Este arquivo contém alguns dos exercícios que foram resolvidos ou discutidos durante as aulas. Seus enunciados podem não estar completos e pode ser que durante as aulas importantes comentários sobre as resoluções tenham sido feitos.

1 Integral múltipla em retângulos

1. $\iint_R f$ onde $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $R = [0,1] \times [0,1]$. Resp.: $2/3$
2. $\iint_R f$ onde $f(x,y) = xe^{xy}$ e $R = [0,1] \times [0,1]$. Resp.: $e - 2$
3. $\iiint_R f$ onde $f(x,y) = xyz$ e $R = [0,1] \times [-1,0] \times [0,1]$. Resp.: $-1/8$

2 Integral múltipla em conjuntos limitados

4. A função abaixo é integrável no conjunto D dado:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ \dfrac{1}{x^2+y^2+1}, & y < x \end{cases}$ $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$

   Se f é integrável em D, escreva $\iint_D f dA$ em integrais iteradas.

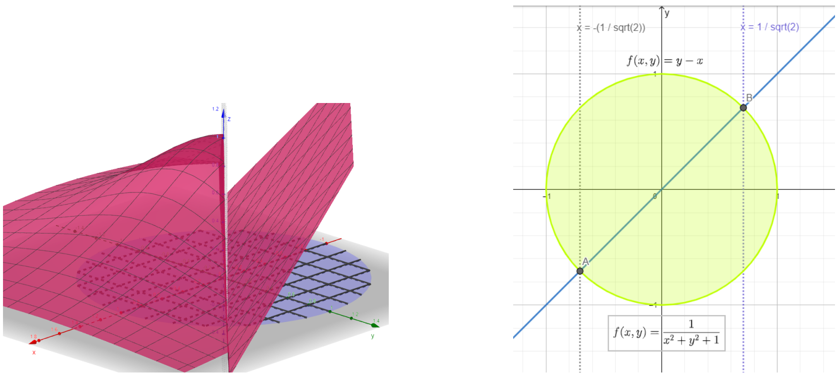


Figura 1: Geogebra, gráfico, Geogebra, domínio

5. Quais alternativas abaixo são corretas:

   (a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^x f(x,y)dydx = \int_0^x\int_0^1 f(x,y)dxdy$

   (b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^x f(x,y)dydx = \int_0^1\int_0^y f(x,y)dxdy$

   (c) $\displaystyle\int_0^1\int_0^x f(x,y)dydx = \int_0^1\int_y^1 f(x,y)dxdy$

   (d) $\displaystyle\int_0^{1/2}\int_{x^2}^{2x} f(x,y)dydx = \int_{x^2}^{2x}\int_0^{1/2} f(x,y)dxdy$

   (e) $\displaystyle\int_0^{1/2}\int_{x^2}^{2x} f(x,y)dydx = \int_0^{1/2}\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dxdy$

   (f) $\displaystyle\int_0^{1/2}\int_{x^2}^{2x} f(x,y)dydx = \int_0^{1/4}\int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy + \int_{1/4}^{1/2}\int_{y/2}^{1/2} f(x,y)dxdy$

6. Seja D o sólido limitado por $y = x^2$, $x = z$, $y = x$ e $z = 0$. Escreva a integral tripla $\displaystyle\iiint_D (x+2y)dV$ em integrais iteradas. (Resp.: $2/15$)

7. Desenhe a região de integração de

$$I = \int_0^3\int_0^{\sqrt{9-z^2}}\int_0^{y/3} z\,dxdydz \quad (= 27/8)$$

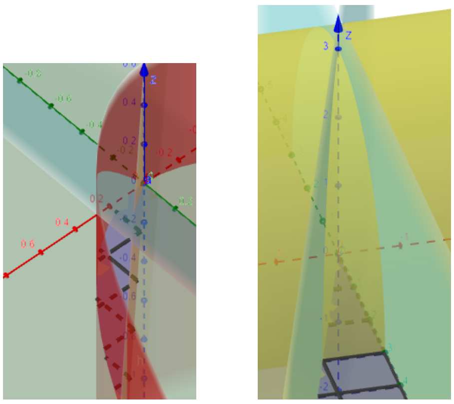


Figura 2: Geogebra (Sólidos dos Ex. 6 e 7)

3 Aplicações de integral múltipla

8. Usando integral dupla, calcule o volume do sólido limitado por $y^2+z^2=4$, $x=2y$, no primeiro octante. (Resp.: $16/3u^3$)

9. Usando integral dupla, calcule a área da região limitada por $x=y^3$, $x+y=2$ e $y=0$. (Resp.: $5/4u^2$)

10. Usando integração tripla, calcule o volume do sólido limitado pelas superfícies $z=x^2+y^2$ e $z=4-x^2-y^2$. (Resp.: $4\pi u^3$)

11. Usando integração, expresse a área da superfície $x^2+y^2+z^2=4$ que está acima do plano $z=1$. (Resp.: $6.26u^2$)

12. Determine a área da superfície $2x+5y+z=10$ que está dentro do cilindro $x^2+y^2=9$. (Resp.: $9\sqrt{30}\pi u^2$)

13. Faça um esboço do sólido cujo volume é dado por

    (a) $\displaystyle\int_0^a\int_0^x \sqrt{a^2-x^2}\,dydx.$

    (b) $\displaystyle\int_0^5\int_0^3 (5-x)\,dydx.$

14. Calcule o volume do sólido no primeiro octante limitado por $x+z^2=1$, $y=x$ e $x=y^2$. (Resp. $\frac{15\pi-32}{120}u^3$)

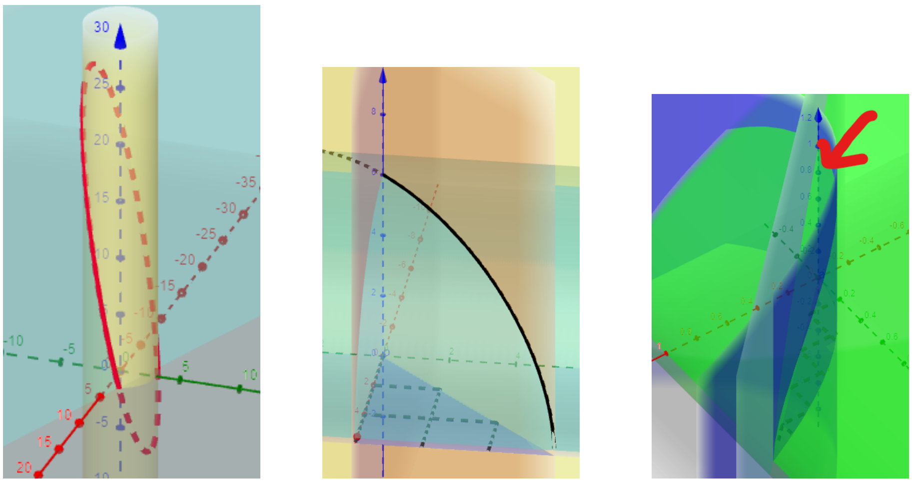


Figura 3: Geogebra (Ex. 12); Geogebra (Ex. 13) Geogebra (Ex. 14)

4 Mudança de variável em integral múltipla

15. Faça uma mudança de variáveis para calcular
$$I = \iint_D e^{(x+y)/(x-y)} dA$$
onde D é a região limitada pelo trapézio de vértices $(1,0),(2,0),(0,-2)$ e $(0,-1)$. (Resp.: $\frac{3}{4}(e-\frac{1}{e})$)

16. Usando integral dupla, expresse a área da região limitada por $r = 1-\sin\theta$. (Resp.: $\frac{3\pi}{2}u^2$)

17. Calcule $\displaystyle\iint_D y dA$, onde D é a região no primeiro quadrante limitada por $x^2+y^2=9$, $y=x$ e $y=0$. (Resp.: $9-\frac{9\sqrt{2}}{2}u^2$)

18. Calcule a área da região limitada por $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$ e $y \geq 0$. (Resp.: $\frac{5\pi}{2}u^2$)

19. Calcule $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy dx$. (Resp.: $\frac{16}{9}$)

20. Calcule o volume do sólido limitado por $z = 10-3x^2-3y^2$ e $z=4$. (Resp.: $6\pi u^3$)

21. Calcule o volume do sólido limitado por $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$, $x+y+z=5$ e pelos planos coordenados. (Resp.: $\frac{25\pi}{4}-\frac{38}{3}u^3$)

22. Esboce o sólido limitado por $\rho=2$, $\rho=4$ e acima de $\varphi=\pi/3$ e expresse seu volume usando integral tripla. (Resp.: $\frac{56\pi}{3}u^3$)

23. Faça um esboço do sólido cujo volume é dado por (Resp.: ver Geogebra)
$$\int_1^3 \int_0^{\pi/2} \int_r^3 r dz d\theta dr$$

24. Expresse o volume do sólido (nas 3 coordenadas) que está dentro da esfera $x^2+y^2+z^2=4$, acima do plano xy e abaixo da superfície $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$. (tarefa! - Resp.: $\frac{8\pi}{\sqrt{3}}$)

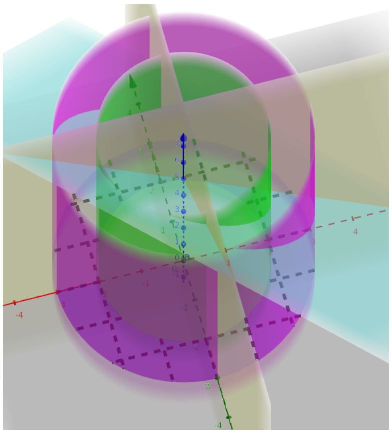


Figura 4: Geogebra (Ex. 21)

5 Curvas

25. Discussão sobre ser simples, fechada, regular, traço e sentido para as curvas:

   (a) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$
   (b) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$
   (c) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$
   (d) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 1)$, $t \in [0, 2\pi]$
   (e) $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$ (cálculo 2 - Aula 10)
   (f) uma parametrização para $y = x^4$ do ponto $(1, 1)$ ao ponto $(0, 0)$
   (g) $\gamma(t) = (t^2, t^3 - 3t)$, $t \in \mathbb{R}$

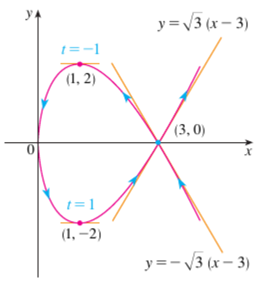


Figura 5: Stewart, Cálculo, vol.2: $\gamma(t) = (t^2, t^3 - 3t)$

6 Integral de linha de função escalar

26. (a) Calcule $\int_\gamma (2+x^2y)ds$, onde γ é a metade superior de $x^2+y^2=1$. (Resp.: $2\pi+\frac{2}{3}$) Atenção: se usarmos a parametrização do círculo dada por $\gamma(t)=(\sin t, \cos t)$, para quais valores de t percorre-se a metade superior do círculo?
    (b) Qual o comprimento da curva γ do item anterior? (Resp.: π)

27. $\int_\gamma 2x ds$, onde γ é dada pelo arco $y=x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$ seguido pelo segmento de $(1,1)$ a $(1,2)$. (Resp.: $\frac{11+5\sqrt{5}}{6}$)

28. $\int_\gamma y^2dx + xdy$, onde γ é:
    (a) o segmento de reta de $(-5,-3)$ a $(0,2)$. (Resp.: $-\frac{5}{6}$)
    (b) o arco de parábola $x=4-y^2$ de $(-5,-3)$ a $(0,2)$. (Resp.: $\frac{245}{6}$)

Revisão e aprofundamento: Integrais duplas e triplas

(24) Expresse o volume do sólido (nas 3 coordenadas: cartesianas, cilíndricas e esféricas) que está dentro da esfera $x^2+y^2+z^2=4$, acima do plano xy e abaixo da superfície $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$. (Resp.: $\frac{8\pi}{\sqrt{3}}$)

29. Considere $\iiint_D z dxdydz$ onde D é o sólido definido pelas desigualdades $x^2+y^2\leq z^2$, $x^2+y^2+z^2\leq 2$ e $z\geq 0$: escrevas as integrais iteradas usando as 3 coordenadas (cartesianas, cilíndricas e esféricas)

30. Calcule $\iint_D (x-y)e^{x^2-y^2}dxdy$, onde D é o retângulo de vértices $(0,0)$, $(1,-1)$, $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ e $(\frac{5}{2},\frac{1}{2})$. (Resp.: $\frac{1}{6}(e^6-7)$)

31. Calcule a área dentro de $r=4\sin\theta$ e fora de $r=2$ (Resp.: $\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}$). Esboce a região no plano xy.

32. Calcule o volume do sólido acima do plano xy, limitado por $z=x^2+4y^2$ e por $x^2+4y^2=4$. (Resp.: 4π)

7 Integral de linha de Campo Vetorial

33. $F(x,y) = (-y,x) = -y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j}$ é um c.v. em $\mathbb{R}^2$

34. $F(x,y,z) = (0,0,z) = z\overrightarrow{k}$ é um c.v. em $\mathbb{R}^3$

35. $F(x,y) = (y^2,x)$,

    (a) o segmento de reta de $(-5,-3)$ a $(0,2)$. (Resp.: $-\frac{5}{6}$)

    (b) o arco de parábola $x = 4 - y^2$ de $(-5,-3)$ a $(0,2)$. (Resp.: $\frac{245}{6}$)

36. $F(x,y) = (y,x)$ e γ dos itens (a) e (b) anteriores. (Resp.: -15)

8 Campo Vetorial Conservativo: independência do caminho

37. Determine se F é um campo vetorial conservativo em A (quais resultados podem ser utilizados em cada item?) e, no caso afirmativo, encontre uma função potencial.

    (a) $F(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$, $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

    (b) $F(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$, $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

    (c) $F(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$, $A = \{(x,y) : y > 0\}$

    (d) $F(x,y) = (2y^2, x+2y)$, $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

    (e) $F(x,y) = (y, x+2y)$, $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

    (f) $F(x,y) = (y, x+2y)$, $A = \mathbb{R}^2$

    (g) $F(x,y,z) = (e^{x+y^2} + zy, 2ye^{x+y^2} + zx, xy + z)$, $A = \mathbb{R}^3$

38. Calcule $\displaystyle\int_\gamma F \cdot dr$, onde:

Sabemos: $F(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$, $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, então $\displaystyle\int_\gamma F \cdot dr = 2\pi$.

(a) $F(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ e $\gamma(t) = (2+\cos t, 3+\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(b) $F(x,y) = (y, x+2y)$ e γ é a semi-circunferência superior do ponto $(0,1)$ ao ponto $(2,1)$.

(c) $F(x,y) = (\cos(xy) - xy\sin(xy), -x^2\sin(xy))$ e γ é o segmento de reta de $(3,\pi)$ a $(2, \frac{\pi}{4})$ (tarefa!! Resp.: 3)

9 Teorema de Green (Gauss, Stokes no plano)

39. Calcular a área da região limitada por $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, onde $a > 0$ e $b > 0$.

40. Calcule $\displaystyle\oint_\gamma F \cdot d\mathbf{s}$, onde $F(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ e:

(a) γ é a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, no sentido anti-horário;

(b) γ é uma curva simples, fechada, regular por partes, orientada positivamente que não contém a origem em seu interior (não enlaça a origem);

(c) γ é uma curva simples, fechada, regular por partes, orientada positivamente que contém a origem em seu interior (enlaça a origem).

(d) γ é uma curva simples, regular por partes de $(1,0)$ a $(2,2)$ sem passar pela origem;

41. Calcule $\displaystyle\oint_\gamma \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$, com γ como nos itens (a)-(d) do exercício anterior.

10 Integrais de superfície de função escalar e de c.v.

42. Calcule $\displaystyle\int_\sigma f(x,y,z)dS$, em que

(a) $f(x,y,z)=\sqrt{1-x^2}$, σ é a parte de $z^2+x^2=1$ que se encontra dentro de $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

(b) $f(x,y,z)=z$, σ é a parte de $z^2=x^2+y^2$ tal que $4z\geq x^2+y^2+3$.

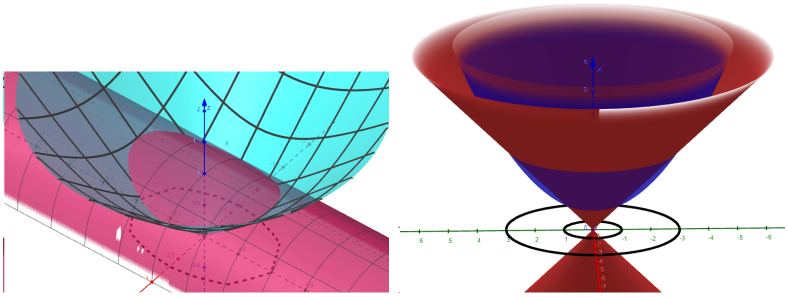


Figura 6: Geogebra

43. Calcule $\displaystyle\int_\sigma F\cdot dS$, onde

(a) $F(x,y,z)=(x,y,z)$ e σ é o cilindro $x^2+y^2=1$, $0\leq z\leq 1$, com normal que aponta para o eixo z.

11 Teorema de Stokes

44. Calcule $\displaystyle\int_\gamma F\cdot d\mathbf{s}$ onde

(a) $F(x,y,z)=x^2y\,\widehat{i}+\frac{1}{3}x^3\,\widehat{j}+xy\,\widehat{k}$ e γ é a curva de intersecção da sela $z=y^2-x^2$ com o cilindro $x^2+y^2=1$ orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

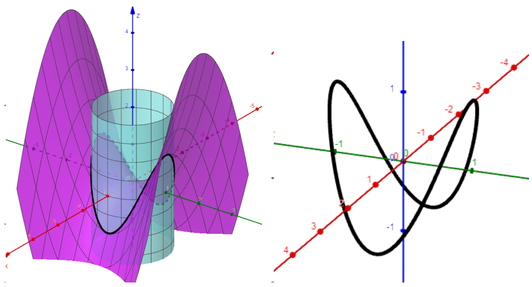


Figura 7: Geogebra

12 Teorema de Gauss

45. Calcule $\displaystyle\int_\sigma F\cdot dS$ onde $F(x,y,z) = \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z)$ e

   (a) σ é uma superfície fechada que não contém a origem em seu interior (não enlaça a origem), orientada com normal exterior.

   (b) σ é a esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$, orientada com normal que se afasta do eixo-z (para fora), orientada com normal exterior.

   (c) σ é uma superfície fechada que contém a origem em seu interior (enlaça a origem), orientada com normal exterior.

Revisão e aprofundamento: Integrais de linha e de superfície

Integrais de linha: revise as definições e propriedades

46. Sejam $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um c.v. de classe C^1, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínua, $\gamma : [a, b] \to A$ curva regular, $\widehat{\mathbf{t}}$ vetor tangente unitário a γ e $\widehat{\mathbf{n}}$ vetor normal unitário a γ. É verdade que: (tarefa para casa!)

(a) $\displaystyle\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$?

(b) $\displaystyle\int_\gamma F \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$?

(c) $\displaystyle\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$?

(d) $\displaystyle\int_\gamma F \cdot d\mathbf{s} = \int_\gamma [F \cdot \widehat{\mathbf{t}}] ds$?

(e) $\displaystyle\int_\gamma F \cdot d\mathbf{s} = \int_\gamma [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}] ds$?

(f) Se $n = 2$ e $F = (P, Q)$, $\displaystyle\int_\gamma [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}] ds = \int_\gamma P dy - Q dx$?

(g) Se $n = 3$ e $F = (P, Q, R)$, $\displaystyle\int_\gamma [F \cdot \widehat{\mathbf{t}}] ds = \int_\gamma P dx + Q dy + R dz$?

(h) $\displaystyle\int_\gamma F \cdot d\mathbf{s} = \int_{-\gamma} F \cdot d\mathbf{s}$?

(i) $\displaystyle\int_\gamma f ds = \int_{-\gamma} f ds$?

(j) Se $n = 2$ e $B \subset \mathbb{R}^2$ um compacto, $\displaystyle\int_{\partial B} F \cdot d\mathbf{s} = \iint_B rot F \cdot \widehat{k}\, dx dy$?

(k) Se $n = 2$ e $B \subset \mathbb{R}^2$ um compacto, $\displaystyle\int_{\partial B} [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}]\, ds = \iint_B div\, F\, dx dy$?

Integrais de superfície: revise as definições e propriedades

47. Sejam $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um c.v. de classe C^1, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínua, $\sigma : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to A$ superfície regular orientada com o campo normal unitário $\widehat{\mathbf{n}}$, e $\gamma : [a, b] \to A$ curva regular. É verdade que: (tarefa para casa!)

(a) Se $\widehat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_t\|}$, vale $\displaystyle\int_\sigma f\, dS = \iint_B f(\sigma(u,v)) \cdot (\sigma_u \wedge \sigma_v) dudv$?

(b) Se $\widehat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_t\|}$, vale $\displaystyle\int_\sigma F \cdot dS = \iint_B F(\sigma(u,v)) \cdot (\sigma_u \wedge \sigma_v) dudv$?

(c) Se $\widehat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_t\|}$, vale $\displaystyle\int_\sigma f\, dS = \iint_B f(\sigma(u,v)) \cdot \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| dudv$?

(d) $\displaystyle\int_\sigma f\, dS$ depende da direção de $\widehat{\mathbf{n}}$?

(e) $\displaystyle\int_\sigma F \cdot dS$ depende da direção de $\widehat{\mathbf{n}}$?

(f) $\displaystyle\int_\sigma F \cdot dS = \int_\sigma [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}] d\sigma$?

(g) $\displaystyle\int_{\partial\sigma} F \cdot d\mathbf{s} = \int_\sigma [rot\, F \cdot \widehat{\mathbf{n}}] d\sigma$?

(h) Se $V \subset A$ é um compacto, $\displaystyle\int_{\partial V} [rot\, F \cdot \widehat{\mathbf{n}}] dS = \iiint_V div\, F dV$?

Campo conservativo

48. Determine se F é um campo vetorial conservativo em A (quais resultados podem ser utilizados em cada item?). Se sim, encontre uma função potencial. Se não, encontre caminhos distintos γ_1 e γ_2 ligando pontos $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in A$ tais que $\displaystyle\int_{\gamma_1} F \cdot d\mathbf{s} \neq \int_{\gamma_2} F \cdot d\mathbf{s}$.

(a) $F(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2} \right)$, $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : y = x, x \geq 0\}$
tarefa para casa!

(b) $F(x,y) = (2y+x, 2x-1)$, $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geq 0\}$ (Resp.: F é c.v.c. Dica: A é simplesmente conexo?)

(c) $F(x,y) = (y+x, y-x)$, $A = \mathbb{R}^2$. (Resp.: F não é c.v.c.)

49. Calcule $\displaystyle\int_\gamma F \cdot d\mathbf{s}$ onde $F(x,y,z) = \left(2xz^3 + 6y, 6x - 2yz, 3x^2z^2 - y^2\right)$ e

(a) * γ é o segmento de reta de $(1,-1,1)$ a $(0,0,0)$ seguido pelo arco de parábola $y = z^2$ de $(0,0,0)$ a $(1,1,1)$. (Resp.: 12). Dica: verifique se pode, por exemplo, mudar o caminho sem que se altere o valor da integral.

(b) $\gamma(t) = (9\cos(t), 4\sin(t), 5), \ \ t \in [0, 2\pi]$. (Resp.: 0)

Teoremas de Green/Stokes e Gauss no plano

50. Considere γ o arco de parábola $y = x^2 - 1$, $-1 \leq x \leq 2$, seguido pelo segmento de $(2,3)$ a $(-1,0)$. Calcule

    (a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{(x,y)}{x^2+y^2}\cdot\widehat{n}\,ds$, onde $\widehat{n}$ é o vetor normal unitário exterior; (Resp.: 2π). Dica: note que $int(\gamma) \not\subseteq dom\,F$: "isole o problema"e use o Teorema de Gauss.

    (b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{(-y,x)}{x^2+y^2}\cdot\widehat{n}\,ds$, onde $\widehat{n}$ é o vetor normal unitário exterior; (Resp.: 0). Dica: $int(\gamma) \not\subseteq dom\,F$

    (c) $\displaystyle\int_\gamma (xe^y, e^{x^2}\cos x)\cdot\widehat{n}\,ds$, onde $\widehat{n}$ é o vetor normal unitário exterior. (Resp.: 0).

51. Calcule $\displaystyle\int_\gamma F\cdot\widehat{n}\,ds$, onde $\widehat{n}$ é o normal com componente $y \geq 0$ e:

    (a) * $F(x,y) = (2x^2y - x\cos y)\,\widehat{i} + (\sin y - 2xy^2 + y)\,\widehat{j}$, $\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t)$, $t \in [\pi/2, \pi]$; (Resp.: π). Dica: o caminho dado não é fechado e o c.v. não é conservativo: feche o caminho escolhendo caminhos convenientes e aplique o Teorema Gauss. Atenção para a orientação do vetor normal! E se $t \in [\pi, 3\pi/2]$??

    (b) $F(x,y) = y^2\,\widehat{i}$, $\quad \gamma(t) = (2\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\pi]$. (Resp.: 0).

Área de superfície

52. Calcule a área da superfície $z = xy$ que se encontra dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e fora do cilindro $x^2 + y^2 = 1$. (Resp.: $\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$).

Integrais de superfície

53. Calcule $\displaystyle\int_\sigma F \cdot dS$, onde

   (a) $F(x,y,z) = (x,y,0)$ e σ é a parte de $z^2 = x^2+y^2-1$, $0 \leq z \leq 1$, com normal que se afasta do eixo z. (Resp.: $\frac{8}{3}\pi$).

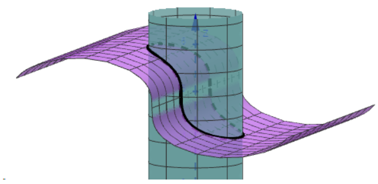
   (b) $F(x,y,z) = (y,x,z)$ e σ é a fronteira do sólido limitado por $z = 1-x^2-y^2$ e $z=0$, com normal que aponta para fora. (Resp.: $\frac{\pi}{2}$) Cuidado para o normal em cada superfície que compõem σ fornecer a orientação pedida!.

Teorema de Stokes

54. Calcule $\displaystyle\int_\gamma F \cdot d\mathbf{s}$ onde

   (a) $F(x,y,z) = e^{-x}\,\widehat{i} + e^{x}\,\widehat{j} + e^{z}\,\widehat{k}$ e γ é a fronteira da parte do plano $2x+y+2z=2$ no primeiro octante orientado com vetor normal para cima. (Resp.: $2e-4$.)

   (b) * $F(x,y,z) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\,\widehat{i} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,\widehat{j} + \sin(1+z^{10})\,\widehat{k}$ e γ é a curva de intersecção de $x^2+y^2=1$ com $z = \sqrt[3]{\sin(y)}+5$ orientada no sentido anti-horário quando vista de cima. (Resp.: 2π. Dica: Note que $int(\gamma) \not\subseteq domF$ (veja Figura 8). Então considere, por exemplo, γ_1 a curva cujo traço é $x^2+y^2=1$ e aplique o Teorema de Stokes na superfície que é a parte do cilindro entre γ e γ_1.)



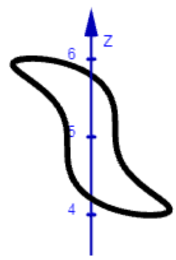


Figura 8: Geogebra

Teorema de Gauss

55. Calcule $\displaystyle\int_\sigma F \cdot dS$ onde

(a) $F(x, y, z) = (x^3, 2xz^2, 3y^2z)$ e σ é a superfície do sólido limitado por $z = 4 - x^2 - y^2$ e pelo plano-xy orientada com normal que se afasta do eixo-z (para fora). (Resp.: 32π)

(b) $F(x, y, z) = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2} + z^2, \dfrac{x}{x^2 + y^2}, xy\right)$ e σ é a fronteira de um sólido contido em $\mathbb{R}^3 - \{\text{eixo-}z\}$, orientada com normal exterior. (Resp.: 0. Dica: $domF$ é fortemente conexo?)

(c) $F(x, y, z) = (xy, y^2 + e^{xz^2}, \sin(xy))$ e σ é a superfície do sólido limitado por $z = 1 - x^2$, $z = 0$, $y = 0$ e $y + z = 0$ orientada com normal que se afasta do eixo-z (para fora). (Resp.: $\frac{184}{35}$.)