1 Recordando conceitos vistos em Cálculo 2

1.1 Funções de várias variáveis a valores vetoriais

Uma **Funções de várias variáveis a valores vetoriais** é uma função da forma

$$\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad n, k \geq 2.$$

Podemos interpretar de diferentes maneiras: por exemplo

- **Transformações**: o conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ é transformado no novo conjunto $\mathbf{f}(D) \subseteq \mathbb{R}^k$.
- **Mudança de variáveis**: (se $n = k$ e $\mathbf{f}$ é bijetora) o ponto $\mathbf{x}$ de coordenadas $(x_1, .., x_n)$ é representado pelo ponto $\mathbf{y}$ de coordenadas $(y_1, .., y_n)$ onde $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.
- **Campos vetoriais**: a cada ponto $\mathbf{x} \in D$ a função associa um vetor $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^k$. (**link desenho C.V.**)

Valem as mesmas definições do caso de funções a valores reais ($k = 1$): domínio, domínio natural, contradomínio, imagem, sobrejetora, injetora, bijetora, operações, composição, inversa, gráfico... . Veja **material SMA353: Funções aqui**

Para funções a valores vetoriais ($k \geq 2$), podemos considerar as funções componentes

$$f_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto f_i(\mathbf{x}) \quad (i = 1, .., k)$$

tais que

$$\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\ f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), .., f_k(\mathbf{x})\ )$$

e aplicar a elas a teoria das funções a valores reais: limites, continuidade, diferenciabilidade, regras de cálculo, ecc. Veja **material SMA354: funções de várias variaveis 1,2,3 aqui**

Em particular dizemos que **f é contínua (derivável/diferenciável)** em $\mathbf{x} \in D$ se cada uma de suas componentes o é.

Definição: dada $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ e $A \subseteq D$, dizemos que f **é de Classe $\mathcal{C}^k$ em A** (Notação: $f \in \mathcal{C}^k(A)$) se f e todas suas derivadas até a ordem k existem e são contínuas em A.

Lembrete: se f é de classe $\mathcal{C}^1$ em um aberto A então é diferenciável em A.

Definição: Se $\mathbf{f}$ é derivável em $\mathbf{p} \in D$ definimos a **Matriz Jacobiana de f em p:** a matriz $k \times n$

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & .. & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & .. & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ : & .. & & : \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & .. & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{p})\right] : \begin{array}{l} i = 1, .., k, \\ j = 1, .., n \end{array}$$

Observe:

- As colunas de J são as derivadas parciais (vetoriais) de $\mathbf{f}$: $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{p}) : \ j = 1, .., n$
- as linhas de J são os gradientes das componentes de $\mathbf{f}$: $\nabla f_i(\mathbf{p}) : \ i = 1, .., k$

Regra da cadeia para funções a valores vetoriais

Sejam $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^t$ diferenciáveis,
então faz sentido $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^t : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ e vale

$$J_{\mathbf{g}\circ\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{g}}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$$

2 Novos operadores de derivação usados em Cálculo 3

Para campos vetoriais $F : D \subseteq \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, denotamos

$$F(\mathbf{x}) = (\, F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), .., F_n(\mathbf{x})\,), \qquad \mathbf{x} = (x_1, x_2, .., x_n)$$

e podemos definir:
o **divergente** do campo F por:

$$divF(\mathbf{x}) := \sum_{1=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

(outras notações: $divF = \nabla \cdot F$)
(divergente é um campo escalar: $divF : D_{div} \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$).

Para campos vetoriais $F : D \subseteq \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ com $\mathbf{n = 3}$, denotamos

$$F(\mathbf{x}) = (\, F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), F_3(\mathbf{x})\,), \qquad \mathbf{x} = (x, y, z)$$

e podemos definir
o **rotacional** do campo F por:

$$rotF := \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

(outras notações: $rotF = \nabla \wedge F$)
(rotacional é um campo vetorial: $rotF : D_{rot} \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$). .

. . . .

Se $n = 2$, definimos $rotF := \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\widehat{k}$ ou simplesmente $rotF := \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$

. . . .

Lembrete: Produto vetorial: No caso $n = 3$ (e $n = 2$) definimos o produto vetorial de dois vetores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ por:

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Onde usa isso? Eq. de Maxwell

3 Recordando conceitos vistos em Geometria Analítica: exemplos importantes de transformações

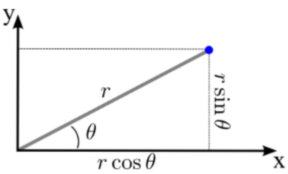
3.1 Coordenadas polares no plano (veja aqui: Math Insight)

Transformação

$$T : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : (r, \theta) \mapsto (\ r\cos(\theta),\ r\sin(\theta)\ )\ :$$

Representamos o ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ como

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$



A matriz Jacobiana é

$$J_T(r, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$det(J_T(r, \theta)) = r$$

Cálculo de r e θ:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta = 2k\pi + \begin{cases} arctg(y/x) & para\ x > 0 \\ arctg(y/x) + \pi & para\ x < 0 \\ \pi/2 & para\ x = 0,\ y > 0 \\ 3\pi/2 & para\ x = 0,\ y < 0 \\ q.q. & para\ x = 0,\ y = 0 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})\,.$$

. . . .

Note: Em geral considera-se a restrição $\theta \in [0, 2\pi)$ para que cada ponto, exceto a origem, tenha uma única representação em coordenadas polares.

. . . .

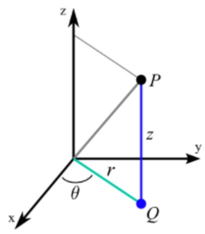
3.2 Coordenadas cilíndricas (veja aqui: Math Insight)

Transformação

$$T : [0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (r, \theta, \tau) \mapsto (\ r\cos(\theta),\ \ r\sin(\theta),\ \ \tau\ )\ \ :$$

Representamos o ponto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ como

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = \tau \end{cases}$$



A matriz Jacobiana é

$$J_T(r, \theta, \tau) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$det(J_T(r, \theta, \tau)) = r$$

Cálculo de r, θ e τ:

$$\tau = z,$$

r e θ como antes.

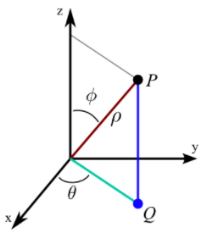
3.3 Coordenadas esféricas (polares no espaço) (veja: Math Insight)

Transformação

$$T : [0,\infty)\times\mathbb{R}\times[0,\pi] \to \mathbb{R}^3 : (\rho,\theta,\varphi) \mapsto (\,\rho\cos(\theta)\sin(\varphi),\ \rho\sin(\theta)\sin(\varphi),\ \rho\cos(\varphi)\,)$$

Representamos o ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ como

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = \rho\cos(\varphi) \end{cases}$$



A matriz Jacobiana é

$$J_T(\rho,\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\sin(\varphi) & -\rho\sin(\theta)\sin(\varphi) & \rho\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) & \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & 0 & -\rho\sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$det(J_T(\rho,\theta,\varphi)) = -\rho^2\sin(\varphi)$$

Cálculo de ρ, θ e φ:

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$\theta \text{ como antes,}$$

$$\varphi = arccos\left(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right).$$

Sugestão de exercícios: Lista 1 do Prof. Eugenio Massa