Este arquivo contém alguns dos exercícios que foram resolvidos ou discutidos durante as aulas. Seus enunciados podem não estar completos e pode ser que durante as aulas importantes comentários sobre as resoluções tenham sido feitos.[1]

Conteúdo

[1] Caso você encontre algum erro neste arquivo, por favor, reportá-lo para apperon@icmc.usp.br

E.1 Integral Definida

1. Encontre $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\int_0^1 e^{x^2} dx \in [a, b]$.
   Resp.: $a = 1, b = e$

2. Usando interpretação geométrica de integral definida, calcule $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$.
   Resp.: $\frac{\pi}{4}$

3. Verifique que:
   (a) função constante é integrável em qualquer intervalo fechado $[a, b]$
   (b) $f(x) = e^{x^2}$ é integrável em qualquer intervalo fechado $[a, b]$
   (c) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ é integrável em $[-1, 1]$

   Resp.: aplique o Teorema I.1.2 (de integrabilidade das contínuas).

4. Calcule
   (a) $\int (5x - x^2) dx$
   (b) $\int \left(\frac{1}{x^2}\right) dx$.
   (c) $\int \frac{1}{x} dx$.

   Resp.: (a) $5\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + c$; (b) $-\frac{1}{x} + c$; (c) $\ln |x| + c$

5. Calcule, mas antes verifique se a função é integrável no intervalo:
   (a) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) dx$. Resp.:
   (b) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left|x - x^2\right| dx$. Resp.:
6. Encontre o domínio (considerando integral no sentido próprio) da função h e sua derivada h':
   (a) $h(x) = \displaystyle\int_{2}^{x} \frac{\cos^2(t-1)}{\sqrt{t^2+1}} dt$. Resp.:
   (b) $h(x) = \displaystyle\int_{2}^{x} \frac{1}{t} dt$. Resp.:
   (c) $h(x) = \displaystyle\int_{1}^{x^2} \frac{1}{t} dt$. Resp.:
   (d) $h(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x^2} \frac{1}{t} dt$. Resp.:
7. Expresse a área da região R, limitada pelas curvas dadas, de duas formas: usando integração em x e integração em y. Calcule área usando uma das formas.
   (a) $y = x^3$, $x = -1$, $x = 2$, eixo x. Resp.:
   (b) $y = x^2$, $y = 16 - x^2$. Resp.:
   (c) $y = x + 5$, $y = -1$, $y = 2$, $y^2 = x$. Resp.:

E.2 Técnicas de integração

E.2.1 Substituição

Calcule e quando tratar de função determine seu domínio:

8. $\displaystyle\int_{0}^{1} x\cos(x^2) dx$. (Resp.: $\frac{\sin 1}{2}$) $\qquad$ $\displaystyle\int_{0}^{1} xe^{x^2} dx$. (Resp.: $\frac{e-1}{2}$)

9. Sendo f integrável em $[-a, a]$, calcule $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx$ quando f é par e quando f é ímpar. Resp.: $\begin{cases} 0, & \text{se } f \text{ é ímpar} \\ 2\int_0^a f, & \text{se } f \text{ é par} \end{cases}$

10. Quanto vale $\displaystyle\int_{-2}^{-1} x^4 \sin(x^3)dx - \int_{-2}^{1} x^4 \sin(x^3)dx$? Resp.: 0

11. $\displaystyle\int \frac{3\ln(x)}{x\ln^2(3x)}dx$. Resp.: $\begin{cases} 3\ln(\ln 3x) + 3\frac{\ln 3}{\ln 3x} + c, & x \in (\frac{1}{3}, \infty) \\ 3\ln(-\ln 3x) + 3\frac{\ln 3}{\ln 3x} + c, & x \in (0, \frac{1}{3}) \end{cases}$

E.2.2 Integração por partes

12. $\displaystyle\int_1^4 x\ln(x)dx$. Resp.: $8\ln 4 - \frac{15}{4}$; $(\int x\ln x\,dx = \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + c, \quad x > 0)$

13. $\displaystyle\int \arctan(x)dx$. Resp.: $x\arctan(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2} + c, \quad x \in \mathbb{R}$

E.2.3 Integrais trigonométricas

14. $\displaystyle\int \cos^2(x)dx$. Resp.: $\frac{\sin(2x)+2x}{4} + c, \quad x \in \mathbb{R}$

15. $\displaystyle\int \sin^2(x)\cos^{\mathbf{3}}(x)dx$. Resp.: $\frac{\sin^3(x)}{3} - \frac{\sin^5(x)}{5} + c, \quad x \in \mathbb{R}$

16. $\displaystyle\int \tan^{\mathbf{3}}(x)\sec^{\mathbf{4}}(x)dx$. Resp.: $\begin{cases} \frac{\tan^6(x)}{6} + \frac{\tan^4(x)}{4} + c, & x \in I \quad I \text{ intervalo} \\ \frac{\sec^6(x)}{6} - \frac{\sec^4(x)}{4} + c, & x \in I \quad I \subset \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$

E.2.4 Substituição trigonométrica/hiperbólica

17. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$. Resp.: $\frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + c, \quad x \in [-1, 1]$

18. $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx$. Resp.: $\ln(2x+\sqrt{4x^2+1})+c, \quad x\in\mathbb{R}$

E.2.5 Frações Parciais

19. $\displaystyle\int \frac{2x^2-5x-3}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$. Resp.: $2\ln|x+1|-5\arctan(x)+c$

20. $\displaystyle\int \frac{x^5+1}{x^4-x^2}\,dx$. Resp.: $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+\ln|x-1|+c$

21. $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$. Resp.: $\ln|x|+\frac{1}{x^2+1}+c$

22. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+2x+3}\,dx$. Resp.: $\frac{1}{2}\ln|(x+1)^2+2|+\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\frac{x+1}{\sqrt{2}})+c$

E.3 Integrais Impróprias

23. $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx\ (a>0)$. Resp.: ver Slide 3

24. $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x^p}\,dx\ (a>0)$. Resp.: ver Slide 3 *(fazer em casa!)*

25. $\displaystyle\int_a^\infty e^{kx}\,dx\ (a\in\mathbb{R})$. Resp.: ver Slide 3

26. $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$. Resp.: ver Slide 3

27. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$. Resp.: divergente

28. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$. Resp.: convergente

29. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx$. Resp.: divergente

30. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin^3(x)\,dx$. Resp.: convergente

31. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$. Resp.: convergente

32. $\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx$. Resp.: divergente

33. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx$. Resp.: convergente

E.4 Aplicações de integral de Riemann

34. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação ao redor do eixo x da região sob a curva $y=\sqrt{x}$ para $x=0$ até $x=1$. Resp.: $\frac{\pi}{2}$

35. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação ao redor do eixo y da região limitada por $y=2x^2-x^3$, $y=0$. Resp.: $\frac{16\pi}{5}$

36. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação ao redor do eixo y da região limitada por $y=x^3$, $y=8$ e $x=0$. Resp.: $\frac{96\pi}{5}$

37. Considere a região R limitada por $y=x$ e $y=x^2$. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação de R

    (a) ao redor do eixo x; (Resp.: $\frac{2\pi}{15}$)

    (b) ao redor da reta $y=2$. (Resp.: $\frac{8\pi}{15}$)

38. Considere S a superfície obtida pela rotação da curva $y=\frac{1}{x}$, $x\geq 1$, em torno do eixo-x (conhecida como trombeta de Gabriel) e B o sólido obtido pela rotação da região $R=\{(x,y): 0\leq y\leq \frac{1}{x}, x\geq 1\}$ em torno do eixo-x. Determine a área de superfície de S e o volume do sólido B.
    Resp.: $A_S=\infty$ e $V(S)<\infty$

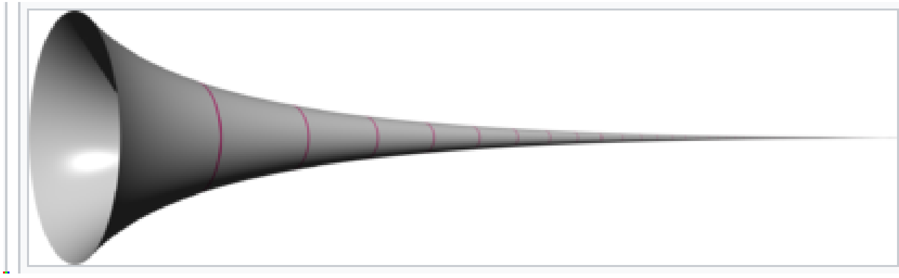


Figura 1: Wikipedia: Trombeta de Gabriel (Gabriel's horn) (leia sobre o "paradóxo do pintor")

E.5 $\mathbb{R}^n$: topologia

39. Determine o conjunto dos pontos interiores, exteriores, fronteiras e de acumulação dos conjuntos:

    (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

    (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x > 0\}$

40. Determine se os conjuntos abaixo são abertos, fechados, limitados:

    (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ Resp.: aberto, não fechado, não limitado

    (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ Resp.: não aberto, fechado, limitado

    (c) $A = B_\delta(p)$, $A = \overline{B_\delta(p)}$, $A = S_\delta(p)$ (bolas aberta e fechada, esfera) Resp.: aberto/não fechado, não aberto/fechado, não aberto/fechado; todos limitados

    (d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x > 0\}$ Resp.: não aberto, não fechado, não limitado

    (e) $A = \mathbb{R}^n$ Resp.: aberto, fechado, não limitado

    (f) $A = \emptyset$ Resp.: aberto, fechado, limitado

E.6 Funções a valores vetoriais - Curvas

41. Determine o domínio de

    (a) $\mathbf{f}(t) = (t, t^2)$. Resp.: $D = \mathbb{R}$

    (b) $\mathbf{g}(t) = (t, t^2, 1)$. Resp.: $D = \mathbb{R}$

    (c) $\mathbf{h}(t) = \left(\frac{1}{t}, t^2, \sin(t)\right)$. Resp.: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

42. $\lim_{t\to 2}(t, t^2)$. Resp.: $(2, 4)$

43. $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}, t^2, \sin(t)\right)$. Resp.: não existe

44. Se $\mathbf{f}(t) = (t, t^2)$, $\mathbf{g}(t) = (t, t^2, 1)$ e $\mathbf{h}(t) = (\cos t^2, e^{t^2})$, $(t \in \mathbb{R})$, então $\mathbf{f}' =?$ e $\mathbf{g}' =?$. Resp.: $\mathbf{f}'(t) = (1, 2t)$, $\mathbf{g}'(t) = (1, 2t, 0)$ e $\mathbf{h}'(t) = (-2t\sin t, 2te^{t^2})$

45. Encontrar a equação vetorial ou paramétrica de uma curva cujo traço coincide com: (GraphSketch.com - GeoGebra 2D)

 (a) $x^2 + y^2 = 4$

  (a.1) uma volta no sentido anti-horário Resp.: $\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

  (a.2) duas voltas no sentido horário Resp.: $\gamma(t) = (2\sin t, 2\cos t)$, $t \in [0, 4\pi]$ OU $\gamma(t) = (2\cos t, -2\sin t)$, $t \in [-4\pi, 0]$

 (b) $x^3 = y^2$ Resp.: $\gamma(t) = (t^{2/3}, t)$, $t \in \mathbb{R}$

 (c) segmento de reta de $(2, 5)$ a $(1, 0)$: *tarefa!* Resp.: $\gamma(t) = (-t, -5t - 5)$, $t \in [-2, -1]$

46. Considere a curva $\gamma : [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^\alpha, \cos(\pi t))$, onde $\alpha \in [0, 2]$ é um parâmetro.

   (a) estudar o traço de γ Geogebra

   (b) Para quais valores de α a curva é regular? Para quais valores de α a curva é simples? Resp.: γ é regular e simples para $\alpha \in (0, 2]$

   (c) Escolha um α entre os determinados no ponto (b) e determine a reta tangente ao traço da curva num ponto da forma $P = (x_0, -1)$; em seguida calcule γ'' para o mesmo ponto e represente tudo num desenho. Destaque uma propriedade que os vetores γ' e γ'' satisfazem. *tarefa!*
   Resp.: Por exemplo, para $\alpha = 1$: $x_0 = t_0$ e $\cos(\pi t_0) = -1$ para $t_0 = 1$, assim uma equação da reta tangente pedida é: $r(t) = \gamma(1) + t\gamma'(1) = (1, -1) + t(1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$; $\gamma''(1) = (0, \pi^2)$ e $\gamma'(1) \perp \gamma''(1)$

Você pode visualizar outros exemplos de funções a valores vetoriais e curvas em: Geogebra 1 - Prof. Massa ou Geogebra 2 - Prof. Massa.

E.7 Funções de várias variáveis

47. Encontre e esboce o domínio da função f dada por[2]:(GeoGebra 2D)

   (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ Resp.: $D = \mathbb{R}^2$

   (b) $f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ Resp.: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ (interior do círculo)

   (c) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ Resp.: $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ (interior do cilindro)

48. Esboce o gráfico da função f dada por[1] (determine antes de tudo o domínio): (GeoGebra 3D)

   (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ Resp.: parabolóide circular

   (b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ Resp.: cone

   (c) $f(x, y) = y^2 - x^2$ Resp.: sela

   (d) $f(x, y) = |x|$

   (e) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ Resp.: semi-esfera (ver aqui)

[2] os desenhos foram feitos em sala de aula

49. Esboce conjuntos de nível da função f dada por[1] (determine antes de tudo o domínio):

(a) $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$ Resp.: $k = 0$: ponto (0,0), $k > 0 : 4x^2 + 9y^2 = k$ elipses

(b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ Resp.: $k > 0 : x^2 + y^2 = 1/k$ circunferências

(c) $f(x,y) = e^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ Resp.: $k > 1 : x^2 + y^2 = 1/\ln k$ circunferências

(d) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ *tarefa!* Resp.: $k = 0 : |x| = |y|$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : y^2 - x^2 = k^2$ hipérboles que interceptam eixo-x

(e) $f(x,y) = |x|$ Resp.: $k = 0$: eixo-y, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : |x| = k$ duas retas verticais

(f) $f(x,y) = y^2 - x^2$ Resp.: $k = 0 : |x| = |y|$, $k > 0 : y^2 - x^2 = k$ hipérboles que interceptam eixo-y, $k < 0 : y^2 - x^2 = k$ hipérboles que interceptam eixo-x

(g) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ Resp.: $k = 0$: eixo-z, $k > 0 : x^2 + y^2 = k$ cilindros

(h) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ Resp.: $0 \leq k < 2 : x^2 + y^2 = 4 - k^2$ circunferências, $k = 2$: ponto (0,0), (ver aqui)

Você pode visualizar outros exemplos de funções de várias variáveis e ver como gerar várias curvas e superfícies de nível, respectivamente em, Funções-Prof.Massa, Curva-Prof.Massa, Superfície-Prof.Massa,

E.8 Limites e continuidade

50. Verifique, usando a definição, que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} x = a$.

Resp.: basta tomar $\delta = \varepsilon$.

Calcule ou determine que o limite não existe:

51. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} (2x^2 + 5y)$. Resp.: 5

52. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x + y}$. Resp.: 0

Atenção: Não aplicaremos "Regra de L'Hôpital" para funções de várias variáveis: uma regra foi recentemente provada e cobre vários casos de indeterminação do tipo 0/0. Apesar de não ser tão complicada, também não é tão "simples" como aquela para o caso de funções de uma variável: deve-se tomar bastante **cuidado para ter todas as hipóteses satisfeitas** para então poder usar o resultado. A regra está provada no artigo de Gary R. Lawlor (2020): L'Hôpital's Rule for Multivariable Functions, The American Mathematical Monthly, 172:8, 717-725.

---

53. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2-y^2)}{x^2-y^2}$. Resp.: 1

54. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \cos(xy-2)$. Resp.: 1

55. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 y \sin\left(\dfrac{1}{y}\right)$. Resp.: 0

56. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$. Resp.: 0

57. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Resp.: 0

58. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$. Resp.: não existe

59. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$. Resp.: não existe

60. $\lim\limits_{||(x,y,z)||\to\infty} (x^2+y^2)$ Resp.: não existe

Tarefa: Troque a função f em Geogebra 3D Classic para visualizar: o gráfico da função f envolvida no limite dos exercícios 51 a 57, alguns caminhos e a imagem desses caminhos por f. Faça um análogo do exercício 58 para função de duas variáveis: $\lim\limits_{||(x,y)||\to\infty} x^2$ (neste caso também é possível visualizar no Geogebra).

61. Determine se a função f é contínua no ponto $\mathbf{p}$ dado:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\quad \mathbf{p} = (0,0)$

Resp.: f não é contínua em $\mathbf{p}$; f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\quad \mathbf{p} = (0,0)$

Resp.: f é contínua em $\mathbf{p}$; f é contínua em $\mathbb{R}^2$

E.9 Derivadas parciais

62. Encontre as derivadas parciais e seus domínios:

(a) $f(x,y) = x^2 + \cos(x^5y^3)$

Resp.: $f_x(x,y) = 2x - 5x^4y^3\sin(x^5y^3)$; $f_y(x,y) = 3x^5y^2\sin(x^5y^3)$; $D_{f_x} = D_{f_y} = \mathbb{R}^2$

(b) $f(x,y) = \sqrt{xy}\sin(xy)$

Resp.: $f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{y\sin(xy)}{2\sqrt{xy}} + y\sqrt{xy}\cos(xy), & xy > 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$; $f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin(xy)}{2\sqrt{xy}} + x\sqrt{xy}\cos(xy), & xy > 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$;

$D_{f_x} = D_{f_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$

63. Encontre as derivadas parciais de segunda ordem de $f(x,y) = x^3y + e^{y^2}$.

Resp.: $f_{xx}(x,y) = 6xy$, $f_{xy}(x,y) = 3x^2$, $f_{yy}(x,y) = 4y^2e^{y^2}$, $f_{yx}(x,y) = 3x^2$

64. Discutir sobre a continuidade de f em $(0,0)$ e se as derivadas parciais de f existem em $(0,0)$.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\quad$ (Ex. 61-(b))

Resp.: f é contínua em $(0,0)$ e $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Resp.: $f_y(0,0) = f_x(0,0) = 0$ e f não é contínua em $(0,0)$.

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (Ex. 61-(a)) *tarefa!!!*

Resp.: f não é contínua em $(0,0)$ e $\nexists f_y(0,0)$ e $f_x(0,0) = 0$.

E.10 Diferenciabilidade

65. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2-y^2}, & |x| \neq |y| \\ 0, & |x| = |y| \end{cases}$ $\quad \mathbf{p} = (1,1)$.

Resp.: f não é diferenciável em $\mathbf{p}$ (f não é contínua em $\mathbf{p}$ ou $\nexists f_x(\mathbf{p})$)

66. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\quad \mathbf{p} = (0,0)$

Resp.: f é diferenciável em $\mathbf{p}$: $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E_{(0,0)}(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

67. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $\quad \mathbf{p} = (0,0)$.

Resp.: f não é diferenciável em $\mathbf{p}$, é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{p}\}$

68. $f(x,y) = 3x - xy^2$ Resp.: f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$

69. Considere $f(x,y) = \sqrt{x+2y}$.

(a) encontre a diferencial de f em $\mathbf{p} = (a,b)$: $\quad df_{\mathbf{p}}(h,k)$

Resp.: $df_{\mathbf{p}}(h,k) = \frac{h}{2\sqrt{a+2b}} + \frac{k}{\sqrt{a+2b}}$ para $\mathbf{p} \in D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+2y > 0\}$

(b) use a diferencial de f para encontrar um valor aproximado para $\sqrt{4.02}$

Resp.: Como f é diferenciável em D, use por exemplo, $p = (4,0) \in D$, $(h,k) = (0,0.01)$ (ou $(h,k) = (0.02,0)$) e o fato de $f(a+h,b+k) \approx f(a,b) + df_p(h,k)$: $\sqrt{4.02} \approx 2.005$

E.11 Derivada direcional

70. Considere $f(x,y) = 3xy - 2e^{xy}$. Qual a derivada direcional de f no ponto $(1,0)$ na direção $\overrightarrow{v} = (-1,3)$?
Resp.: $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}/||\overrightarrow{v}||$ e $D_{\overrightarrow{u}}f(1,0) = 3/\sqrt{10}$

71. A temperatura nos pontos de uma placa retangular no plano xy (medida em metros) é dada por $T(x,y) = x^2 - 2xy$ (^oC).

    (a) Encontre a taxa de variação da temperatura no ponto $(1,2)$ na direção e sentido do vetor $\overrightarrow{v} = (1,1)$. E se $\overrightarrow{v}_1 = (0,1)$?
    Resp.: a partir do ponto $(1,2)$: na direção e sentido de $\overrightarrow{v}$, a temperatura decresce a uma taxa de $2\sqrt{2}\ ^oC/m$; na direção e sentido de $\overrightarrow{v}_1$, a temperatura decresce a uma taxa de $2\ ^oC/m$;

    (b) Encontre a direção, sentido e valor de maior taxa de variação em $(1,2)$.
    Resp.: a partir do ponto $(1,2)$, a temperatura cresce mais rapidamente na direção e sentido de $\nabla T(1,2) = (-2,-2)$ e o valor máximo da taxa de variação é $\sqrt{8}\,^oC/m$. Observe que a taxa de variação é mínima na direção e sentido oposto de $\nabla T(1,2)$, ou seja, a mesma do vetor $\overrightarrow{v} = (1,1)$, e o valor mínimo da taxa de variação é $-2\sqrt{2}\,^oC/m$.

E.12 Plano tangente

72. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, gráfico - plano

    (a) gráfico de f possui plano tangente em $P = (0,0,f(0,0))$?

    (b) gráfico de f possui plano tangente em $P = (2,0,f(2,0))$? *Tarefa!*

Resp.: (a) $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 0$; o plano $z = \pi(x,y) = 0$ existe, mas não é o plano tangente tangente ao gráfico de f no ponto em P: $(graf(f) \cap (y = x))$ é a curva $\gamma(t) = (t,t,\frac{1}{2})$ cuja reta tangente tem equações paramétricas $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = \frac{t}{2} \end{cases}$ a qual não está contida no plano $z = 0$. f não é diferenciável em $(0,0)$!! (veja o que ocorre com a função do Trabalho 6)
(b) f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e o plano tangente é $z = \pi(x,y) = \frac{1}{2}y$

E.13 Regra da Cadeia

73. $f(x,y,z) = x^2y^3z^4$ é diferenciável? $f'(x,y,z) =?$
Resp.: $f'(x,y,z) = (2xy^3z^4, 3x^2y^2z^4, 4x^2y^3z^3)$

74. $f(x,y) = (x^2, y^3, xy)$ é diferenciável? $f'(x,y) =?$
Resp.: $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 3y^2 \\ y & x \end{pmatrix}$

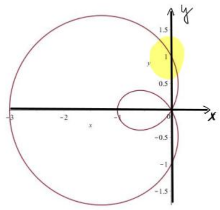
75. Seja $F = f(x,y)$, onde $x = t^3$, $y = e^{2t}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável dada. Calcule $F' = \dfrac{dF}{dt}$. *Tarefa!*
Resp.: $F'(t) = 3t^2\frac{\partial f}{\partial x}(t^3, e^{2t}) + 2e^{2t}\frac{\partial f}{\partial y}(t^3, e^{2t})$

76. Seja $F(u,v) = f(ue^{2uv}, 2v-u)$, onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável dada. Calcule $\dfrac{\partial F}{\partial u}$. *Tarefa!*
Resp.: $\dfrac{\partial F}{\partial u} = e^{2uv}(1+2uv)\frac{\partial f}{\partial x}(ue^{2uv}, 2v-u) - \frac{\partial f}{\partial y}(ue^{2uv}, 2v-u)$

77. Seja $F(r,\theta) = f(x,y)$, onde $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável dada. Verifique que
$$f_y(x,y) = \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) + \sin\theta\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta).$$
Resp.: Calcule F':
$(F_r\ F_\theta) = (F'(r,\theta))_{1\times 2} = (f'(r\cos\theta, r\sin\theta))_{1\times 2}\cdot\left(\frac{\partial(r\cos\theta, r\sin\theta)}{\partial(r,\theta)}\right)_{2\times 2} = (f_x\ f_y)\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$

E.14 Derivação implícita

78. Determine se a equação
$$(x^2+y^2+2x)^2 - (x^2+y^2) = 0$$
define implicitamente y como uma função diferenciável de x em torno do ponto $(0,1)$. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ no ponto $x = 0$.
Resp.: $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-2(x^2+y^2+2x)(2x+2)}{4y(x^2+y^2+2x)-2y}$, $\frac{dy}{dx}(0) = -2$ (na vizinhança de $(0,1)$, quando $x = 0$, $y = 1$)



79. Determine algum ponto (a, b, c) em torno do qual a equação $y^3 + 2xyz^5 + x^2 + z = 4$ define implicitamente alguma função diferenciável $z = g(x, y)$ (respectivamente, $x = f(y, z)$). Expresse $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ (respectivamente, $\frac{\partial x}{\partial y}$) em função de x, y e z e calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ no ponto (a, b) (respectivamente, no ponto (b, c)). *Tarefa!*

Resp.: Por exemplo: $f(1,0,3) = 0$, $f_z(1,0,3) \neq 0$ e $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xyz^5+2x}{10xyz^4+1}$, $\frac{\partial z}{\partial x}(1,0) = 2$; $f(2,0,0) = 0$, $f_x(2,0,0) \neq 0$ e $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{3y^2+2xz^5}{2xyz^5+2x}$, $\frac{\partial x}{\partial y}(2,0) = 0$

E.15 Polinômio de Taylor

80. Seja $f(x, y) = e^{x+5y}$.

(a) Encontre $T^1_{f,(0,0)}$ e $T^2_{f,(0,0)}$

(b) Verifique que

$$|e^{x+5y} - T^1_{f,(0,0)}(x, y)| < \frac{3}{2}(x + 5y)^2 \text{ em } R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + 5y < 1\}.$$

(c) Estime o erro cometido na aproximação $e^{x+5y} \cong T^1_{f,(0,0)}(x, y)$ quando $x = 0,001$ e $y = 0,001$.

(d) É verdade que *Tarefa!*

$$|e^{x+5y} - T^2_{f,(0,0)}(x, y)| < \frac{1}{2}|x + 5y|^3, \quad \forall (x, y); x + 5y < 1?$$

(e) Estime o erro cometido na aproximação $e^{x+5y} \cong T^2_{f,(0,0)}(x, y)$ quando $x = 0,01$ e $y = 0,01$. *Tarefa!*

Resp.: (a) $T^1_{f,(0,0)} = 1 + 5y + x$, $T^2_{f,(0,0)} = 1 + x + 5y + \frac{(x+5y)^2}{2}$; (c) $< 10^{-4}$; (e) $< 10^{-6}$

(Veja: Polinômios de Taylor de e^{x+5y} em $(0, 0)$ e de $\sqrt{xy}$ em $(1, 1)$)

E.16 Máximos e mínimos

Encontre os pontos de máximos/mínimos locais/absolutos (caso existam) de f.

81. $f(x,y) = x^2 + y^2$

    Resp.: $(0,0)$ é pma, não possui PML nem PMA em $\mathbb{R}^2$

82. $f(x,y) = y^2 - x^2$

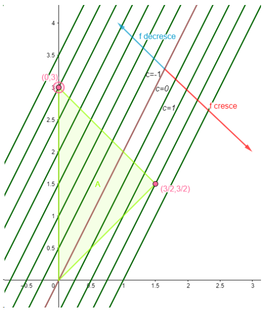
    Resp.: $(0,0)$ é p. sela, não possui PML/PMA nem pml/pma em $\mathbb{R}^2$

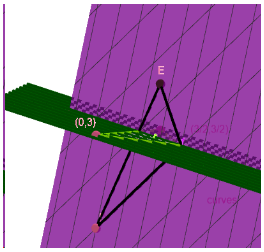
83. $f(x,y) = 2x - y$ em $A = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 3, y \geq x\}$

    (a) use curvas de nível

    (b) justifique analiticamente

    Resp.: PMA$=(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$; VMA$=\frac{3}{2}$; pma$=(0,3)$; vma$=-3$



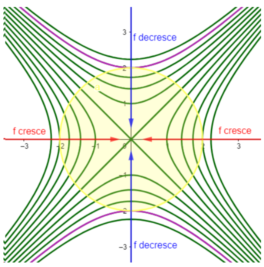


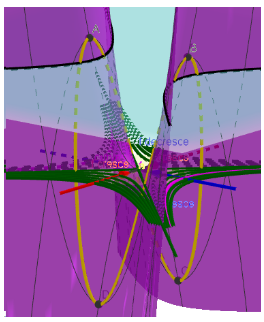
84. $f(x,y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$.

    Resp.: $(-1,1), (1,-1)$ p. sela; $(1,1)$ pml; $(-1,-1)$ PML, f não possui máximo/mínimo absolutos em $\mathbb{R}^2$

85. $f(x,y) = y^2 - x^2$ em $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ geogebra

    Resp.: $(0,0)$ p. sela; $(2,0), (-2,0)$ pma; vma$=4$; $(0,2), (0,-2)$ PMA; VMA$=4$





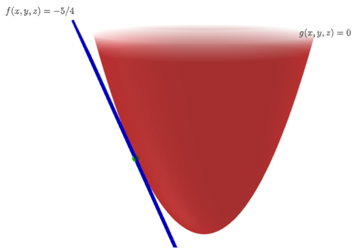
E.17 Multiplicadores de Lagrange

86. Rever o exercício 85 usando Lagrange.

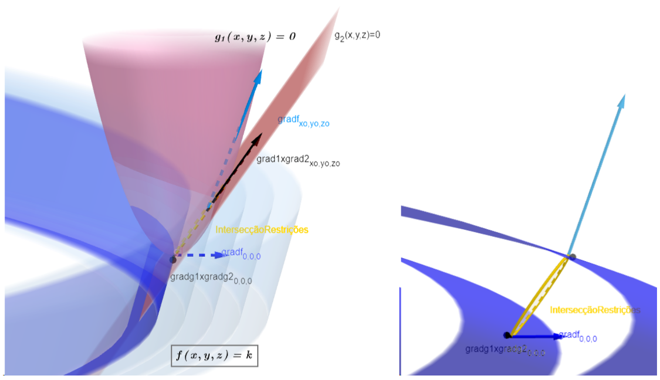
87. Determine o ponto da parábola $y = x^2$ mais próximo de $(14, 1)$.
Resp.: $(2, 4)$ é o ponto da parábola mais próximo de $(14, 1)$.

88. $f(x, y) = y + x^3$ sujeita à condição $g(x, y) = y - x^3 = 0$.
Resp.: $(0, 0)$ é solução do sistema do Método de Lagrange, porém não é nem de mínimo nem de máximo: f não possui extremos restrita a tal condição

89. $f(x, y, z) = z+2x-y$ sujeita à condição $g(x, y, z) = (x-2)^2+(y-4)^2-z = 0$ geogebra
Resp.: $(1, \frac{9}{2}, \frac{5}{4})$ é solução do sistema do Método de Lagrange, $f(1, \frac{9}{2}, \frac{5}{4}) = -\frac{5}{4}$ é o vm de f restrita à condição dada.



90. $f(x, y, z) = z^2 + x + y$ sujeita às condições $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$ e $g_2(x, y, z) = x + y - z = 0$ geogebra
Resp.: $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 2)$ são soluções do sistema do Método de Lagrange, $f(0, 0, 0) = 0$ é o vm e $f(1, 1, 2) = 6$ é o VM de f restrita às condições dadas.



Ver os seguintes exemplos no Wikipedia: *Tarefa!*

91. $f(x, y) = x + y$ sujeita à condição $x^2 + y^2 = 1$
92. $f(x, y) = (x + y)^2$ sujeita à condição $x^2 + y^2 = 1$
93. $f(x, y) = xy^2$ sujeita à condição $x^2 + y^2 = 3$

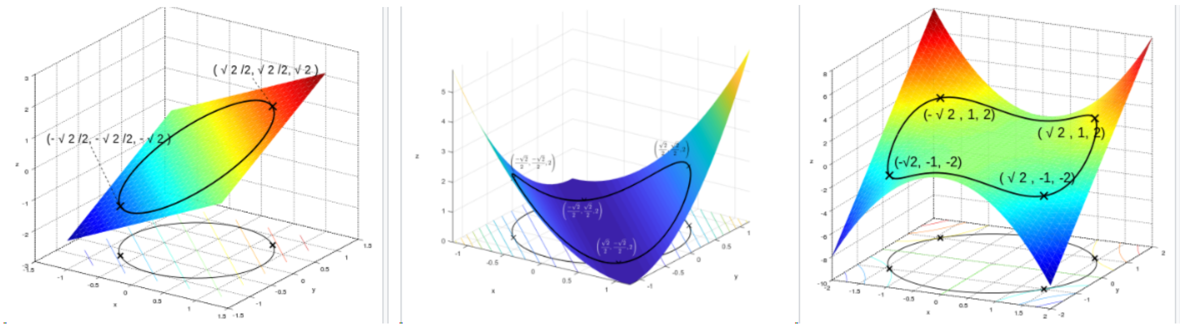


Figura 2: A curva desenhada no gráfico é a imagem da condição dada. Os pontos destacados $(a, b, f(a, b))$, são aqueles onde f possui extremo em (a, b)

E.18 Revisão

Atenção: teoria que não aparece nos exercícios abaixo é tão importante quanto as que aparecem!

94. Considere $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 - y}}$.

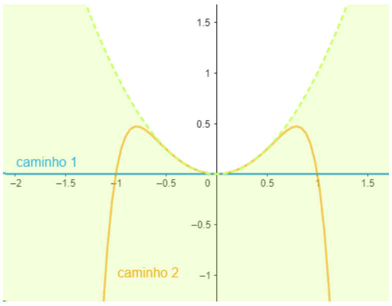
(a) encontre e esboce o domínio de f

(b) f é contínua?

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,4)} f(x,y) = ?$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

Resp.: (a) $D = \{(x,y) : y < x^2\}$; (b) f é contínua em D; (c) $+\infty$, (d) não existe: considere por exemplo os caminhos: $\gamma_1 : x = 0$, e $\gamma_2 : y = x^2 - x^8$ (note $x^2 - x^8 - y = (x^2 - y) - x^8 < x^2 - y$ sempre que $x \neq 0$ e $x = 0$ em γ_2 implica $y = 0$, portanto $\gamma_2 \subseteq D \cup \{(0,0)\}$)



95. Determine D_f, as derivadas parciais de primeira ordem e seus domínios e se f é diferenciável em D_f.

(a) $f(x,y,z) = x^2 + \cos(xy) - z$

(b) $f(x,y) = e^{\sqrt{x^4+y^2}}$

Resp.:

(a) $D_f = D_{f_x} = D_{f_y} = D_{f_z} = \mathbb{R}^3$, $f_x(x,y,z) = 2x + y\sin(xy)$, $f_y(x,y,z) = x\sin(xy)$, $f_z(x,y,z) = -1$, f é diferenciável em D_f.

(b) $D_f = \mathbb{R}^2$; $f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 e^{\sqrt{x^4+y^2}}}{\sqrt{x^4+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $D_{f_x} = \mathbb{R}^2$;

$f_y(x,y) = \dfrac{y e^{\sqrt{x^4+y^2}}}{\sqrt{x^4+y^2}}$, $D_{f_y} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

96. Faça esboço de conjuntos de nível de:

    (a) $f(x,y) = y - \sqrt{1-x^2}$

    (b) $f(x,y,z) = z - \dfrac{1}{x}$

    Resp.: (a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$ (b) $D_f = \mathbb{R}^3 -$ plano yz

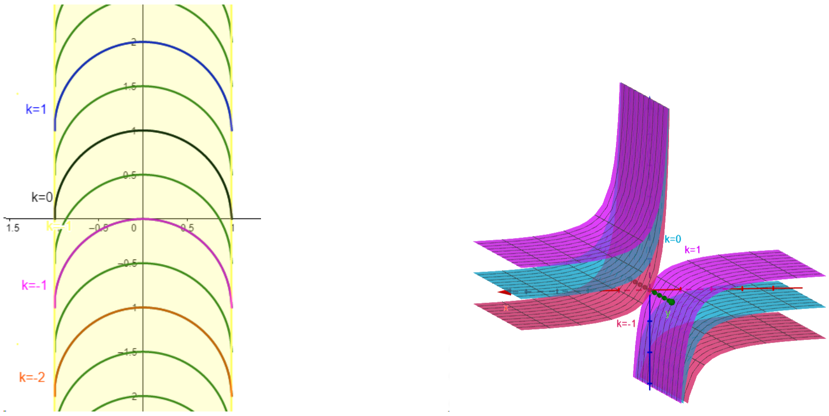


Figura 3: (a) semi-circunferências (geogebra)

97. Seja f uma função de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$. Se $F(u,v) = f(x,y)$ onde $x = 2uv^2$ e $y = u^3 + v$, expresse F_{uv} em função das derivadas parciais de f.
    Resp.: $F_{uv}(u,v) = 4vf_x(2uv^2, u^3+v) + 8uv^3 f_{xx}(2uv^2, u^3+v) + [2v^2+12u^3v]f_{xy}(2uv^2, u^3+v) + 3u^2 f_{yy}(2uv^2, u^3+v)$

98. Determine a equação de uma reta que seja tangente à curva $2x^2 + y^2 = 3$ e paralela à reta $2x + y = 5$.
    Resp.: $2x + y = 3$ ou $2x + y = -3$

99. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é tal que $f(x,y) = (\cos(x), xy^2, e^{y^2-1})$, encontre f'.

    Resp.: $f'(x,y) = \begin{bmatrix} -\sin(x) & 0 \\ y^2 & 2xy \\ 0 & 2ye^{y^2-1} \end{bmatrix}$

100. Considere $f(x,y) = x^2y^2 - c(x^2 - y)$. Para quais valores de c a equação $f(x,y) = 0$ define x como função de y em torno de $(0,0)$? e y como função de x? Encontre, quando for o caso, $\frac{dx}{dy}$ e $\frac{dy}{dx}$. (geogebra)

Resp.: pelo teorema da função implícita, para todo $c \neq 0$ podemos concluir que y é função de x numa vizinhança de $(0,0)$: $y = g_c(x)$, $x \in I \ni 0$; e $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^2-2xc}{2x^2y+c}$

(Observação: podemos concluir que existem caminhos $\gamma_c : y = g_c(x)$ que passam por $(0,0)$ tais que $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \gamma_c}} \frac{x^2y^2}{x^2-y} = c$ para diferentes valores de c (geogebra))

101. Sejam $f(x,y) = y^2 - x$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ (geogebra).

(a) Determine se f admite extremos locais/absolutos em $\mathbb{R}^2$

(b) Determine os extremos absolutos de f em D, analisando os 3 métodos:

i. use curvas de nível

ii. encontre os pc e encontre os extremos na fronteira restringindo a função à fronteira de D

iii. encontre os pc e encontre os extremos na fronteira usando o método de Lagrange

Resp.: (a) Não possui extremos locais/absolutos em $\mathbb{R}^2$.

(b) em D: $J = (1,0)$ é pm, -1 é o vm; $L = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $M = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ são PM, $\frac{5}{4}$ é o VM.

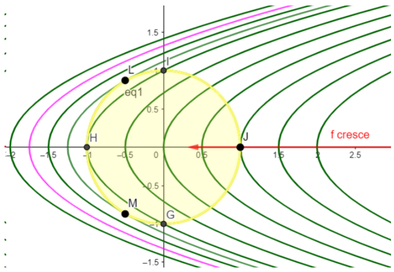


Figura 4: (geogebra)

102. Fazer os exercícios que foram deixados como tarefa: 45c, 49d, 64c, 72, 75, 76, 79, 80d-80e, 91, 92, 93.

Fim do curso! *Bons estudos!*

Boas Férias!