador) linear de X em Y** é uma função $T : X \to Y$ tal que

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \quad \forall x, y \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

★

Definimos[5]

$$\mathcal{L}_?(X, Y) = \{T : X \to Y : linear\}$$

o espaço das aplicações (transformações) lineares de X em Y

Exemplo. 1. Seja $K \in C([0,1] \times [0,1], \mathbb{K})$. Então

$$\mathcal{K} : C([0,1]) \to C([0,1]) : f \mapsto (\mathcal{K}f)(s) = \int_0^1 K(s,t) f(t) dt,$$

é um operador integral linear.

2. Seja $f \in X = C_B([0, \infty), \mathbb{K})$. Então

$$(Lf)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad f \in X$$

é um operador linear, chamado transformada de Laplace.

3. Seja $f \in X = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{K}): \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt, \infty\}$. Então

$$(Ff)(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i s t} f(t) dt, \quad f \in X$$

é um operador linear, chamado transformada de Fourier.

★

[5] Cuidado, a definição não é universal: em [Fol99], [Car07] e [Muj] a notação $\mathcal{L}$ é usada para o conjunto das lineares, mas em [Bre11] usa $\mathcal{L}$ para o conjunto das lineares contínuas/limitadas.

Definição.
$T \in \mathcal{L}_?(X,Y)$ é **limitada** se $\sup\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X \leq 1\} < \infty$. ★

Exemplo. 1. Os operadores integrais $\mathcal{K}$, L, F são limitados.[Lax02, p.176, 180, 183]

2. Seja $C^1([0,1],\mathbb{R})$ espaço das funções diferenciáveis em $[0,1]$ com a norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Então, $T : C^1([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : f \mapsto T(f) = f'(1)$ é um operador linear não limitado.

★

Proposição A4.1. *Se $T \in \mathcal{L}_?(X,Y)$, são equivalentes:*

(a) T é (uniformemente) contínua,

(b) T é contínua em 0,

(c) T é limitada. ◁

Definimos[6]

$$\boxed{L(X,Y)} = \{T : X \to Y : \textit{linear e limitada}\}$$

$$\begin{aligned} \boxed{\|T\|_{L(X,Y)}} &:= \inf\{c \geq 0 : \|Tx\| \leq c\|x\|,\ \forall\ x \in X\} \\ &= \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \end{aligned} \tag{A4.1}$$

Observação.

- $(L(X,Y), \|\cdot\|_{L(X,Y)})$ é um e.v.n. [Fri70, pag. 136]
- $\|Tx\| \leq \|T\|_L\|x\|$, para todo $x \in X$

★

[6] Cuidado, a definição não é universal: em [Fol99], [Car07] e [Muj] a notação L é como aqui, mas em [Bre11] usa $\mathcal{L}$ para o conjunto das contínuas/limitadas.

Proposição A4.2. *Se Y é completo então $L(X,Y)$ é completo.*

Em particular $\boxed{X^*}:=L(X,\mathbb{K})$ *(dito espaço dual de X) é sempre completo.* $\triangleleft$

Exercícios

Exercício A4.3. Mostre que (A4.1) é de fato uma norma, que as formulações em (A4.1) são equivalentes e que a definição de T limitada é equivalente a pedir que os sup em (A4.1) sejam finitos. ★

Exercício A4.4. Mostre que se $T \in L(X,Y)$ e $S \in L(Y,Z)$ então $S \circ T \in L(X,Z)$ e $\|S \circ T\| \leq \|S\| \, \|T\|$. ★

Exercício A4.5. Sejam X um e.v.n. completo e $A \in L(X,X)$. Se $\|A\|_L < 1$, então $I - A$ é inversível e

$$(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$

onde $A^k = A \circ A^{k-1}$. A série acima é chamada série de Neumann para $(I-A)^{-1}$.
Aplique o resultado acima com um escolha adequada de um espaço de Banach X para encontrar a solução dada pela série de Neumann para a equação integral abaixo:

$$x(t) = \lambda \int_0^1 e^{t-s} x(s)ds + v(t), \quad t \in [0,1],$$

onde $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função conhecida. Indique a condição para os valores de λ de forma que a solução de fato exista. ★

A5 E.v.n. de dimensão finita

Definição A5.1. Para e.v.n definimos

- **isomorfismo (topológico)**: $T \in L(X,Y)$ inversível com $T^{-1} \in L(Y,X)$ logo $\exists\, c, C > 0 : c\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X,\ \forall x \in X$.
- **mergulho**: $T \in L(X,Y)$ que é isomorfismo de X em $T(X)$
- um isomorfismo/mergulho é dito **isométrico** se $\|Tx\|_Y = \|x\|_X, \quad \forall x \in X$

★

Teorema A5.2. *Todos os e.v.n. de dimensão n sobre $\mathbb{K}$ são topologicamente isomorfos entre si.* ◁

Corolário A5.3. *Os $\boxed{\text{e.v.n. de dimensão } n}$ sobre $\mathbb{K}$:*

- *têm todas as $\boxed{\text{normas equivalentes}}$*
- *têm uma única topologia possível*
- *são todos $\boxed{\text{Banach}}$*
- *têm $\boxed{\text{bolas fechadas sempre compactas}}$ (são **localmente compactos**)*

> *Um espaço topológico (X, τ) é dito **localmente compacto** quando para todo $x \in X$ existe $A \in \tau$: $x \in A$ e $\overline{A}$ é compacto. Para e.v.n é equivalente a pedir que $\overline{B_1(0)}$ seja compacta.* ◁

Corolário A5.4. *Subespaços de dimensão finita de um e.v.n são fechados.* ◁

Exercícios: prova dos dois últimos itens do corolário A5.3 e de A5.4. □

Exercícios

Exercício A5.5. Sejam X e Y e.v.n. com $Y \neq \{0\}$:

(i) Mostre que se X tem dimensão finita, então $L(X,Y) = \mathcal{L}_?(X,Y)$.

(ii) Mostre que se X tem dimensão infinita, então existe um funcional linear sobre X não limitado, ou seja, $L(X,Y) \subsetneq \mathcal{L}_?(X,Y)$ ★

A5.0.1 Teorema de Riez

Aula 4

Lema A5.6 [Lemma de Riesz]. *Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ e $M \subsetneq X$ um subespaço vetorial fechado. Então, para cada $\theta \in (0,1)$, existe $y \in X$ tal que*

$$\|y\| = 1 \quad e \quad dist(y, M) := \inf_{x \in M} \|y - x\| \geq \theta.$$

$\lhd$

Teorema A5.7 [Riesz]. *Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ tal que $\bar{B}_1(0) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ é compacta. Então X tem dimensão finita.* $\lhd$

Em um e.v.n. X temos então que $\bar{B}_1^X(0)$ é compacta se e só se X tem dimensão finita.

Equivalentemente:

Temos então que um e.v.n é localmente compacto se e só se tem dimensão finita.

Exercícios

Exercício A5.8. Mostre que se M tem dimensão finita então a desigualdade no Lema também é válida para $\theta = 1$.
Mostre que, em outros casos, ela pode não ser válida com $\theta = 1$ (contra-exemplo em $\mathcal{C}([0,1]; \mathbb{R})$ com a norma uniforme, considere as funções com $f(0) = 0$). ★

Exercício A5.9. Use o Teorema de Riesz para mostrar que se X é um e.v.n. de dimensão infinita e se $K \subset X$ é um compacto, então $K' = \emptyset$. ★

Referências

[Bre11] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011, pp. xiv+599. ISBN: 978-0-387-70913-0.

[Bry85] V. Bryant. *Metric Spaces: Iteration and Application*. First. Cambridge University Press, 1985, p. 112. ISBN: 0521318971.

[Car] A. Carvalho. "SMA5826 Analise I". Em: *Notas de aula - ICMC - USP* ().

[Car07] A. Carvalho. "Notas A.N.C Analise II (2007)". Em: *Notas de aula - ICMC - USP* (2007).

[Che01] W. Cheney. *Analysis for applied mathematics*. Vol. 208. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2001, pp. viii+444. ISBN: 0-387-95279-9. DOI: 10.1007/978-1-4757-3559-8.

[Fol99] G. B. Folland. *Real analysis*. Second. Pure and Applied Mathematics (New York). Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, pp. xvi+386. ISBN: 0-471-31716-0.

[Fri70] A. Friedman. *Foundations of modern analysis*. Holt, Rinehart e Winston, Inc., New York-Montreal, Que.-London, 1970, pp. vi+250.

[Lax02] P. D. Lax. *Functional analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2002, pp. xx+580. ISBN: 0-471-55604-1.

[Muj] J. Mujica. "Notas de análise funcional". Em: *Notas de aula - IMECC - UNICAMP* ().

Lista dos teoremas

Lista dos exercícios