

CÁLCULO 4 - SMA356, ANA PERON

- PROGRAMA RESUMIDO: SEQUÊNCIAS E SÉRIES (NUMÉRICAS E DE FUNÇÕES)
- REFERÊNCIAS: GUIDORIZZI, VOL. 4 E [NOTAS DE AULA](#) DA PROF^a JANETE SIMAL
- DATAS DAS PROVAS: P1 07/10; P2 09/12, SÁBADOS, 14H.
1 SIMULADO ANTES DE CADA PROVA: 0.2 PONTO, DATAS A SEREM DIVULGADAS
SUB (FALTA JUSTIFICADA) 14/12, 18H

$$\text{MÉDIA: } \frac{2P1 + 3P2}{5} + NS$$

REC A SER AGENDADA

- ATENDIMENTO:
- SALA 4-226 - ICMC
- WWW.ICMC.USP.BR/PESSOAS/APPERON
- SLIDES DO PROF. [EUGENIO MASSA](#)

Conteúdo

A1	Lembretes/preliminares	A2
	A1.1 Indução	A2
	A1.2 Definição de inf, sup	A4
	A1.3 Definição de ponto de acumulação	A4
A2	Sequências numéricas	A5
	A2.1 Definições (análogas a funções)	A5
	A2.2 Limites de sequências	A6
	A2.2.1 Cálculo de limites	A7
	A2.3 Propriedades novas	A9
	A2.4 Sequências definidas por recorrência	A10
	A2.5 Limite superior e inferior	A11
	A2.6 Sequências de Cauchy	A12

A1 Lembretes/preliminares

A1.1 Indução

Princípio de Indução (fraca)

Seja $U \subseteq \mathbb{N}$ (¹) com as propriedades:

- $1 \in U$,
- $\forall k \in \mathbb{N}$ vale "se $k \in U$ então $k + 1 \in U$ ".

Então $U = \mathbb{N}$.

Princípio de Indução (fraca) (para afirmações)

Seja $p(n)$ uma afirmação sobre $n \in \mathbb{N}$ tal que

- $p(1)$ é verdade,
- $\forall k \in \mathbb{N}$ vale "se $p(k)$ é verdade então $p(k + 1)$ é verdade".

Então $p(n)$ é verdade $\forall n \in \mathbb{N}$

Etapas de uma prova por indução (fraca):

- Provar o **caso base** $p(1)$.
- Provar o **passo de indução**:
 - assumir a **Hipótese de indução** $p(k)$ [ou $p(1)\dots p(k)$];
 - provar $p(k + 1)$ usando apenas $p(k)$ [ou $p(1)\dots p(k)$];
- Concluir pelo princípio de indução.

Exemplos.

¹Neste curso o conjunto dos naturais \mathbb{N} é entendido como $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$: para incluir o 0 escreveremos $\mathbb{N} \cup \{0\}$

Princípio de Indução (forte) (para afirmações)

Seja $p(n)$ uma afirmação sobre $n \in \mathbb{N}$ tal que

- $p(1)$ é verdade,
- $\forall k \in \mathbb{N}$ vale "se $p(1) \dots p(k)$ são verdade então $p(k+1)$ é verdade".

Então $p(n)$ é verdade $\forall n \in \mathbb{N}$

Variante (outro ponto inicial)

Seja $p(n)$ uma afirmação sobre $n \in \mathbb{N}$ tal que

- $p(n_0)$ é verdade,
- $\forall k \geq n_0$ vale "se $p(k)$ é verdade então $p(k+1)$ é verdade".
(ou "se $p(n_0) \dots p(k)$ são verdade então $p(k+1)$ é verdade".).

Então $p(n)$ é verdade $\forall n \geq n_0$.

Exemplo A1.1. Afirmação:

$$p(n) = \text{"} \sum_{i=1}^n i = n(n+1)/2 \text{"}$$

- caso base: vale pois $\sum_{i=1}^1 i = 1 = 1(1+1)/2$.
- passo de indução:
 - assumimos que para certo k vale $\sum_{i=1}^k i = k(k+1)/2$
 - calculemos

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = k+1 + \sum_{i=1}^k i =!! = k+1 + k(k+1)/2 = \quad (\text{A1.1})$$

$$= (k+1)(k+1+1)/2 \quad (\text{A1.2})$$



A1.2 Definição de inf, sup

Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, definimos

- **supremo de A** : $S := \sup A$ é o menor $S \in \mathbb{R}$ tal que $S \geq a$ para todo $a \in A$
quando A não for limitado superiormente diremos $\sup(A) = +\infty$
- **ínfimo de A** : $I := \inf A$ é o maior $I \in \mathbb{R}$ tal que $I \leq a$ para todo $a \in A$
quando A não for limitado inferiormente diremos $\inf(A) = -\infty$

Para indicar inf e sup de imagens, se usa escrever $\inf_{x \in D} f(x)$ (para indicar $\inf\{f(x) : x \in D\}$)

Exemplo A1.2.

$$\inf(0, 1) = \inf[0, 1] = 0; \quad \inf \mathbb{N} = 1, \quad \sup \mathbb{N} = \infty;$$

$$\inf\{1/n : n \in \mathbb{N}\} = 0;$$

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} x^2 - x = -1/4; \quad \inf_{x \in \mathbb{Z}} x^2 - x = 0.$$



A1.3 Definição de ponto de acumulação

Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, dizemos que

x_0 é ponto de acumulação de A se

$$\forall \delta > 0 \exists \mathbf{x} \in A \text{ com } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0 \text{ tal que } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$$

Exemplo A1.3.

- 1 é p.d. acum de $(0, 1)$ e também de $[0, 1]$
- 0 é p.d. acum de $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$
- \mathbb{N} não possui pontos de acumulação
- $(0, 1/2)$ é ponto de acumulação do gráfico de $\sin(1/x) |_{x>0}$



A2 Sequências numéricas

Sequências são funções de domínio \mathbb{N} (ou subconjuntos de \mathbb{N} , ou de $\mathbb{N} \cup \{0\}$).

Usamos diferentes notações:

$$a : N \rightarrow A : n \mapsto a(n) = a_n; \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

onde $N \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$.

- Exemplo A2.1.**
- $a_n = (-1)^n$;
 - $a_n = \ln(1 + n)$;
 - $a_n = n$;
 - $a_n = \log(n - 2)$;
 - $a_n = (\cos(n), \sin(n))$;
 - $a_n = \frac{1}{n}$;
 - $a_n = 2^n$;

[Graficos em Geogebra](#)



A2.1 Definições (análogas a funções)

- **Imagem** é o conjunto $\{a \in A : \exists n \in N : a_n = a\}$.
- **Gráfico** é o conjunto $\{(n, a) \in N \times A : a = a_n\}$.
- é **limitada** se

existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\|a_n\| < L$ para todo $n \in N$.

Se o contradomínio é \mathbb{R} dizemos que a seq. é

- **limitada superiormente** se
existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $a_n < L$ para todo $n \in N$.
- **limitada inferiormente** se
existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $a_n > L$ para todo $n \in N$.
- **limitada** se valem ambas.

- **crescente** se $n, k \in N$ e $n < k$ implica $a_n \leq a_k$.
- **estritamente crescente** se $n, k \in N$ e $n < k$ implica $a_n < a_k$.
- **decrecente** se $n, k \in N$ e $n < k$ implica $a_n \geq a_k$.
- **estritamente decrecente** se $n, k \in N$ e $n < k$ implica $a_n > a_k$.
- **monótona** se vale uma das anteriores.

A2.2 Limites de sequências

Para sequências, apenas faz sentido a noção de limite para $n \rightarrow \infty$, definido como para funções:

Se $a : N \rightarrow \mathbb{R}$ (com $N \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ não limitado)

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ significa²

$$\forall \varepsilon > 0 \exists H \in \mathbb{R} \text{ tal que } n \in \mathbb{N} \text{ e } n > H \text{ implica } |a_n - L| < \varepsilon$$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ significa

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists H \in \mathbb{R} \text{ tal que } n \in \mathbb{N} \text{ e } n > H \text{ implica } a_n > M$$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ significa

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists H \in \mathbb{R} \text{ tal que } n \in \mathbb{N} \text{ e } n > H \text{ implica } a_n < M$$

Definições específicas para sequências:

- seq. **convergente**: se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ existe e é finito
- seq. **divergente**: se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ é infinito ($= \infty$ ou $-\infty$)
- seq. **oscilante**: se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ não existe nem é infinito
- seq. **não convergente**: se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ não existe ou é infinito

-
- dizemos que uma propriedade vale **definitivamente** em uma sequência se

$$\exists H \in \mathbb{R} \text{ tal que se } n \in \mathbb{N} \text{ e } n > H \text{ então a propriedade vale}$$

-
- dada uma sequência a de domínio \mathbb{N} , seja $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : k \mapsto n_k$ uma seq. **estritamente crescente**, então a seq. composta

$a \circ n : k \mapsto a_{n_k}$ é dita **subsequência de a**

²Se a seq. é a valores em \mathbb{R}^k então a definição fica análoga com $L \in \mathbb{R}^k$ e a norma no lugar do módulo.

A2.2.1 Cálculo de limites

Propriedades: valem todas as propriedades dos limites a infinito de funções de variável real (limite da soma, do produto, da razão, da composta, teoremas de unicidade do limite, de conservação do sinal, de comparação e confronto).

CUIDADO: a regra de l'Hôpital não faz sentido para seqüências!!

Um exemplo:

Teorema A2.2 [de confronto].

Considere seqüências $f, g, h : N \rightarrow \mathbb{R}$. Se $f_n \leq g_n \leq h_n$ **definitivamente** e

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = L,$$

então $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = L$

◁

Exemplo A2.3 (Seqüência geométrica).

$$q^n : \begin{cases} \rightarrow 0 & \text{se } q = 0, \\ \rightarrow 1 & \text{se } q = 1, \\ \text{oscila} & \text{se } q = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} \rightarrow \infty & \text{se } q > 1, \\ \rightarrow 0 & \text{se } q \in (-1, 1), \\ \text{oscila} & \text{se } q \leq -1, \end{cases} \quad \star$$

Relação com funções: ³

Teorema A2.4. *Seja $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}^k$ com $\mathbb{N} \subseteq D_f$ e $a_n := f(n) : n \in \mathbb{N}$.*

Se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ então $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ \triangleleft

NOTA: não vale a volta: considere $f(x) = \cos(2\pi x)$ e $a_n = f(n)$:
assim $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ enquanto $\nexists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

Porém vale

Teorema A2.5. *Seja $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}^k$, então:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

se e só se

para toda seq. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D_f \setminus \{x_0\}$ tal que $x_n \rightarrow x_0$ vale $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$

\triangleleft

Em particular

Teorema A2.6. A sequência a_n converge a L se e só se

toda sua subsequência converge a L

\triangleleft

³Todas as afirmações aqui valem também se o limite é $\pm\infty$ no lugar de L .

A2.3 Propriedades novas

- Sequências convergentes são limitadas;
- o limite independe dos "primeiros termos": se mudarmos um número finito de termos o limite não muda.
- Se a_n é uma sequência crescente então ela converge ou diverge a $+\infty$ (não pode oscilar); *
além disso, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
- Se a_n é uma sequência decrescente então ela converge ou diverge a $-\infty$ (não pode oscilar); *
além disso, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
(* Vale também se for apenas definitivamente crescente / decrescente).
- Em particular, **sequências monótonas e limitadas são convergentes**.

O número e

Considere $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$:

Vale:

- $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- a_n é crescente, b_n é decrescente (parte difícil!);
- logo ambas são limitadas e convergem;
- $b_n - a_n = a_n/n \rightarrow 0$, logo o limite é o mesmo.

O limite obtido é o **número de Nepero e** .

• Critérios da razão e da raiz para sequências:

- Se $a_n \neq 0$ e $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$ (definitivamente) então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- Se $a_n \neq 0$ e $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq Q > 1$ (definitivamente) então $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$
- Se $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ (definitivamente) então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- Se $\sqrt[n]{|a_n|} \geq Q > 1$ (definitivamente) então $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$.

• **Crítérios da razão e da raiz para seqüências com limite:**

- Se $a_n \neq 0$ (def.) e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q < 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- Se $a_n \neq 0$ (def.) e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = Q > 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$
- Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = Q > 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$.
- Se o limite da razão ou da raiz n -ésima for igual a 1, o critério é inconclusivo.

Exercício A2.7. Discuta a convergência das seqüências $\frac{3^n}{n!}$ e $\frac{n^n}{n!}$. ★

A2.4 Seqüências definidas por recorrência

Dizemos que um seqüência é **definida por recorrência** quando são dados alguns termos iniciais e uma regra para gerar os seguintes.

Exemplo A2.8.

$$a_1 = 1, \quad a_n = 2a_{n-1} + 1 \text{ para } n \geq 2$$

$$a_1 = 1, \quad a_n = 2na_{n-1} + n^2 \text{ para } n \geq 2$$

$$a_1 = 1, a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ para } n \geq 3 \quad \star$$

Possíveis métodos de resolução

- **Método de iteração:** calcular alguns termos -- > chutar uma formula fechada -- > verificar a fórmula por indução.
- Para as “lineares a coef. constantes”:

$$a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \dots + C_r a_{n-r} + g(n)$$

existe uma teoria, (veja [aqui](#), pp5-7; compare com a teoria das EDOs lineares a coef. constantes!).

- Recorrência do tipo $a_n = f(a_{n-1})$ podem ser estudadas através do gráfico de $f(x)$: veja [Recorrências em Geogebra](#).

A2.5 Limite superior e inferior

Dada uma sequência limitada $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos:

- $\overline{a_n} := \sup_{k \geq n} a_k$;
- $\underline{a_n} := \inf_{k \geq n} a_k$.

Então $\underline{a_n} \leq \overline{a_n}$, $\overline{a_n}$ é decrescente, $\underline{a_n}$ é crescente, em particular

$$\underline{a_1} \leq \underline{a_2} \leq \underline{a_3} \dots \leq \dots \overline{a_3} \leq \overline{a_2} \leq \overline{a_1}.$$

Definimos

- $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{a_n}$: **limite superior** (Ls) de a_n .
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a_n}$: **limite inferior** (Li) de a_n .
- Se a sequência é limitada por cima podemos definir igualmente o lim sup (resp, o lim inf se é limitada por baixo);
Se a sequência não é limitada por cima dizemos $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$
(resp, se a sequência não é limitada por baixo dizemos $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$).

- $\underline{a_n}$ é crescente $\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a_n}$ (se $\underline{a_1} \in \mathbb{R}$) ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a_n} = +\infty$, logo,

$$\blacksquare \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a_n} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \{a_n\} \text{ não é lim. sup. (diverge para } +\infty) \\ \text{ou} \\ -\infty, & \text{se } \{a_n\} \text{ não é lim. inf.} \\ \text{ou} \\ L \in \mathbb{R}, & \text{nos demais casos} \end{cases}$$

- $\overline{a_n}$ é decrescente $\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{a_n}$ (se $\overline{a_1} \in \mathbb{R}$) ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{a_n} = -\infty$, logo,

$$\blacksquare \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{a_n} = \begin{cases} -\infty, & \text{se } \{a_n\} \text{ não é lim. inf. (diverge a } -\infty) \\ \text{ou} \\ +\infty, & \text{se } \{a_n\} \text{ não é lim. sup.} \\ \text{ou} \\ L \in \mathbb{R}, & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

Valem as seguintes afirmações (se Li, Ls finitos):

- $\forall \varepsilon > 0$ existe $H \in \mathbb{R}$ tal que $n > H \implies a_n \leq Ls + \varepsilon$;
- $\forall \varepsilon > 0$ existe $H \in \mathbb{R}$ tal que $n > H \implies Li - \varepsilon \leq a_n$.

Teorema A2.9. *Dada uma seqüência $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, temos que*

- Se a_{n_k} é uma subsequência de a_n então

$$Li = \liminf a_n \leq \liminf a_{n_k} \leq \limsup a_{n_k} \leq \limsup a_n = Ls.$$

Logo se uma subsequência é convergente, seu limite L satisfaz $L \in [Li, Ls]$.

- *Existe uma subsequência que converge a Ls e uma que converge a Li .*

- $\text{existe } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ se e só se $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ◁

APLICAÇÃO

Teorema A2.10 [Teorema de Bolzano-Weiestrass].

v1 Dada uma seqüência limitada $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^k$, sempre existe uma subsequência convergente.

v2 Todo conjunto infinito e limitado em \mathbb{R}^k possui um ponto de acumulação.

◁

A2.6 Sequências de Cauchy

Dada uma seqüência $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^k$, dizemos que é uma **seqüência de Cauchy** se

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ existe } H > 0: p, m > H \implies |a_p - a_m| < \varepsilon$$

Teorema A2.11. • *Toda seq. de Cauchy é limitada;*

- *uma seqüência é convergente se e só se é de Cauchy.*

◁

Exercício A2.12. Considere a sequência $a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$.

Mostre que, para $k \in \mathbb{N}$, vale $\sum_{i=2^{k+1}}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq \frac{1}{2}$.

Conclua que a_n diverge.



Conteúdo

Lista dos teoremas

A1.1	Exemplo (Indução)	A3
A1.2	Exemplo (Inf e Sup)	A4
A1.3	Exemplo (P.to de acumulação)	A4
A2.1	Exemplo	A5
A2.2	Teorema (de confronto)	A7
A2.3	Exemplo (Sequência geométrica)	A7
A2.4	Teorema	A8
A2.5	Teorema (Limite f por sequências)	A8
A2.6	Teorema	A8
A2.7	Exercício	A10
A2.8	Exemplo	A10
A2.9	Teorema (Limsup e liminf)	A12
A2.10	Teorema (Teorema de Bolzano-Weiestrass)	A12
A2.11	Teorema (Seq. de Cauchy)	A12
A2.12	Exercício	A13