Este arquivo contém alguns dos exercícios que foram resolvidos ou discutidos durante as aulas. Seus enunciados podem não estar completos e pode ser que durante as aulas importantes comentários sobre as resoluções tenham sido feitos.[1]

Conteúdo

E.1 Vetores

1. Verifique que $\vec{u}+\vec{x}=\vec{u}+\vec{y}\Longrightarrow\vec{x}=\vec{y}$.

[1]Caso você encontre algum erro neste arquivo, por favor, reportá-lo para apperon@icmc.usp.br

2. Se $\vec{v} \neq \vec{0}$, mostre que $\dfrac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ possui comprimento 1.

3. Mostre que se $\alpha \neq 0$, então $\alpha\vec{v} = \vec{w} \Longrightarrow \vec{v} = \frac{1}{\alpha}\vec{w}$.

4. Conhecendo os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, encontre os vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ que satisfazem:

$$\begin{cases} \vec{x} + 2\vec{y} &= \vec{u} \\ 3\vec{x} - \vec{y} &= 2\vec{u} + \vec{v} \end{cases}$$

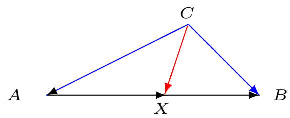
   Resp.: $\vec{x} = \frac{1}{7}(5\vec{u} + 2\vec{v})$, $\vec{y} = \frac{1}{7}(\vec{u} - \vec{v})$

5. Justifique as propriedades A2-A4 de adicção de vetores, M1, D1 e D2 de multiplicação de vetor por escalar. (tarefa!)

6. Se $\alpha\vec{u} = \vec{0}$, mostre que $\alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

7. Mostre que as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.

8. Considere o triângulo ABC como na figura e seja X como na figura. Suponha que $\overrightarrow{AX} = m \cdot \overrightarrow{XB}$, com $m > 0$. Escreva o vetor $\overrightarrow{CX}$ em função dos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$. (tarefa! Sugestão: encontre 2 equações que relacionem de alguma forma os vetores que aparecem na figura e resolva o sistema)
   Resp.: $\overrightarrow{CX} = \frac{1}{m+1}\overrightarrow{CA} + \frac{m}{m+1}\overrightarrow{CB}$.



9. Sejam $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ vetores em V^n. Suponha que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam paralelos. Mostre que existe um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

E.2 Dependência Linear

10. Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^n$. Mostre que os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ são LD, onde

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w} \\ \vec{b} &= 2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} \\ \vec{c} &= 7\vec{v} - 3\vec{w}. \end{aligned}$$

11. Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$ são LI, então $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{w}$ e $\vec{v} + \vec{w}$ são LI.

E.3 Base

12. Verifique se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dados são LD ou LI.

    (a) $\vec{u} = (0, 1, 0)_E$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)_E$

    (b) $\vec{u} = (1, -3, 14)_E$ e $\vec{v} = (\frac{1}{14}, \frac{-3}{14}, 1)_E$

    Resp.: (a) LI (b) LD

13. Determine m e n de modo que os vetores

$$\vec{u} = (1, m, n + 1)_E, \qquad \vec{v} = (m, n, 10)_E$$

    sejam LD.
    Resp.: $m = 2, n = 4$

14. Verifique se $\vec{u} = (1, -1, 2)_E$, $\vec{v} = (-3, 4, 1)_E$ e $\vec{w} = (1, 0, 9)_E$ são LI ou LD.
    Resp.: são LD

15. Determine se existe m tal que os vetores

$$\vec{u} = (m, 1, 1 + m)_E, \quad \vec{v} = (1, 2, m)_E, \quad \vec{w} = (1, 1, 1)_E$$

    sejam LD.
    Resp.: $\nexists m \in \mathbb{R}$ tal que os vetores sejam LD. Portanto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI e portanto $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é base de V^3 para qualquer $m \in \mathbb{R}$.

16. Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3 e considere os vetores

$$\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3.$$

    (a) Mostre que $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é base de V^3.

    (b) Calcule as coordenadas do vetor $\vec{u} = (1, 1, 1)_E$ na base F.

    Resp.: (b) $\vec{u} = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{7}{3})_F$

E.3.1 Mudança de base

17. Dada uma base qualquer E de V^3, mostre que $M_{EE} = Id$.

18. Determine a, b, c sabendo que $(1,1,2)_E = (2,1,0)_F$ e que

$$M_{FE} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 2 & 1 & b \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Resp.: $a = \frac{3}{2}, b = -1$ e $c = -\frac{1}{2}$

19. Considere as bases $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ onde

$$\vec{f}_1 = (-3,1,1)_E, \quad \vec{f}_2 = (1,-2,1)_E, \quad \vec{f}_3 = (1,2,0)_E.$$

(a) Determine as coordenadas de $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ na base F.

(b) Escreva a matriz de mudança da base E para F.

(c) Quais são as coordenadas do vetor $\vec{u} = (-4,1,,-1)_F$ na base E?

Resp.: (a) $\vec{f}_1 = (1,0,0)_F, \vec{f}_2 = (0,1,0)_F, \vec{f}_3 = (0,0,1)_F$; (b) $M_{EF} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; (c) $\vec{u} = (12,-8,-3)_E$

20. Sejam $E = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ uma base de V^3 e $F = (\vec{v} - \vec{u}, \vec{u} - \vec{w}, \vec{u})$.

(a) Mostre que F é base de V^3.

(b) Calcule as coordenadas de $\vec{x} = \vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w}$ na base F.

Resp.: (b) $(2,-3,6)_F$.

PS: Em geral, se usarmos $(\vec{x})_E = (M_{EF})(\vec{x})_F$ para obtermos as coordenadas de $\vec{x}$ na base F é necessário resolver um sistema! Se usarmos $(\vec{x})_F = (M_{EF})^{-1}(\vec{x})_E$ não precisamos resolver sistema (lembrando que $(M_{EF})^{-1} = M_{FE}$)!

E.4 Produto escalar, base ortonormal

21. Sejam $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal de V^3 e

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_3.$$

(a) Mostre que $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ é uma base de V^3.
F é ortonormal?

(b) Sejam $\vec{u} = (1,0,0)_F$ e $\vec{v} = (0,1,0)_F$. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Resp.: (a) F não é ortonormal; (b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$

22. Seja E uma base ortonormal de V^3. Calcule $ang(\vec{u}, \vec{v})$, quando:

    (a) $\vec{u} = (1,0,1)_E$ e $\vec{v} = (-2,10,2)_E$

    (b) $\vec{u} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)_E$ e $\vec{v} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3})_E$

    Resp.: (a) $\theta = \frac{\pi}{2}$; (a) $\theta = \frac{\pi}{6}$

23. Seja E uma base ortonormal de V^3. Obtenha os vetores de norma $3\sqrt{3}$ que são ortogonais aos vetores $\vec{u} = (2,3,-1)_E$ e $\vec{v} = (2,-4,6)_E$.
    Resp.: $\vec{x} = (-3,3,3)_E$ ou $\vec{x} = (3,-3,-3)_E$

24. Verifique que se n vetores são dois a dois ortogonais, então eles são LI. (Tarefa!)

25. Sejam $\vec{w}$ um vetor não nulo e T o conjunto dos vetores em V^3 que são ortogonais a $\vec{w}$. prove que:

    (a) $\vec{w} \notin T$;

    (b) Qualquer combinação linear de vetores em T pertence a T;

    (c) Se $\vec{u}, \vec{v} \in T$ são LI, então $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI;

    (d) Três vetores quaisquer de T são LD;

    (e) Se $\vec{u}, \vec{v} \in T$ são LI, então $\vec{u}, \vec{v}$ geram T, isto é, todo vetor de T é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. T é chamado **plano ortogonal** a $\vec{w}$.

E.4.1 Projeção ortogonal e ortonormalização de Gram-Schimidt

26. Seja E uma base ortonormal.

    (a) Calcule a projeção ortogonal de $\vec{v} = (1,-1,2)_E$ sobre $\vec{u} = (3,-1,1)_E$.

    (b) Decomponha $\vec{v} = (-1,-3,2)_E$ como soma de dois vetores $\vec{p}$ e $\vec{q}$ de modo que $\vec{p}$ seja paralelo a $\vec{u} = (0,1,3)_E$ e $\vec{q} \perp \vec{u}$.

Resp.: (a) $proj_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{6}{11}(3,-1,1)_E$
(b) $\vec{p} = proj_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{3}{10}(0,1,3)_E$ e $\vec{q} = (-1, -\frac{33}{10}, \frac{11}{10})_E$

27. Sejam, em relação a uma base ortonormal,

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1), \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1), \quad \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1), \quad \vec{a} = (3,-2,-1).$$

   (a) Prove que $F = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base ortonormal.

   (b) Calcule as coordenadas de $\vec{a}$ na base F.

   Resp.: (b) $\vec{a} = (\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{6}})_F$

28. Descreva os vetores $\vec{x}$ tais que $\vec{x} \cdot (\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{\kappa}) = 0$, onde $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ é uma base ortonormal.
   Resp.: $\vec{x}$ é gerado pelos vetores $\vec{\imath} + \vec{\kappa}$ e $\vec{\jmath} + \vec{\kappa}$ e pertence ao plano ortogonal ao vetor $\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{\kappa}$.

29. (tarefa!) Sejam E uma base ortonormal e $E_1 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base, onde

$$\vec{e}_1 = (1,2,2)_E, \quad \vec{e}_2 = (1,0,1)_E, \quad \vec{e}_3 = (1,1,1)_E.$$

   (a) Aplique o processo de Gram-Schimidt para obter uma base ortonormal $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ a partir de E_1;

   (b) Sabendo que $\vec{u} = (0,1,1)_{E_1}$ determine:

      i. as coordenadas de $\vec{u}$ na base B.

      ii. $\|\vec{u}\|$;

      iii. poderia ter encontrado $\|\vec{u}\|$ sem resolver o item (i)?

   Resp.: (a) $\vec{\imath} = \frac{1}{3}(1,2,2)_E, \vec{\jmath} = \frac{1}{3}(2,-2,1)_E, \vec{\kappa} = \frac{1}{3}(2,1,-2)_E$
   (b) (i) $\vec{u} = (\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3})_B$; (ii) $\|\vec{u}\| = 3$; (iii) sim, encontrando as coordenadas de $\vec{u}$ na base E, $\vec{u} = (2,1,2)_E$, e com os dados do exercício de nenhuma outra forma!

30. Determine se as matrizes são ortogonais e no caso afirmativo determine sua inversa.

(a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$

Resp.: (a) M não é ortogonal; (b) M é ortogonal, $M^{-1} = M^t$

E.5 Orientação, Produto Vetorial, Produto Misto

31. Seja $E = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ uma base ortonormal positiva.

(a) Sejam $\vec{u} = (1,2,3)_E$ e $\vec{v} = (-1,1,2)_E$. Calcule $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

(b) Calcule $(2\vec{\kappa} - \vec{\imath} + 5\vec{\jmath}) \wedge (3\vec{\imath} - 2\vec{\kappa} + \vec{\jmath})$

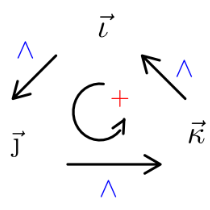
(c) Encontre um vetor ortogonal a $\vec{u} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{\kappa}$ e $\vec{v} = -\vec{\jmath} + \vec{\kappa}$.

(d) Mostre que

$$\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{\kappa}, \quad \vec{\jmath} \wedge \vec{\kappa} = \vec{\imath}, \quad \vec{\kappa} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$$

$$\vec{\jmath} \wedge \vec{\imath} = -\vec{\kappa}, \quad \vec{\kappa} \wedge \vec{\jmath} = -\vec{\imath}, \quad \vec{\imath} \wedge \vec{\kappa} = -\vec{\jmath}.$$

Resp.: (a) $(1,-5,3)_E$; (b) $(-12,2,-16)_E$; (c) $(0,-1,-1)_E$;
(d)



32. Sejam B uma base ortonormal ~~positiva~~,

$$\vec{u} = \left(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)_B, \quad \vec{v} = (6,-2,4)_B, \quad \vec{w} = \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)_B.$$

Calcule:

(a) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$;

(b) $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$; (tarefa!)

(c) usando os itens (a) e (b): $\vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})$;

(d) usando os itens (a) e (b): $\vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u})$;

Resp.: (a) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \frac{1}{7}(-17, 22, -9)_B$; (b) $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = -\frac{1}{7}(20, 25, 39)_B$; (c) $\vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = -\frac{1}{7}(-17, 22, -9)_B$; (d) $\vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) = \frac{1}{7}(3, 47, 30)_B$

Para os exercícios de 33 a 36, considere $\mathcal{B}$ uma base ortonormal positiva de V^3.

33. Calcule a área do paralelogramo $ABCD$ sendo $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)_\mathcal{B}$ e $\overrightarrow{AD} = (2, 1, 4)_\mathcal{B}$.
Resp.: $Area = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\| = \sqrt{27}$

34. Calcule a área do triângulo ABC sendo $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)_\mathcal{B}$ e $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 3)_\mathcal{B}$.
Resp.: $Area = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{19}/2$

35. Sejam $\vec{u} = (1, 1, 1)_\mathcal{B}$ e $\vec{v} = (0, 1, 2)_\mathcal{B}$. Obtenha uma base ortonormal positiva $E = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ tal que

- $\vec{a}$ e $\vec{u}$ tenham a mesma direção e sentido;
- $\vec{b}$ seja combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Resp.: $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)_\mathcal{B}$, $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{8}}(-2, 0, 2)_\mathcal{B}$ e $\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)_\mathcal{B}$. De fato, pelo Corolário OPv.2.8, a base E é positiva.

36. Sejam $\vec{u} = (1, 1, 1)_\mathcal{B}$ e $\vec{v} = (0, 1, 2)_\mathcal{B}$. Obtenha uma base ortonormal $E = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ tal que

- $\vec{a}$ seja combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
- $\vec{c}$ e $\vec{v}$ tenham a mesma direção e sentido.

E é positiva?
Resp.: Escolhendo $\vec{a} = \frac{\vec{v} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})}{\|\vec{v} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 2, -1)_\mathcal{B}$, $\vec{b} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)_\mathcal{B}$ e
$\vec{c} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, 2)_\mathcal{B}$, a base E é negativa.

E.5.1 Produto misto

37. Sendo $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=6$, calcule $[2\vec{u}-3\vec{v}+\vec{w},-\vec{u}+\vec{v},\vec{v}-3\vec{w}]$.
Resp.: 12

38. Seja $E=(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{\kappa})$ uma base ortonormal positiva. Determine $x\in\mathbb{R}$ de modo que o volume do tetraedro determinado pelos vetores $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(2,x,1)$ e $\vec{w}=(0,1,-1)$ seja igual a $1u^3$.
Resp.: $x=9$ ou $x=-3$

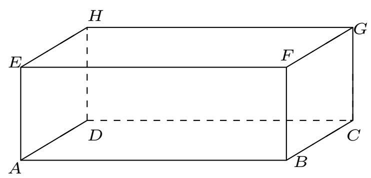
E.6 Retas e Planos

E.6.1 Sistema de coordenadas

39. Considere $ABCDEFGH$ um paralelepípedo como na figura abaixo e $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ uma base de V^3.

    (a) Se $\vec{e}_1=\overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2=\overrightarrow{AD}$ e $\vec{e}_3=\overrightarrow{AE}$, encontre as coordenadas do ponto H no sistema $\Sigma=(F,\mathcal{B})$.

    (b) Se $\vec{e}_1=\overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2=\overrightarrow{AC}$ e $\vec{e}_3=\overrightarrow{AF}$, encontre as coordenadas do ponto H no sistema $\Sigma_1=(A,\mathcal{B})$.



Resp.: (a) $H=(-1,1,0)_\Sigma$, (b) $H=(-2,1,1)_{\Sigma_1}$

E.6.2 Retas

40. Seja $\Sigma=(O,E)$ um sistema de coordenadas ortogonal em E^3 e considere os pontos $A=(1,0,2)$ e $B=(0,1,1)$.

    (a) Encontre equações vetorial, paramétricas e simétricas para a reta r que passa pelos pontos A e B.

    (b) O ponto $P=(1,2,3)$ pertence à reta r?

(c) Encontre os pontos de r que são da forma $Q = (x, 2, z)$ e $S = (3, y, z)$

Resp.: (a)
$r: (x, y, z) = (1, 0, 2) + \lambda(1, -1, 1),\ \lambda \in \mathbb{R}$ OU $r: (x, y, z) = (0, 1, 1) + \lambda(-1, 1, -1),\ \lambda \in \mathbb{R}$

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \qquad r: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

$r: x - 1 = -y = z - 2;$ $\quad r: -x = y - 1 = 1 - z;$

(b) $P \notin r$; (c) $Q = (-1, 2, 0)$; $S = (3, -2, 4)$.

E.6.3 Planos

41. Seja $\Sigma = (O, E)$ um sistema de coordenadas ortogonal em E^3 e considere π o plano que contém os pontos $A = (1, 0, 1)_\Sigma$, $B = (2, 1, -1)_\Sigma$ e $C = (1, -1, 0)_\Sigma$.

   (a) Encontre equações vetorial, paramétricas e geral para o plano π

   (b) O ponto $P = (1, 2, 3)_\Sigma$ pertence ao plano π?

   Resp.: (a) $\pi: (x, y, z) = (2, 1, -1) + \lambda(1, 1, -2) + \mu(0, -1, -1), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

   $$\pi: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda - \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ z = -1 - 2\lambda - \mu \end{cases} \qquad \pi: 3x - y + z - 4 = 0;\ \text{(b) } P \in \pi$$

42. Sejam um ponto O de E^3 e $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal de V^3. Considere o sistema de coordenadas $\Sigma = (O, E)$. Obtenha **equações gerais dos planos coordenados**.
   Resp.: $\pi_1 : z = 0$ (vetores diretores $\vec{e}_1, \vec{e}_2$: **plano** Oxy); $\pi_2 : x = 0$ (vetores diretores $\vec{e}_2, \vec{e}_3$: **plano** Oyz); $\pi_3 : y = 0$ (vetores diretores $\vec{e}_1, \vec{e}_3$: **plano** Oxz),

43. Obtenha uma equação geral do plano que contém os pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$. (Tarefa!)
   Resp.: $x + y - 1 = 0$

44. Considere o plano π_1 cujas equações paramétricas são

$$\pi_1\colon \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Se π contém o ponto $A = (1, 1, 2)$ e é paralelo ao plano π_1, obtenha as equações paramétricas e uma equação geral do plano π.

Resp.: Eq. paramétricas: $\pi\colon \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 + 2\lambda + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ Eq. geral: $\pi : x - 2y - 3z + 7 = 0$

45. Encontre vetores diretores e uma equação vetorial do plano

$$\pi\colon 2x + 3y - 6z + 12 = 0.$$

Resp.: $\vec{u} = (0, 2, 1)$ e $\vec{v} = (3, 0, 1)$ são vetores diretores. Uma equação vetorial é $\pi : X = (0, 0, 2) + \lambda(0, 2, 1) + \mu(3, 0, 1)$, $\lambda\mu \in \mathbb{R}$.

46. Descreva os pontos que pertencem à interseção dos planos

$$\pi_1\colon 2x - y - z - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2\colon x - y + 2z + 2 = 0.$$

Resp.: todos os pontos que pertencem à reta $r : (3, 5, 0) + \lambda(3, 5, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

E.6.4 Posição relativa entre duas retas

Considere um sistema de coordenadas ortogonal $\Sigma = (O, B)$ de E^3, com B base positiva. As coordenadas dos pontos e as equações de retas são dadas em relação ao sistema Σ.

47. Verifique se as retas dadas na forma paramétrica

$$r\colon \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 1 - \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x = 9 - 4\lambda \\ y = 2 + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

são concorrentes, paralelas ou reversas. Se concorrentes, encontre o ponto de intersecção.
Resp.: r e s são concorrentes; ponto de intersecção $P = (1, 4, -2)$

48. Considere as retas com equações vetorial $r\colon X = (0,0,0) + \lambda(1,2,4)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $s\colon X = (1,0,-2) + \lambda(-1,-1,-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

    (a) Mostre que r e s são concorrentes.

    (b) Encontre as coordenadas do ponto de interseção entre elas.

    Resp.: (b) $P = (-1,-2,-4)$

E.6.5 Posição relativa entre reta e plano

Considere um sistema de coordenadas ortogonal $\Sigma = (O, B)$ de E^3, com B base positiva. As coordenadas dos pontos e as equações de retas são dadas em relação ao sistema Σ.

49. Sejam $r : X = (1,0,1) + \lambda(2,1,3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ uma reta, π um plano de equação geral $x + y + z = 20$. Qual a posição relativa entre r e π? Se transversais, encontre o ponto de intersecção.
    Resp.: r e π são transversais e $P = (7,3,10)$ é o ponto de intersecção.

50. Estude a posição relativa da reta r e do plano π dados por (Tarefa!)

$$r\colon \frac{x-1}{2} = y = -z$$

e

$$\pi\colon (x, y\, z)_\Sigma = (3,0,1)_\Sigma + \lambda(1,0,1)_E + \mu(2,2,0)_E, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Resp.: r e π são transversais e $P = (2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ é o ponto de intersecção.

E.6.6 Posição relativa entre dois planos

Considere um sistema de coordenadas ortogonal $\Sigma = (O, B)$ de E^3, com B base positiva. As coordenadas dos pontos e as equações de retas são dadas em relação ao sistema Σ.

51. Determine a posição relativa dos planos

$$\pi_1 : x + 2y + 3z - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2 : x - y + 2z = 0.$$

Descreva o conjunto dos pontos pertencentes à intersecção.
Resp.: π_1 e π_2 são transversais; o conjunto dos pontos da intersecção é uma reta cuja uma equação paramétrica é $r\colon \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - 5\lambda, & \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$

52. Encontre uma equação do plano π que contém o ponto $A = (2, 0, 0)$ e a reta de intersecção dos planos $\pi_1 : 3x - 2y - z - 3 = 0$ e $\pi_2 : 2x + y + 4z - 2 = 0$.
Resp.: $\pi\colon y + 2z = 0$ (**Sugestão:** usar teoria de feixe de planos.)

E.7 Perpendicularismo, medida angular, distância

Considere $\Sigma = (O, B)$ um sistema de coordenadas ortogonal com base positiva

E.7.1 Perpendicularismo

53. Obtenha uma equação geral do plano π que contém o ponto $A = (1, 1, 2)$ e que é paralelo ao plano de equação geral $x - y + 2z + 1 = 0$.
Resp.: $x - y + 2z - 4 = 0$

54. Encontre equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $A = (1, 0, -1)$ e é perpendicular à reta $s\colon X = (2, 1, 1) + \lambda(0, 1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Resp.: $r\colon \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda, & \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$

E.7.2 Medida angular

55. Obtenha equação da reta r que contenha o ponto $P = (1,1,1)$ e seja concorrente com

$$s : x = 2y = 2z,$$

sabendo que o cosseno da medida angular entre r e s é $1/\sqrt{3}$.
Resp.: $r_1 : X = (1,1,1) + \lambda(0,1,1)$ e $r_2 : X = (1,1,1) + \lambda(-4,1,1)$

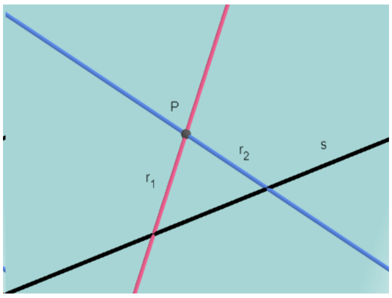


Figura 1: Geogebra

56. Calcule a medida angular entre os planos

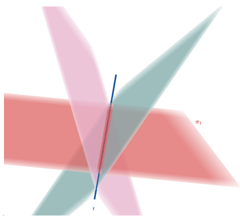
$$\pi_1 : x + y + z = 0, \qquad \pi_2 : X = (1,0,0) + \lambda(1,0,1) + \mu(-1,0,0),\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Resp.:

57. Encontre uma equação geral do plano que contém a reta

$$r : \begin{cases} x = z + 1 \\ y = z - 1 \end{cases}$$

e que forma um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ radianos com o plano $\pi_1 : x + 2y - 3z + 2 = 0$.
Resp.: $\pi : -3x + y + 2z + 4 = 0$ e $\pi : -2x + 3y - z + 5 = 0$

Geogebra 

E.7.3 Distância

58. Sejam $A = (a, b, c)$ e $B = (m, n, p)$ pontos distintos. Verifique que o lugar geométrico dos pontos de E^3 que equidistam de A e B é um plano perpendicular ao segmento AB que contém o seu ponto médio. Esse plano é chamado **plano mediador** de AB.

59. Calcule a distância entre o ponto $P = (1, -1, 4)$ e a reta
$$r : \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{1-z}{2}.$$
Resp.: $d(P, r) = \frac{\sqrt{270}}{\sqrt{29}}$

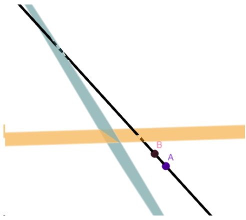
60. Calcule a distância do ponto $P = (9, 2, 2)$ ao plano
$$\pi : X = (0, -5, 0) + \lambda(0, \frac{5}{12}, 1) + \mu(1, 0, 0), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$
Resp.: $d(P, \pi) = \frac{94}{13}$

61. Calcule a distância entre as retas
$$r : X = (2, 1, 0) + \lambda(1, -1, 1),\ \lambda \in \mathbb{R}, \qquad s : x + y + z = 2x - y - 1 = 0.$$
Resp.: $d(r, s) = \frac{7}{\sqrt{26}}$ (tarefa)

62. Considere $A = (0, 2, 1)$ um ponto e a reta $r : X = (0, 2, -2) + \lambda(1, -1, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Obtenha os pontos da reta r que distam $\sqrt{4}$ de A. (tarefa)
   (b) Obtenha os pontos da reta r que distam $\sqrt{3}$ de A.
   (c) $d(A, r)$ é maior, igual ou menor a $\sqrt{3}$? Por quê?

   Resp.: (a) $P = (1, 1, 0)$; (b) $d(A, r) = \sqrt{3}$, pois P é a projeção ortogonal de A a r (tarefa)

63. Sejam $\Sigma = (O, B)$ um sistema ortogonal de coordenadas onde B é uma base positiva. Obtenha os pontos da reta $r : x - y = 2y = z$ que equidistam de $A = (1, 1, 0)$ e $B = (0, 1, 1)$.
Resp.: $P = (0, 0, 0)$ (tarefa)

64. Obtenha os pontos da reta $r : X = (0,1,1) + \lambda(1,1,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, que equidistam dos planos $\pi_1 : x + 2y - z - 3 = 0$ e $\pi_2 : x - y + 2z = 1$.
Resp.: $A = (-\frac{2}{3}.\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, $B = (-\frac{2}{5}.\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$ (tarefa)
Geogebra 

65. Obtenha uma equação geral do plano que contém os pontos $A = (1,1,1)$ e $B = (0,2,1)$ e equidista dos pontos $C = (2,3,0)$ e $D = (0,1,2)$.
Resp.: $\pi_1 : x + y - 2 = 0$ e $\pi_2 : z = 1$ (tarefa) (Wolfram Alpha resolve sistemas)