Conteúdo

R.1 Conjuntos numéricos **R.1**

R.2 Definição de Corpo **R.3**
R.2.1 Definição de Corpo ordenado R.4

R.3 Definição de inf, sup e completeza **R.6**

R.4 Cortes de Dedekind e o conjunto dos Números Reais **R.7**
R.4.1 Definição e notação de intervalos R.10
R.4.2 Algumas propriedades de números reais R.11

R.1 Conjuntos numéricos

- **Números naturais**

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$

– Soma e produto definidos naturalmente.
– Problemas nas operações inversas!

- **Números inteiros**

$$\mathbb{Z} = \{.., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

– Podemos definir a inversa da soma (contém o "elemento oposto"), não do produto (não contém o "elemento inverso").

- **Números racionais**

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : \ a \in \mathbb{Z}, \ b \in \mathbb{N}; \ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \ \Leftrightarrow ad = cb\right\}$$

– Soma, produto e ordem definidos assim:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$0 \leq \frac{a}{b} \text{ se } a \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \text{ se } 0 \leq \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$$

(e $a \geq b$ significa $b \leq a$)

– Em $\mathbb{Q}$ podemos definir a inversa da soma e do produto e uma ordem:

$(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ é um **Corpo ordenado**....

♡

– Note: Podemos identificar $\mathbb{Z}$ com um subconjunto de $\mathbb{Q}$ de maneira compatível com as operações e a ordem:

$$\mathbb{Z} \ni a \mapsto \frac{a}{1} \in \mathbb{Q}.$$

.... mas $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ é "**completo**"??

$$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}?????$$

– Precisamos: de um conjunto que "estenda"de modo natural $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ e que seja "completo".

♡

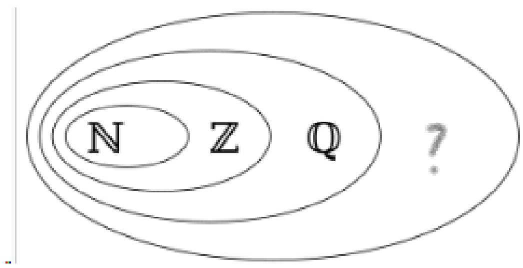


Figura 1: Fonte: Wikipedia

R.2 Definição de Corpo

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$, isto é, um conjunto $\mathbb{K}$ com uma operação $+$ dita *soma* e outra operação $\cdot$ dita *produto*, é um **Corpo** se valem as propriedades:

(S1) (associativa da soma) $(x+y)+w = x+(y+w)$, para quaisquer $x, y, w \in \mathbb{K}$;

(S2) (comutativa da soma) $x + y = y + x$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$;

(S3) (elemento neutro da soma) existe $z \in \mathbb{K}$ tal que $x+z = x$ para todo $x \in \mathbb{K}$;

(S4) (oposto da soma) para todo $x \in \mathbb{K}$ existe $y \in \mathbb{K}$ tal que $x + y = z$;

(P1) (associativa do produto) $(x \cdot y) \cdot w = x \cdot (y \cdot w)$, para quaisquer $x, y, w \in \mathbb{K}$;

(P2) (comutativa do produto) $x \cdot y = y \cdot x$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$;

(P3) (elemento neutro do produto) existe $u \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot u = x$ para todo $x \in \mathbb{K}$;

(P4) (inverso do produto) para todo $x \in \mathbb{K}$ com $x \neq z$, existe $y \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot y = u$;

(D) (distributiva) $(x + y) \cdot w = x \cdot w + y \cdot w$, para quaisquer $x, y, w \in \mathbb{K}$.

Algumas propriedades que seguem das propriedades de corpo:

1. os neutros são únicos (logo indicaremos com 0 e 1);
2. oposto e inverso são únicos (logo indicaremos com $-x$ (ou $\overline{x}$) e x^{-1});
3. $x \cdot 0 = 0$ e $-x = -1 \cdot x$
4. (cancelamento da soma) $x + w = y + w$ implica $x = y$;
5. (cancelamento do produto) $x \cdot w = y \cdot w$ sendo $w \neq 0$ implica $x = y$;
6. (anulamento do produto) $x \cdot w = 0$ implica $x = 0$ e/ou $w = 0$;

Exemplos: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_2$ (corpo)
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_4$ (não corpo)

R.2.1 Definição de Corpo ordenado

Um corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ com uma relação $\leq$ dita *ordem*, é um **corpo ordenado,** $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ se

- valem (S1) – (S4),(P1)–(P4), (D) e também

(O0) (totalidade da ordem): para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$, vale

$$x \leq y \ \text{ e/ou } y \leq x;$$

(O1) (reflexividade da ordem): para qualquer $x \in \mathbb{K}$, vale

$$x \leq x;$$

(O2) (antissimetria da ordem):
se $x, y \in \mathbb{K}$, $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$;

(O3) (transitividade da ordem):
se $x, y, w \in \mathbb{K}$, $x \leq y$ e $y \leq w$ então $x \leq w$;

(OS) (relação soma-ordem):
se $x, y, w \in \mathbb{K}$ e $x \leq y$ então $x + w \leq y + w$;

(OP) (relação produto-ordem):
se $x, y, w \in \mathbb{K}$, $x \leq y$ e $w \geq 0$ então $x \cdot w \leq y \cdot w$.

Algumas propriedades que seguem das propriedades de corpo ordenado:

1. $x \leq y$ e $z \leq w$ implica $x + z \leq y + w$
2. $0 \leq x \leq y$ e $0 \leq z \leq w$ implica $x \cdot z \leq y \cdot w$
3. $w \geq 0$ se e só se $-w \leq 0$;
4. $x \leq y$ e $w \leq 0$ implica $x \cdot w \geq y \cdot w$
5. $0 \leq 1$

Sendo que $x < y$ significa $x \leq y$ com $x \neq y$:

6. $x < y$ e $z \leq w$ implica $x + z < y + w$

7. $z > 0$ e $x < y$ implica $x \cdot z < y \cdot z$

8. $z < 0$ e $x < y$ implica $x \cdot z > y \cdot z$

9. $0 < x < y$ implica $0 < y^{-1} < x^{-1}$ e $-y < -x < 0$

10. $y < x < 0$ implica $x^{-1} < y^{-1} < 0$ e $0 < -x < -y$

11. $x < 0 < y$ implica $x^{-1} < 0 < y^{-1}$

12. $0 < 1$

Exemplos: $\mathbb{Q}$

♡

R.3 Definição de inf, sup e completeza

Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado e $A \subseteq \mathbb{K}$

- ▪ se $x \in \mathbb{K}$ é tal que
$$x \geq a, \quad \forall\, a \in A,$$
então x é dito **cota superior de A**
  ▪ se $x \in \mathbb{K}$ é tal que
$$x \leq a, \quad \forall\, a \in A,$$
então x é dito **cota inferior de A**
- ▪ se existir uma cota superior de A, então dizemos que A é **limitado superiormente**
  ▪ se existir uma cota inferior de A, então dizemos que A é **limitado inferiormente**
  ▪ se ambas as anteriores acontecem dizemos que A é **limitado**
- ▪ **supremo de A** é a menor das cotas superiores de A (se existir)
  ▪ **ínfimo de A** é a maior das cotas inferiores de A (se existir)

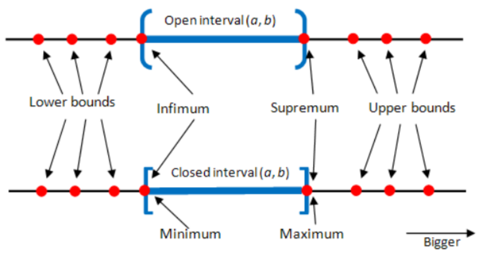


Figura 2: Fonte: internet: Mathematics and Such

Exemplo: Exercício 1 em Slides de Exercícios.

Dizemos que o corpo ordenado $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ é **completo** se todo subconjunto de $\mathbb{K}$ limitado superiormente possui supremo em $\mathbb{K}$ e todo subconjunto de $\mathbb{K}$ limitado inferiormente possui ínfimo em $\mathbb{K}$.

Exemplo: $\mathbb{Q}$ é completo?

R.4 Cortes de Dedekind e o conjunto dos Números Reais

Um **corte de Dedekind** é uma partição (α, B) dos números racionais $\mathbb{Q}$ em dois subconjuntos ($\mathbb{Q} = \alpha \,\dot{\cup}\, B$) tais que:

- $\alpha \neq \emptyset$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$ (**faz com que os conjs. α, B sejam limit. sup./inf.**)
- se $p \in \alpha$ e $q \in \mathbb{Q}$, $q < p$, então $q \in \alpha$ (**todos os racionais a esquerda de p estão em α**)
- se $p \in \alpha$, então existe $q \in \alpha$ tal que $p < q$ (α **não contém o maior elemento**).

Note: α e B se determinam mutuamente, e com isso é comum simplificar a notação (α, B) e chamar apenas α de corte.

Exemplos: 1. $\gamma = \{p \in \mathbb{Q} : p < 2\}$ é corte

2. $\beta = \{p \in \mathbb{Q} : p \leq 2\}$ não é corte

3. $\alpha = \{p \in \mathbb{Q} : p \leq 0 \text{ ou } p^2 < 2\}$ é corte

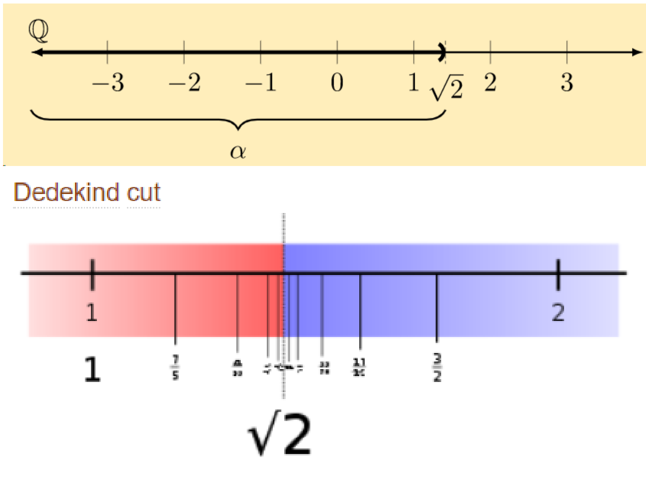


Figura 3: Fonte: Mathematique, internet

O **conjunto de todos os cortes** será denotado por $\mathbb{R}$.

Em $\mathbb{R}$ precisamos definir as operações de soma, produto e uma relação de ordem:

Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definimos:

- **relação de ordem $\leq$** :
  $\alpha \leq \beta$ se, e somente se, $\alpha \subseteq \beta$
- **soma $+$** :
  $\alpha + \beta := \{p = q + r : q \in \alpha, r \in \beta\}$,
  - $\alpha_0 := \{r \in \mathbb{Q} : r < 0\}$ (elemento neutro)
- **produto $\cdot$** :
  - se $\alpha, \beta > \alpha_0$, então

$$\alpha \cdot \beta := \{p \in \mathbb{Q} : p < 0 \textit{ ou } p = qr \textit{ com } q \in \alpha,\ r \in \beta \ \textit{ e } q, r \geq 0\}$$

  - se $\alpha > \alpha_0$ e $\beta < \alpha_0$, então $\alpha \cdot \beta := \overline{\alpha \cdot \overline{\beta}} = -(\alpha(-\beta))$
  - se $\alpha < \alpha_0$ e $\beta > \alpha_0$, então $\alpha \cdot \beta := \overline{\overline{\alpha} \cdot \beta}$
  - se $\alpha < \alpha_0$ e $\beta < \alpha_0$, então $\alpha \cdot \beta := \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$

Teorema. $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *é um* **corpo ordenado completo**.

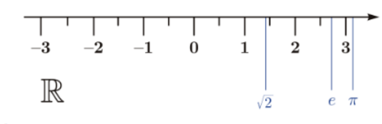


Figura 4: Fonte: Wikipedia

O conjunto $\mathbb{R}$ é chamado de **conjunto dos números reais** e seus elementos (os cortes) de **números reais**.

Nota:

1. Podemos identificar $\mathbb{Z}$ com um subconjunto de $\mathbb{Q}$ de maneira compatível com as operações e a ordem:

$$\mathbb{Z} \ni a \mapsto \frac{a}{1} \in \mathbb{Q}.$$

2. Podemos identificar $\mathbb{Q}$ com um subconjunto de $\mathbb{R}$ de maneira compatível com as operações e a ordem:

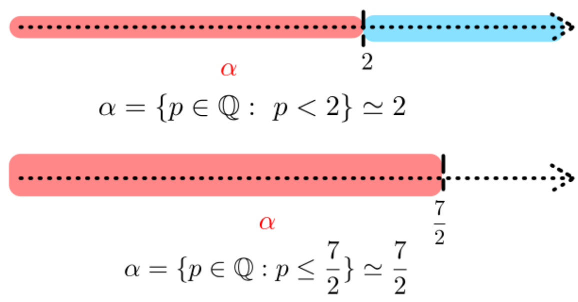
$$\mathbb{Q} \ni r \mapsto \alpha_r := \{q \in \mathbb{Q} : q < r\} \in \mathbb{R}.$$

3. Como $\mathbb{R}$ é completo para qualquer corte de Dedekind (α, B) de $\mathbb{R}$, o conjunto B deve possuir um elemento mínimo b. Assim, devemos ter

$$\alpha = \{x : x < b\}, \qquad B = \{x : x \geq b\}.$$

Neste caso, representamos

$$(\alpha, B) \quad \text{por} \quad b.$$



Exemplo: Exercício 2 em Slides de Exercícios.

R.4.1 Definição e notação de intervalos

Sejam $a < b$ números reais: chamamos de **intervalos em $\mathbb{R}$** os seguintes conjuntos:

- intervalos limitados:
  - $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$: **interv. limitado fechado**
  - $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$: **interv. limitado aberto**
  - $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$: **interv. limitado semifechado (ou semiaberto)**
  - $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$: **interv. limitado semifechado (ou semiaberto)**
- intervalos não limitados:
  - $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$: **semireta fechada**
  - $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$: **semireta aberta**
  - $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$: **semireta fechada**
  - $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$: **semireta aberta**
  - $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$: **reta real**

Exemplo: Exercício 3 em Slides de Exercícios.

R.4.2 Algumas propriedades de números reais

1. Valem todas as propriedades listadas na Seção R.2, em particular:

$$x \geq 0 \ \text{ e } \ y \leq z \Longrightarrow xy \leq xz$$

$$x \leq 0 \ \text{ e } \ y \leq z \Longrightarrow xy \geq xz$$

---

2. O **módulo** de um número real $x \in \mathbb{R}$ é definido por

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Valem as propriedades:

(a) $|x| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

(b) $|x| = 0$ se e somente se $x = 0$

(c) $|x| \leq a$ $(a > 0)$ se e somente se $-a \leq x \leq a$

(d) $|x| \geq a$ $(a > 0)$ se e somente se $x \leq -a$ ou $x \geq a$

(e) **Desigualdade triangular:**

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

(f) $|a| - |b| \leq |a - b|$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$ (tarefa!)

(g) (tarefa!)

$$|\,|x| - |y|\,| \leq |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Exemplo: Exercícios 4 e 5 em Slides de Exercícios.

3. Dado um número real não negativo x, **uma raiz quadrada** de x é um número real y tal que
$$y^2 = x.$$
Todo número real não negativo tem uma única raiz real não negativa chamada de **raiz quadrada principal**[1] e denotada por $\sqrt{\ }$.

Portanto,

(a) $\sqrt{x^2} = |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) $(\sqrt{x})^2 = x$, para todo $x \geq 0$.

Exemplo: Exercício 6 em Slides de Exercícios.

---

[1]usualmente "**a** raiz quadrada" refere-se à raiz quadrada principal