Conteúdo

Objetivo

Apresentar uma definição formal de vetor e propriedades pertinentes. Aula 1

V.1 Introdução

V.1.1 Geometria Euclideana

Euclides de Alexandria ($\sim$ 330 a.c.):
- reconhecido como o primeiro a tentar abordar de uma maneira sistemática o estudo da Geometria Plana: escreveu o livro "Elementos";
- assumiu 5 postulados (axiomas) que não são completos.

David Hilbert (1862-1943, Hilbert's foundations of geometry):
- apresentou novo conjunto de axiomas para a geometria e organizou em cinco grupos:

I. Axiomas de incidência (1–7)
II. Axiomas de ordem (1–5)
III. Axioma das paralelas (de Euclides)
IV. Axiomas de congruência (1–6)
V. Axioma de Continuidade (de Archimedes)

Como definir "ponto", "reta" ou "plano"?

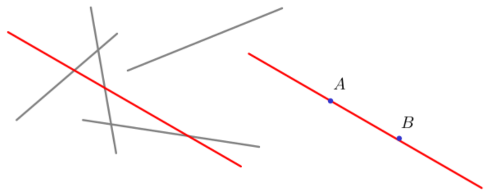
A geometria é baseada em:

Conceitos primitivos (ou termos indefinidos): ponto, reta, plano, pertence a, entre, congruente.

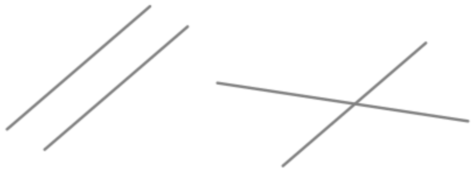
Axiomas: um conjunto simples, completo e independente de postulados.

Termos definidos e afirmações com demonstrações: definição, lema, proposição, teorema, corolário.

Exemplo V.1.1.
Axioma I1. Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

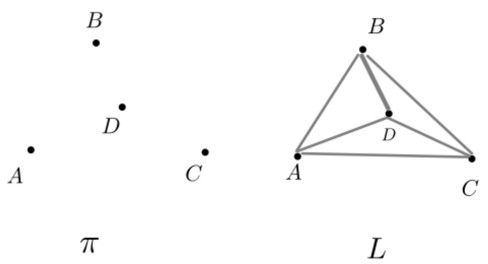


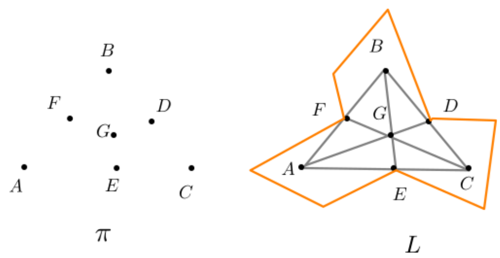
Proposição. *Duas retas distintas se intersectam em no máximo um ponto.*



Exemplo V.1.2 (Modelos de planos e retas). O conjunto π com as retas L satisfazem o Axioma 1:

1. $\pi = \{A, B, C, D\}$ e $L = \{AB, AC, AD, BC, BD, CD\}$.
2. $\pi = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ e $L = \{AFB, BDC, CEA, AGD, BGE, CGF, DEF\}$.





Dizemos que um conjunto de pontos é **colinear** (ou os **pontos são colineares**) se existe uma reta que contém o conjunto.

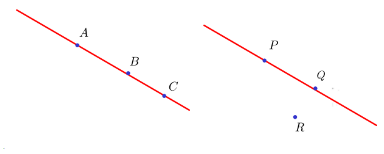
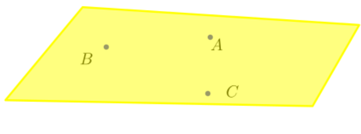
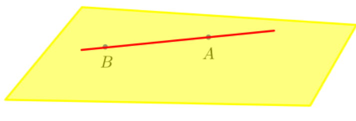


Figura 1: A, B, C são colineares, P, Q, R são não colineares

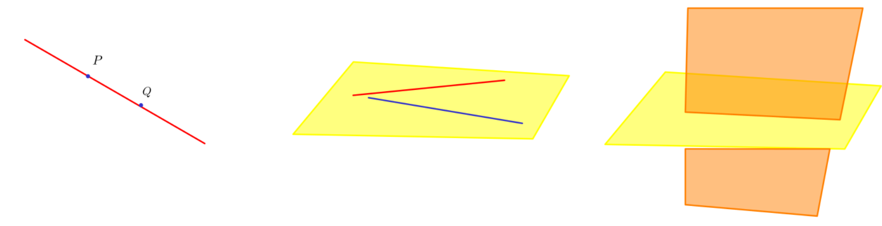
Exemplo V.1.3.
Axioma I4. Dados três pontos não colineares, existe um único plano que os contém.



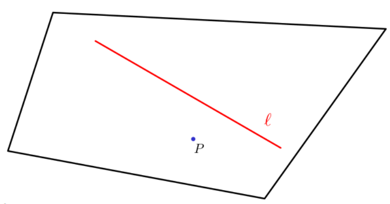
Axioma I5. Se dois pontos distintos pertencem a um plano π, então a única reta que os contém pertence a π.



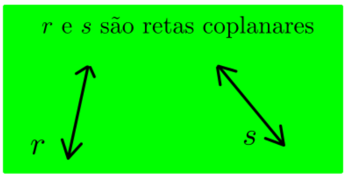
Axioma I7. Em toda reta existem pelo menos dois pontos distintos, e em todo plano existem pelo menos duas retas distintas. Existem pelo menos dois planos distintos no espaço.

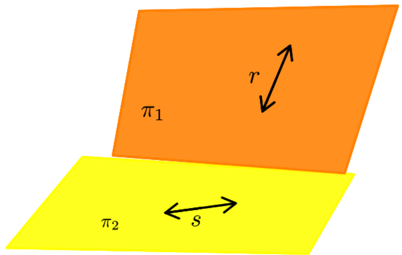


Proposição. *Sejam l uma reta e P um ponto que não pertence a l ($P \notin l$). Então existe um único plano que contém P e l.*



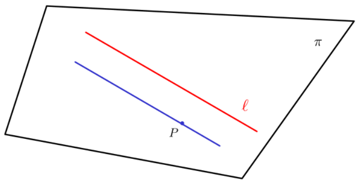
Dizemos que um conjunto de retas é **coplanar** (ou as **retas são coplanares**) se existe um plano que contém o conjunto.



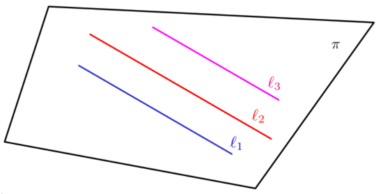


r e s não são coplanares: estão em planos diferentes

Exemplo V.1.4. (**Postulado 5 de Euclides**[1])
Axioma das paralelas. Seja l uma reta, P um ponto com $P \notin l$ e π o único plano que os contém. Existe uma única reta em π que contém P e que é paralela a reta l.



Proposição. *Sejam l_1, l_2, l_3 três retas coplanares. Se l_1 é paralela a l_2 e e l_2 é paralela a l_3, então e l_1 é paralela a l_3.*



Nota: Se o Axioma das paralelas é removido, constrói-se outras Geometrias (não Euclideana), por exemplo[2]:

– Geometria esférica (onde não existem "retas" paralelas),
– Geometria Hiperbólica (onde "retas" paralelas se interceptam).

---

[1] Matemáticos tentaram mostrar que este axioma podia ser deduzido a partir dos outros axiomas.
[2] Bolyai e Lobachevsky

Exemplo V.1.5.
Axioma da continuidade[3]**.** Sejam A e B dois pontos distintos e l a única reta que os contém. Existe uma régua sobre l tal que A corresponde ao número real 0 e B ao número 1.

Podemos identificar a reta (infinita) l com o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$:

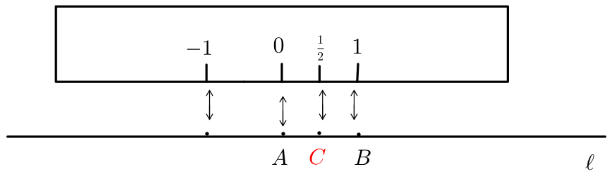


Figura 2: C é definido como o **ponto médio** de AB. $l \approx \mathbb{R}$.

Podemos identificar o plano Euclideano $\mathcal{G}$ com $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

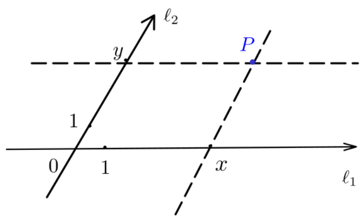
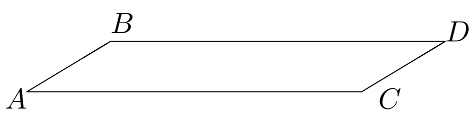


Figura 3: O ponto P está unicamente determinado pelo par (x, y): $\mathcal{G} \approx \mathbb{R}^2$

Dizemos que quatro pontos A, B, C, D formam um **paralelogramo** $ABDC$ se as retas AB e CD são paralelas e as retas BD e AC são paralelas.



---

[3]Hilbert mostrou que pode-se construir a Geometria Euclideana sem usar esse axioma. Mas pode-se mostrar que usando os números reais obtém-se a mesma geometria

V.1.2 Geometria Analítica

Podemos usar as operações algébricas dos números reais para fazer cálculos sobre objetos geométricos.

Por exemplo, uma reta poderá ser representada por uma equação algébrica: o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ que sastisfazem uma relação do tipo

$$y = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

A **Geometria Analítica** é o estudo de "objetos":

retas, planos, curvas, superfícies,

ou no plano ou no espaço Euclideano usando a álgebra.

Neste curso vamos estudar:

1. Vetores
2. Retas e planos
3. Cônicas
4. Superfícies quádricas

Aula 2

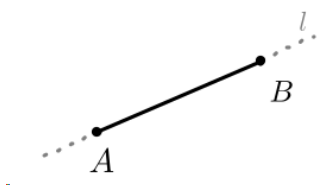
V.2 Vetores

O **conjunto dos pontos no plano** será denotado por E^2.

O **conjunto dos pontos no espaço** será denotado por E^3.

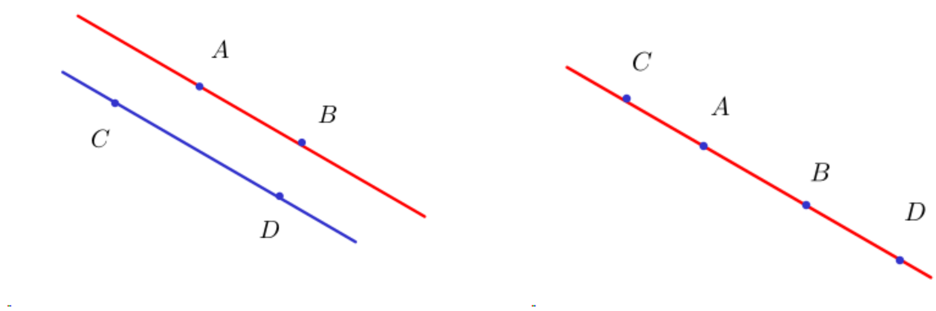
Sejam A, B, C e D pontos distintos em E^n ($n = 2$ ou $n = 3$).

Um **segmento orientado** da reta l será representado por $\overline{AB}$, onde $A, B \in l$, A é a **origem** e B a **extremidade**. A reta l é chamada de **reta suporte**.



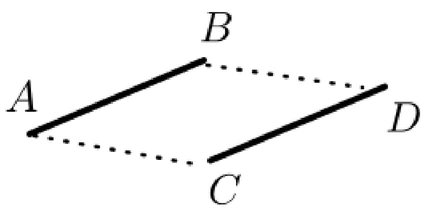
O **comprimento** de um segmento orientado $\overline{AB}$ é a distância $d(A, B)$ entre os pontos A e B.

Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm **mesma direção** se suas retas suportes são *paralelas* (coplanares sem intersecção) ou *coincidentes* (A, B, C, D são colineares).

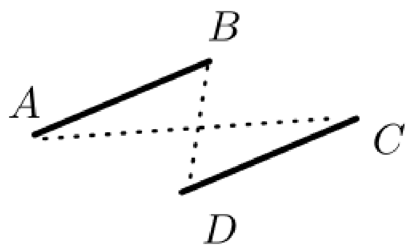


Se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm a mesma direção e:

- as retas suportes de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ **são paralelas**, dizemos que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm **mesmo sentido** se os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ não se interceptam. Caso contrário os segmentos têm sentidos opostos.

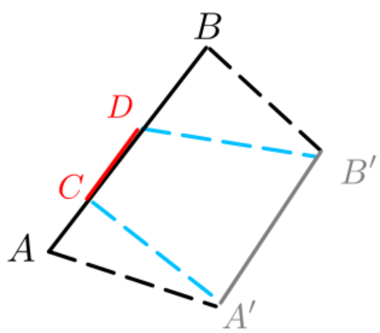


mesma direção e sentido

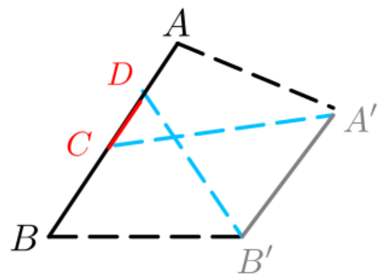


mesma direção, sentido oposto

- as retas suportes de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ **são coincidentes**, então considere uma reta r paralela a reta que contém A, B, C, D, e tome A', B' pontos distintos em r tais que $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ têm mesmo sentido. Dizemos que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm **mesmo sentido** se $\overline{CD}$ e $\overline{A'B'}$ têm mesmo sentido.



mesma direção e sentido



mesma direção, sentido oposto

No conjunto dos segmentos orientados, defina a **relação de equivalência**[4]:

dois segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são **equivalentes** (ou **equipolentes**), usualmente denotado por $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ se:

- $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm o mesmo comprimento
- $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm mesma direção
- $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm mesmo sentido
- ou ambos são segmentos nulos, isto é, $A = B$ e $C = D$.

Definição V.2.1. Um **vetor** $\vec{v}$ é uma classe de equivalência de segmentos orientados, ou seja, um conjunto de segmentos orientados que são equivalentes a um dado segmento orientado.

Dado segmento orientado $\overline{AB}$, a classe de equivalência de $\overline{AB}$, ou seja, o conjunto de todos os segmentos orientados equivalentes a $\overline{AB}$ é um vetor $\vec{v}$, usualmente denotado por $\overrightarrow{AB}$.

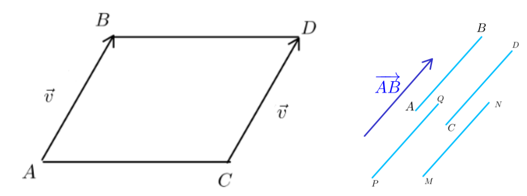
$\overline{AB}$ é um representante da classe de equivalência; $\overrightarrow{AB}$ é um representante do vetor $\vec{v}$

Dois vetores são iguais se possuem representantes equivalentes.

Nota:

1. Se $ABDC$ é um paralelogramo, então $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ representam o mesmo vetor $\vec{v}$.

   Na verdade, existem infinitos segmentos orientados que representam o mesmo vetor, o que motiva a expressão "**um vetor é livre**".



[4]é reflexiva ($a \sim a$), simétrica ($a \sim b \Rightarrow b \sim a$) e transitiva ($a \sim b$ e $b \sim c \Rightarrow a \sim c$)

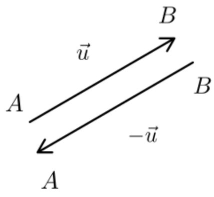
Dado um vetor $\vec{u}$:

- A **norma** ou o **módulo** ou **comprimento** de $\vec{u}$ é o comprimento de qualquer um de seus representantes:

$$\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B);$$

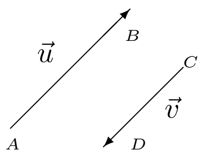
- a **direção** (resp. o **sentido**) de $\vec{u}$ é a direção (resp. sentido) de qualquer um de seus representantes;

- $-\vec{u}$ é um vetor com mesmo módulo e direção de $\vec{u}$ e sentido oposto de $\vec{u}$;

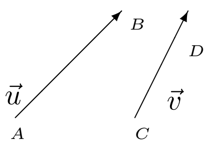


- o **vetor nulo,** $\vec{0}$, é o vetor representado por $\overrightarrow{AA}$ para qualquer ponto A do espaço[5].

- Dois vetores não nulos $\vec{u}$, $\vec{v}$ são **paralelos** se possuírem representantes com a mesma direção. Notação: $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

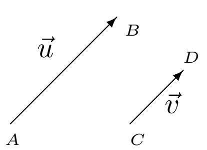


$\vec{u} \parallel \vec{v}$

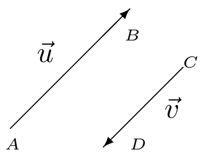


$\vec{u} \nparallel \vec{v}$

- Dois vetores não nulos $\vec{u}$, $\vec{v}$ paralelos possuem o **mesmo sentido** se possuírem representantes com o mesmo sentido. Caso contrário, dizemos que possuem **sentidos opostos**.



$\vec{u} \parallel \vec{v}$ com mesmo sentido



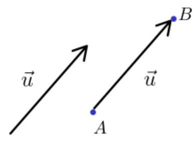
$\vec{u} \parallel \vec{v}$ com sentidos opostos

[5] $\|\vec{v}\| = 0$ se, e somente se, $\vec{v} = \vec{0}$.

O **conjunto de todos os vetores em um plano** será denotado por V^2.

O **conjunto de todos os vetores no espaço** será denotado por V^3.

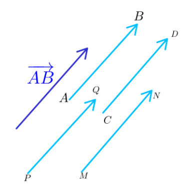
Nota: ($n = 2$ ou $n = 3$)

1. Seja $\vec{u} \in V^n$ e A um ponto de E^n. Então existe um único ponto B em E^n tal que
$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}.$$


2. O vetor nulo $\vec{0}$ é paralelo a qualquer outro vetor.

3. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos. Temos que
$$\vec{u} = \vec{v}$$
se, e somente se,
   - $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos,
   - $\vec{u}$ e $\vec{v}$ possuem o mesmo sentido,
   - $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

$$\overline{AB} \sim \overline{CD} \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

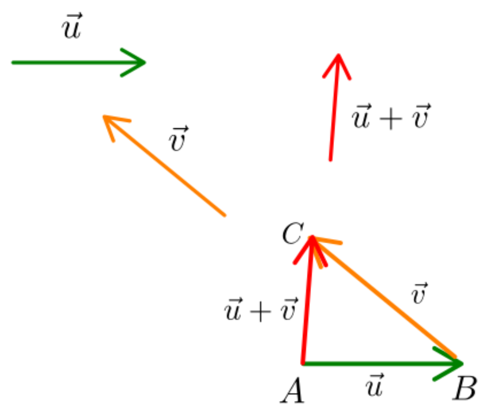


V.2.1 Operações em V^n $(n = 2, 3)$

V.2.1.1 Adição de vetores

Definição V.2.2. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores representados, resp., por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$. O **vetor soma** denotado por $\vec{u} + \vec{v}$ é o vetor representado por $\overrightarrow{AC}$.

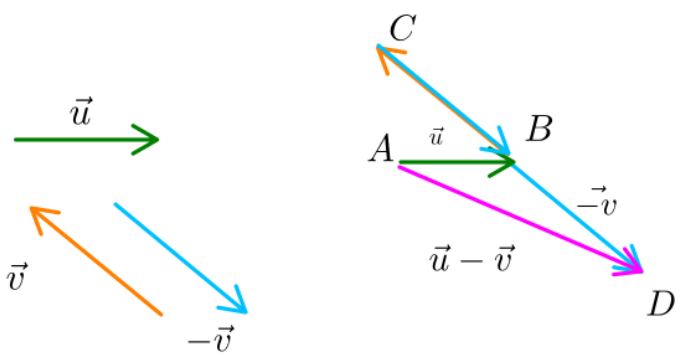
$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} := \overrightarrow{AC}.$$



Regra do triângulo

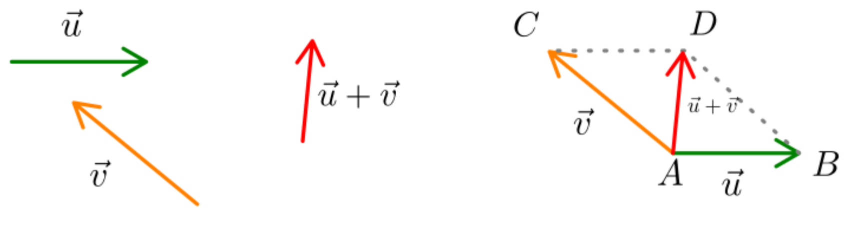
A **diferença, $\vec{u} - \vec{v}$**, é definida por:

$$\vec{u} - \vec{v} := \vec{u} + (-\vec{v})$$



Exemplo V.2.3. (**Regra do paralelogramo**) Se representamos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com a mesma origem:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \text{ e } \vec{v} = \overrightarrow{AC} \Longrightarrow \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}.$$



Exemplo V.2.4. Usando a Regra do Paralelogramo ($\vec{v} = \overrightarrow{AC}$) ou a Regra do Triângulo ($\vec{v} = \overrightarrow{BD}$), obtemos

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD} \qquad \text{e} \qquad \vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{CB},$$

onde $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$, respectivamente.

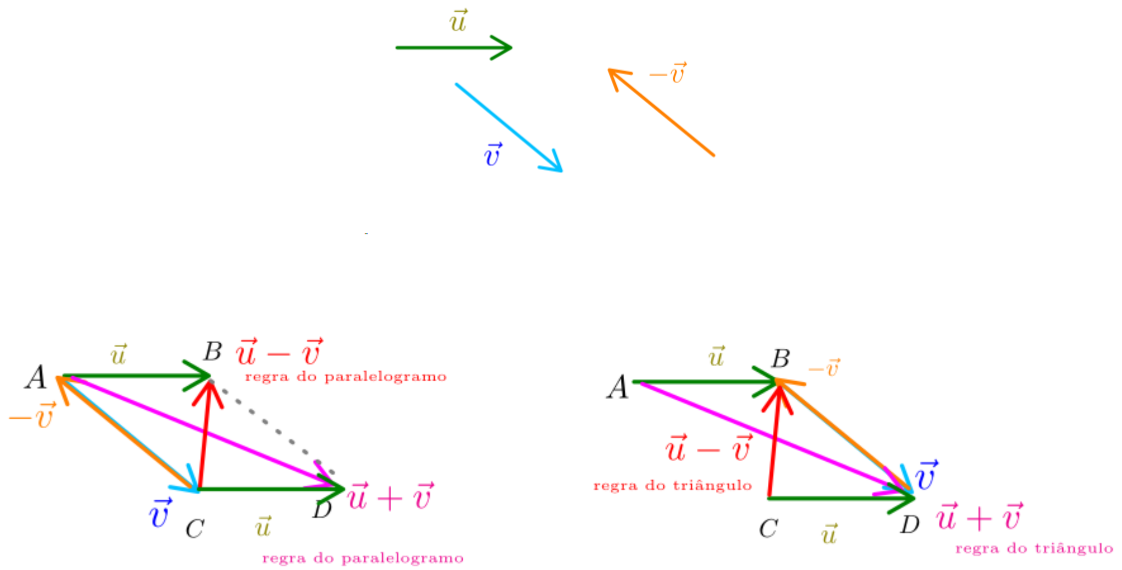


Figura 4: Pela regra do paralelogramo, os vetores soma e diferença são as diagonais de $ABDC$

Propriedades de adição de vetores

Teorema. *Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vetores em V^n. Então*

A1. **Associativa:**
$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w});$$

A2. **Comutativa:**
$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u};$$

A3. **Elemento Neutro:**
$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u};$$

A4. **Elemento Oposto:** *para cada vetor $\vec{u}$, existe um vetor $-\vec{u}$ tal que*
$$\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}.$$

A adição de vetores tem as mesmas propriedades de adição de números reais, o que motiva usar o mesmo símbolo "+" para representar esta operação.

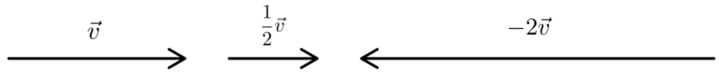
O conjunto V^n munido da adição "+" , ou seja $(V^n, +)$, é um **grupo abeliano (ou comutativo)** (Álgebra).

Exemplo V.2.5. Ver Exercício 1 em Slide de Exercícios.

V.2.1.2 Multiplicação por escalar

Definição V.2.6. Sejam α um número real (um escalar) e $\vec{u}$ um vetor em V^n.

1. Se $\alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$ então $\alpha\vec{u} = \alpha.\vec{u} := \vec{0}$.
2. Se $\alpha \neq 0$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$, o vetor $\alpha\vec{u}$ caracteriza-se por:
   (a) (direção) $\alpha\vec{u}$ é paralelo a $\vec{u}$
   (b) (sentido) $\begin{cases} \text{se } \alpha > 0, \ \alpha\vec{u} \text{ e } \vec{u} \text{ têm mesmo sentido} \\ \text{se } \alpha < 0, \ \alpha\vec{u} \text{ e } \vec{u} \text{ têm sentido oposto;} \end{cases}$
   (c) (comprimento) $\|\alpha\vec{u}\| := |\alpha|\|\vec{u}\|$.



Exemplo V.2.7. Ver Exercício 2 em Slide de Exercícios.

Usualmente $\vec{u} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ é chamado **versor** de $\vec{v}$ e $\vec{u}$ de **vetor unitário**.

Propriedades de multiplicação de vetores por escalar

Teorema. *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ vetores em V^n e α, $\beta \in \mathbb{R}$. Então*

M1. **Associativa:**
$$\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u};$$

M2. **Elemento Neutro:**
$$1\vec{u} = \vec{u};$$

D1. **Distributiva:**
$$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u};$$

D2. **Distributiva:**
$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}.$$

O conjunto V^n munido da adição "+" , e a multiplicação por escalar "." , ou seja $(V^n, +, \cdot)$, é um exemplo de **espaço vetorial real** (Álgebra Linear).

Corolário. *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores em V^n e α, $\beta \in \mathbb{R}$. Então*

1. $\alpha\vec{u} = \beta\vec{v}$ *com* $\alpha \neq 0 \Longrightarrow \vec{u} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\vec{v}$

2. $\alpha(-\vec{u}) = (-\alpha)\vec{u} = -(\alpha\vec{u})$

3. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \Longrightarrow \vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$.

Exemplo V.2.8. Ver Exercícios 3 a 9 em Slide de Exercícios.

Os Exercícios 8 e 9 em Slide de Exercícios nos induzem a um novo conceito: o de dependência linear.
