Análise - SMA380, Ana Peron

- **Programa Resumido:** Sequências e séries numéricas. Continuidade. Diferenciabilidade. Integral de Riemann. Sequências e séries de funções.

- **Objetivos:** Familiarizar o aluno com as técnicas de Análise Matemática.

- **Conteúdo Programático:**

  - Convergência; Critérios para convergência e divergência; Convergência absoluta e condicional de uma série; Reordenação de uma série, Critério de Cauchy e de Dirichlet; *Séries de potências.*
  - Continuidade: Limites de funções reais; Funções contínuas; Funções contínuas em conjuntos compactos; Continuidade uniforme; Descontinuidades.
  - Diferenciabilidade: a derivada e suas propriedades; Teorema do Valor Médio; Fórmula de Taylor; *Continuidade e diferenciação de séries de potências.*
  - Integral de Riemann; Teorema fundamental do cálculo.
  - Sequências e séries de funções; Relação entre convergência uniforme e continuidade; Derivação e integração; Séries de Taylor.

- **Referências:**

  - Elon Lages Lima. Curso de Análise, vol. 1
  - Walter Rudin. Principles of Mathematical Analysis

Conteúdo

A1 Pré-requisitos

A1.1 Propriedades de Conjuntos

Princípio de Indução (fraca)

Seja[1] $U \subseteq \mathbb{N}$ com as propriedades:

- $1 \in U$,
- $\forall\, k \in \mathbb{N}$ vale "se $k \in U$ então $k+1 \in U$".

Então $U = \mathbb{N}$.

Princípio de Indução (fraca) (para afirmações)

Seja $p(n)$ uma afirmação sobre $n \in \mathbb{N}$ tal que

- $p(1)$ é verdade,
- $\forall\, k \in \mathbb{N}$ vale "se $p(k)$ é verdade então $p(k+1)$ é verdade".

Então $p(n)$ é verdade $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Princípio de Indução (forte) (para afirmações)

Seja $p(n)$ uma afirmação sobre $n \in \mathbb{N}$ tal que

- $p(1)$ é verdade,
- $\forall\, k \in \mathbb{N}$ vale "se $p(1)...p(k)$ são verdade então $p(k+1)$ é verdade".

Então $p(n)$ é verdade $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Variantes (outro ponto inicial)

Seja $p(n)$ uma afirmação sobre $n \in \mathbb{N}$ tal que

- $p(n_0)$ é verdade,
- $\forall\, k \geq n_0$ vale "se $p(k)$ é verdade então $p(k+1)$ é verdade".
  (ou "se $p(n_0)...p(k)$ são verdade então $p(k+1)$ é verdade".).

Então $p(n)$ é verdade $\forall\, n \geq n_0$.

[1] Neste curso o conjunto dos naturais $\mathbb{N}$ é entendeido como $\{1, 2, 3, 4, ...\}$: para inclúir o 0 escreveremos $\mathbb{N} \cup \{0\}$

Etapas de uma prova por indução (fraca):

- Provar o **caso base** p(1).
- Provar o **passo de indução**:
  - assumir a **Hipótese de Indução** $p(k)$ [ou $p(1)...p(k)$];
  - provar $p(k+1)$ usando apenas $p(k)$ [ou $p(1)...p(k)$];
- Concluir pelo princípio de indução.

A1.2 Propriedades de Números Reais

A1.2.1 Axiomas de corpo: adição, multiplicação, distributividade. Corpo ordenado. Valor absoluto. Números reais: corpo ordenado completo

A1.2.2 Definições e propriedades de sup, inf

Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$,

- **supremo de A**: $\boxed{\sup A}$ é o menor $S \in \mathbb{R}$ tal que $S \geq a$ para todo $a \in A$; quando A não for limitado superiormente diremos $\sup(A) = +\infty$
- **ínfimo de A**: $\boxed{\inf A}$ é o maior $I \in \mathbb{R}$ tal que $I \leq a$ para todo $a \in A$; quando A não for limitado inferiormente diremos $\inf(A) = -\infty$

  Para indicar inf e sup de imagens, é usual escrever $\boxed{\inf_{x \in D_f} f(x)}$ para indicar $\inf\{f(x) : x \in D_f\}$

-

Propriedade	**Supremo**	**Ínfimo**
Aditividade	$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$	$\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$
Multiplicação $(k > 0)$	$\sup(k \cdot A) = k \cdot \sup(A)$	$\inf(k \cdot A) = k \cdot \inf(A)$
Multiplicação $(k < 0)$	$\sup(k \cdot A) = k \cdot \inf(A)$	$\inf(k \cdot A) = k \cdot \sup(A)$
Monotonicidade	$A \subseteq B \implies \sup(A) \leq \sup(B)$	$A \subseteq B \implies \inf(A) \geq \inf(B)$

A1.3 Propriedades da Topologia da Reta

A1.3.1 Conjuntos abertos, fechados, compactos

A1.3.2 Definição de ponto de acumulação

Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, dizemos que x_0 **é ponto de acumulação de** A (**p.a. de** A) se

$$\forall\, \delta > \mathbf{0}\ \exists\, \mathbf{x} \in \mathbf{A} \text{ com } \mathbf{x} \neq \mathbf{x_0} \text{ tal que } |\mathbf{x} - \mathbf{x_0}| < \delta$$

A2 Sequência numérica real

Sequências numéricas reais são funções de domínio $\mathbb{N}$ [†] e contradomínio $\mathbb{R}$
Usamos diferentes notações:

$$a : N \to A : n \mapsto a(n) = a_n; \qquad \{a_n\}_{n\in N}; \qquad (a_n)_{n\in N}$$

onde $N \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $A \subset \mathbb{R}$:

$$a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \quad a = (a_n)_{n=0}^{\infty} \quad a = \{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$$

- a é sequência
- a_n são os termos da sequência a

Exemplo A2.1.

1. $a_n = n$;
2. $a_n = \frac{1}{n}$;
3. $a_n = (-1)^n$;
4. $a_n = \log(n-2)$;
5. $a_n = 2^n$;
6. $a_n = \ln(1+n)$;

★

A2.1 Definições (análogas a funções)

Seja $a = \{a_n\}_{n\in N}$ uma sequência numérica real.

- **Imagem de a** é o conjunto $\{y \in \mathbb{R} : \ \exists n \in N : \ a_n = y\}$.
- **Gráfico de a** é o conjunto $\{(n, y) \in N \times \mathbb{R} : \ y = a_n\}$. (Ver Geogebra)
- **a é limitada superiormente** se
  existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $a_n < L$ para todo $n \in N$.
- **a é limitada inferiormente** se
  existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $a_n > L$ para todo $n \in N$.
- **a é limitada** se valem ambas:
  existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| < L$ para todo $n \in N$.

[1] †(ou subconjuntos de $\mathbb{N}$, ou de $\mathbb{N} \cup \{0\}$)

- a **é crescente** se $n, k \in N$ e $n < k$ implica $a_n \leq a_k$.
- a **é estritamente crescente** se $n, k \in N$ e $n < k$ implica $a_n < a_k$.
- a **é decrescente** se $n, k \in N$ e $n < k$ implica $a_n \geq a_k$.
- a **é estritamente decrescente** se $n, k \in N$ e $n < k$ implica $a_n > a_k$.
- a **é monótona** se vale uma das anteriores.

Observação A2.2.

1. Em geral, a representação geométrica de uma sequência é feita na reta real.
2. Não confundir a notação de sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ com o conjunto imagem $a(N)$, o qual pode ser finito, por exemplo, se $a_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$:
$$\{1, 1, 1, \ldots\} \qquad a(\mathbb{N}) = \{1\}\,.$$
3. Nem toda sequência pode ser vista como restrição de uma função definida em $\mathbb{R}$.

★

Exemplo A2.3.

1. $a_n = n$;
2. $a_n = \frac{1}{n}$;
3. $a_n = (-1)^n$;
4. $a_n = 1$;
5. $a_n = \dfrac{1}{n!}$; $n \geq 0$
6. $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$; $n \geq 1$

★

A2.2 Limites de sequências

Para sequências, apenas faz sentido a noção de limite para $n \to \infty$, o qual é definido como para funções:

Seja $a : N \to \mathbb{R}$ (com $N \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ não limitado) uma sequência:

- $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$ $(a_n \to L)$ significa[2]

  $\forall\, \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists_{(n_0\,\in\,\mathbb{N})}\ \mathbf{H} \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$ **e** $_{(n\,\geq\,n_0)}$ $\mathbf{n} > \mathbf{H}$ implica $|\mathbf{a_n} - \mathbf{L}| < \varepsilon$

- $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ $(a_n \to +\infty)$ significa

  $\forall\, \mathbf{M} \in \mathbb{R}\ \exists_{(n_0\,\in\,\mathbb{N})}\ \mathbf{H} \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$ **e** $_{(n\,\geq\,n_0)}$ $\mathbf{n} > \mathbf{H}$ implica $\mathbf{a_n} > \mathbf{M}$

- $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ $(a_n \to -\infty)$ significa

  $\forall\, \mathbf{M} \in \mathbb{R}\ \exists_{(n_0\,\in\,\mathbb{N})}\ \mathbf{H} \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$ **e** $_{(n\,\geq\,n_0)}$ $\mathbf{n} > \mathbf{H}$ implica $\mathbf{a_n} < \mathbf{M}$

Definições específicas para sequências:

- seq. **convergente**: se $\lim_{n\to+\infty} a_n$ existe e é finito
- seq. **divergente**: se $\lim_{n\to+\infty} a_n$ é infinito $(= \infty$ ou $-\infty)$
- seq. **oscilante**: se $\lim_{n\to+\infty} a_n$ não existe nem é infinito
- seq. **não convergente**: se $\lim_{n\to+\infty} a_n$ não existe ou é infinito

---

- dizemos que uma propriedade de uma sequência vale **definitivamente** se

  $\exists\, \mathbf{H} \in \mathbb{R}$ tal que se $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$ **e** $\mathbf{n} > \mathbf{H}$ então **a propriedade vale**

- dada uma sequência a de domínio $\mathbb{N}$, seja $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : k \mapsto n_k$ uma seq. estritamente crescente, então a seq. composta

  $a \circ n : k \mapsto a_{n_k}$ é dita subsequência de a

[2] Se a seq. é a valores em $\mathbb{R}^k$ então a definição fica análoga com $L \in \mathbb{R}^k$ e a norma no lugar do módulo.

A2.2.1 Cálculo de limites

Propriedades: valem todas as propriedades dos limites no infinito de funções de variável real (limite da soma, do produto, da razão, teoremas de unicidade do limite, de conservação do sinal, da composta, de comparação e confronto).

CUIDADO: a regra de l'Hôpital não faz sentido para sequências!!

A saber, se $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n \text{ e } \lim_{n\to\infty} b_n \text{ existem}}$, então

- $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$;
- $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$;
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, se $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$;
- se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = M$, **então** $L = M$;
- se $\lim_{n\to\infty} a_n = L > 0$ (resp. < 0), **então** $a_n > 0$ **(resp.** < 0**)** definitivamente;
- (**Composta**) se $a_n \in D_f$ definitivamente, $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ e $\lim_{x\to L} f(x) = M$ **então** $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = M$ [3];
- (**Comparação**) Se $a_n \leq b_n$ definitivamente, **então** $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$;
- (**Confronto**) Se $a_n \leq c_n \leq b_n$ definitivamente e $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$, **então** $\exists \lim_{n\to\infty} c_n = L$.

Exemplo A2.4.

1. (Sequência geométrica)

$$\{q^n\} : \begin{cases} \to 0 & se\ q = 0\ ou\ q \in (-1,1), \\ \to 1 & se\ q = 1, \\ oscila & se\ q \leq -1, \\ \to +\infty & se\ q > 1, \end{cases}$$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-3}{n+1}$

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$ ★

[3] Recíproca não vale: $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ e $a_n = \frac{1}{n\pi}$

Relação com funções: [4]

Teorema A2.5. *Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}^k$ com $\mathbb{N} \subseteq D_f$ e $a_n := f(n),\ n \in \mathbb{N}$.*
Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ **então** $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = L$ $\triangleleft$

Exemplo A2.6.

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n}$
2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ ★

> NOTA: não vale a recíproca: considere $f(x) = \cos(2\pi x)$ e $a_n = f(n)$: assim $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = 1$ enquanto $\nexists \lim_{x\to\infty} f(x)$

Porém vale:

Teorema A2.7. *Seja $f : D_f \to \mathbb{R}^k$, então:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

se e só se

para toda seq. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D_f \setminus \{x_0\}$ *tal que* $a_n \to x_0$ *vale* $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$

$\triangleleft$

Em particular:

Teorema A2.8. *A sequência $\{a_n\}$ converge a L* *se e só se* *toda sua subsequência converge a L*.[5]

$\triangleleft$

Exemplo A2.9.

1. $\lim_{n\to\infty} \left[(-1)^n + \frac{1}{n}\right]$
2. $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ ★

[4] Todas as afirmações aqui valem também se o valor do limite é $\pm\infty$ no lugar de L. **Neste curso** $k = 1$.

[5] $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ se só se $\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = a$.

A2.3 Propriedades novas

Proposição A2.10.

(a) Sequências convergentes são limitadas;

(b) o limite independe dos "primeiros termos": se mudarmos um número finito de termos o limite não muda;

*(c) * Se $\{a_n\}$ é uma sequência crescente então ela converge ou diverge a $+\infty$ (não pode oscilar);*
além disso, $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$.

*(d) * Se $\{a_n\}$ é uma sequência decrescente então ela converge ou diverge a $-\infty$ (não pode oscilar);*
além disso, $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$.

*(* Vale também se for apenas definitivamente crescente / decrescente).*

(e) Em particular, **sequências monótonas e limitadas são convergentes***.*

Exemplo A2.11.

-

O número e

Considere $\boxed{a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ e $\boxed{b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$:
Vale:

- $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- a_n é crescente, b_n é decrescente (parte difícil!);
- logo ambas são limitadas e convergem;
- $b_n - a_n = a_n/n \to 0$, logo o limite é o mesmo.

O limite obtido é o $\boxed{\text{número de Nepero } e}$.[a]

[a] John Napier (Giovanni Nepero, em italiano)

- $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}, \ldots, a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$

★

(f) **Critérios da razão e da raiz para sequências:**

(i) *Se* $a_n \neq 0$ *e* $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$ *(definitivamente) então* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(ii) *Se* $a_n \neq 0$ *e* $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq Q > 1$ *(definitivamente) então* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$

(iii) *Se* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ *(definitivamente) então* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(iv) *Se* $\sqrt[n]{|a_n|} \geq Q > 1$ *(definitivamente) então* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. ◁

Observação. Pedir $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ não é suficiente! ★

(g) **Critérios da razão e da raiz para sequências com limite:**

(i) *Se* $a_n \neq 0$ *(def.) e* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < 1$ *então* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(ii) *Se* $a_n \neq 0$ *(def.) e* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = Q > 1$ *então* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$

(iii) *Se* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1$ *então* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(iv) *Se* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = Q > 1$ *então* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$.

(v) *Se o limite da razão ou o limite da raiz n-ésima for igual a 1, o critério é inconclusivo:*

$$a_n = 1\,; \quad a_n = \frac{1}{n} \text{ ou } \frac{1}{n^2}\,; \quad a_n = n \text{ ou } n^2\,; \quad a_n = (-1)^n$$

Exercício A2.12. Discuta a convergência das sequências

$$a_n = \frac{3^n}{n!}\,, \qquad a_n = \frac{n^n}{n!}$$

★

Observação A2.13.

1. Nem sempre existe $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, mas sempre podemos verificar se $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ é $\leq q<1$ ou $\geq Q>1$.

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n, & n \text{ par}\\ \frac{1}{3}a_n, & n \text{ impar}\end{cases} \qquad a_1=c$$

2. Pode ocorrer de $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ não ser $\leq q<1$ e ainda $a_n\to 0$.

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{n}, & n \text{ par}\\ \frac{1}{n^2}, & n \text{ impar}\end{cases}$$

3. Se $\sqrt[n]{a_n}\to 1^+$ (i.e., $\sqrt[n]{a_n}$ não é $\leq q<1$ definitivamente) , então a_n não converge a 0. ★

A2.4 Sequências definidas por recorrência

Dizemos que uma sequência é **definida por recorrência** quando são dados alguns termos iniciais e uma regra para gerar os termos seguintes.

Possíveis métodos de resolução:

- **Método de iteração**: calcular alguns ternos $--$ > chutar uma fórmula fechada $--$ > verificar a fórmula por indução.
- Recorrência do tipo $a_n=f(a_{n-1})$ podem ser estudadas através do gráfico de f: veja Recorrências em Geogebra.
- Para as "**lineares a coeficientes constantes**":

$$a_n=C_1a_{n-1}+C_2a_{n-2}+\ldots+C_ra_{n-r}+g(n)$$

  existe uma teoria, (veja aqui, pp5-7; compare com a teoria das EDOs lineares a coef. constantes!).

Exemplo A2.14.

(a) $a_1=1,\qquad a_n=2a_{n-1}+1$ para $n\geq 2$

(b) $a_n=\sqrt{2a_{n-1}}$, sendo $a_1=\sqrt{2}$ e $a_1=4$

(c) (Fibonacci) $a_1=1,\ a_2=1,\qquad a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ para $n\geq 3$ ★

A2.5 Limites superior e inferior

Dada uma sequência limitada $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $(|a_n| \leq \alpha)$, definimos:

- $\boxed{\overline{a_n}} := \sup_{k \geq n} a_k$;
- $\boxed{\underline{a_n}} := \inf_{k \geq n} a_k$.

Então $\underline{a_n} \leq \overline{a_n}$, $\overline{a_n}$ é decrescente, $\underline{a_n}$ é crescente, em particular

$$-\alpha \leq \ \underline{a_1} \leq \underline{a_2} \leq \underline{a_3} \ldots \leq \ldots \overline{a_3} \leq \overline{a_2} \leq \overline{a_1} \ \leq \alpha$$

e os limites

$$\lim_{n\to\infty} \overline{a_n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \underline{a_n}$$

sempre existem (finitos).

Definimos

- $\boxed{\limsup_{n\to\infty} a_n} := \lim_{n\to\infty} \overline{a_n}$: **limite superior** (Ls) de a_n .
- $\boxed{\liminf_{n\to\infty} a_n} := \lim_{n\to\infty} \underline{a_n}$: **limite inferior** (Li) de a_n .

Se a sequência $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é limitada superiormente, então $(\overline{a_n} \leq \alpha)$ igualmente podemos definir

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \overline{a_n}. \qquad \text{(finito ou } -\infty)$$

Analogamente, se $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é limitada inferiormente $(-\alpha \leq \underline{a_n})$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \underline{a_n}. \qquad \text{(finito ou } +\infty)$$

Se a sequência não é limitada superiormente, dizemos

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Se a sequência não é limitada inferiormente, dizemos

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Exemplo A2.15.

1. $a_n = \frac{1}{n}$
2. $a_n = n$
3. $a_n = (-1)^n$
4. $a_n = \sin n$ ★

Propriedades: Se $Li = \liminf_{n\to\infty} a_n$ e $Ls = \limsup_{n\to\infty} a_n$ são finitos, então

(i) $\forall\, \varepsilon > 0$ existe $H \in \mathbb{R}$ tal que $n > H \implies a_n \leq Ls + \varepsilon\,;$

(ii) $\forall\, \varepsilon > 0$ existe $H \in \mathbb{R}$ tal que $n > H \implies Li - \varepsilon \leq a_n\,.$

Teorema A2.16. *Dada uma sequência $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, temos que*

(a) $\boxed{\textit{existe } \lim_{n\to\infty} a_n = L}$ *se e só se* $\boxed{\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = L}$

(b) Se a_{n_k} é uma subsequência de a_n então

$$Li = \liminf a_n \leq \liminf a_{n_k} \leq \limsup a_{n_k} \leq \limsup a_n = Ls\,.$$

Logo se uma subsequência é convergente, seu limite L satisfaz $L \in [Li, Ls]$.

(c) Existe uma subsequência que converge a Ls e uma que converge a Li. ◁

APLICAÇÃO

Teorema A2.17 [Teorema de Bolzano-Weiestrass].

Toda sequência limitada $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$ possui subsequência convergente.

◁

Exemplo A2.18. $a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$ ★

A2.6 Sequências de Cauchy

Uma sequência $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$, é dita ser uma **sequência de Cauchy** se

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ existe } H > 0\text{: } p, m > H \implies |a_p - a_m| < \varepsilon$$

Exemplo A2.19. $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ é sequência de Cauchy ★

Teorema A2.20.

(a) Toda sequência de Cauchy é limitada;

(b) uma sequência é convergente se e só se é de Cauchy.

◁

Exercício A2.21. Considere a sequência $a_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

Mostre que, para $k \in \mathbb{N}$, vale $\displaystyle\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq \frac{1}{2}$.

Conclua que a_n diverge. ★

Conteúdo

Lista dos teoremas